MACH-SZÁM KISZÁMÍTÁSA GÁZ LEFÚVATÓ RENDSZERHEZ

MACH NUMBER CALCULATION FOR BLOW-OFF SYSTEM OF GAS

*Fegyverneki Sándor**

ABSTRACT

In [6] the authors worked out a calculation process and software for calculating the working conditions of blow-off systems at technological stations of gas pipelines. This paper presents a new discussion of the solution of the equation for Mach-numbers, an efficient numerical procedure for calculating the Mach number outlet if given Mach number inlet.

1. BEVEZETÉS

A nagy sebességű gázáramlás speciális esetét jelenti a lefúvató rendszerekben kialakuló gázáramlás. Ilyen esetben súrlódásos izentrópikus állapotváltozás közelíti legjobban a tényleges fizikai folyamatot. A nyomásesés meghatározásánál egy elemi csőszakaszra felírt kinetikus energiamérlegből kell kiindulni. Az adódó differenciálegyenlet integrálásából adódik az (1) egyenlet, amely lehetővé teszi a csővezeték mentén tetszőleges pontok között a Mach-szám megváltozás meghatározását [2], [5], [6]. A megoldandó egyenlet:

$$\frac{fl}{D}=\frac{1}{\kappa M_1^2}-\frac{1}{\kappa M_2^2}+\frac{\kappa+1}{2\kappa}\ln\frac{M_1^2(2+(\kappa-1)M_2^2)}{M_2^2(2+(\kappa-1)M_1^2)}, \qquad (1)$$

ahol

$$0<M_1<1,\quad 0<M_2\le 1,\quad 1<\kappa<2,\quad \frac{fl}{D}>0.$$

A paraméterek jelentése a következő:

M_1 – kezdeti Mach-szám,

M_2 – befejező Mach-szám,

f – Moody tényező,

l – a csővezeték hossza,

D – a vezeték belső átmérője,

κ – hőmérsékletek aránya.

A fizikai modell leírása, a feltételek és a megfelelő formulák megtalálhatóak pl. a [2], [3], [6] munkákban. Ebben a dolgozatban egy elméleti és ezzel együtt egy hatékony numerikus algoritmust adunk az (1) egyenlet megoldására, azaz az M_2 kiszámítására, ha adott az M_1 és a paraméterek értéke.

2. AZ (1) EGYENLET MEGOLDÁSA

Feladatunk az adott feltételek mellett az (1) nemlineáris egyenlet megoldása. Gyors válasz a Maple programcsomaggal:

$$M_2=\sqrt{\frac{-2}{2-2\kappa-(2\kappa+2)LambertW\left(-\frac{2+\kappa M_1^2-M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)}E\right)}}$$

$$E=\exp\left(\frac{-M_1^2\kappa+M_1^2+\frac{2fl\kappa M_1^2}{D}-2}{M_1^2(\kappa+1)}\right)$$

Jól látható, hogy általában négy megoldás van, és még nem tudjuk, hogy mit jelent a *LambertW*. Ezekre a cikk során választ adunk.

Tehát alakítsuk át az (1) egyenletet

$$\frac{\kappa+1}{2}\ln\frac{M_1^2(2+(\kappa-1)M_2^2)}{M_2^2(2+(\kappa-1)M_1^2)}=\frac{fl\kappa}{D}-\frac{1}{M_1^2}+\frac{1}{M_2^2}.$$

Alakítsuk át a jobb oldalt a következőképpen

$$\frac{\kappa+1}{2}\ln\frac{M_1^2(2+(\kappa-1)M_2^2)}{M_2^2(2+(\kappa-1)M_1^2)}=$$

$$\frac{fl\kappa}{D}-\frac{1}{M_1^2}-\frac{\kappa-1}{2}+\frac{1}{M_2^2}+\frac{\kappa-1}{2}.$$

Végezzünk el néhány egyszerű átalakítást:

** egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Alkalmazott Matematikai Tanszék*

$$\frac{1}{2}\ln\frac{M_1^2(2+(\kappa-1)M_2^2)}{M_2^2(2+(\kappa-1)M_1^2)}=\frac{\frac{2fl\kappa}{D}M_1^2-2-(\kappa-1)M_1^2}{2M_1^2(\kappa+1)}+\frac{2+(\kappa-1)M_2^2}{2M_2^2(\kappa+1)}.$$

$$\ln\frac{M_1^2(2+(\kappa-1)M_2^2)}{M_2^2(2+(\kappa-1)M_1^2)}=\frac{\frac{2fl\kappa}{D}M_1^2-2-(\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)}+\frac{2+(\kappa-1)M_2^2}{M_2^2(\kappa+1)}.$$

$$\frac{M_1^2(2+(\kappa-1)M_2^2)}{M_2^2(2+(\kappa-1)M_1^2)}=$$

$$\exp\left(\frac{\frac{2fl\kappa}{D}M_1^2-2-(\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)}\right)\exp\left(\frac{2+(\kappa-1)M_2^2}{M_2^2(\kappa+1)}\right).$$

$$-\frac{2+(\kappa-1)M_2^2}{M_2^2(\kappa+1)}\exp\left(-\frac{2+(\kappa-1)M_2^2}{M_2^2(\kappa+1)}\right)=$$

$$-\frac{2+(\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)}\exp\left(\frac{\frac{2fl\kappa}{D}M_1^2-2-(\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)}\right).$$

$$-\frac{2+(\kappa-1)M_2^2}{M_2^2(\kappa+1)}=$$

$$W\left(-\frac{2+(\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)}\exp\left(\frac{\frac{2fl\kappa}{D}M_1^2-2-(\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)}\right)\right).(2)$$

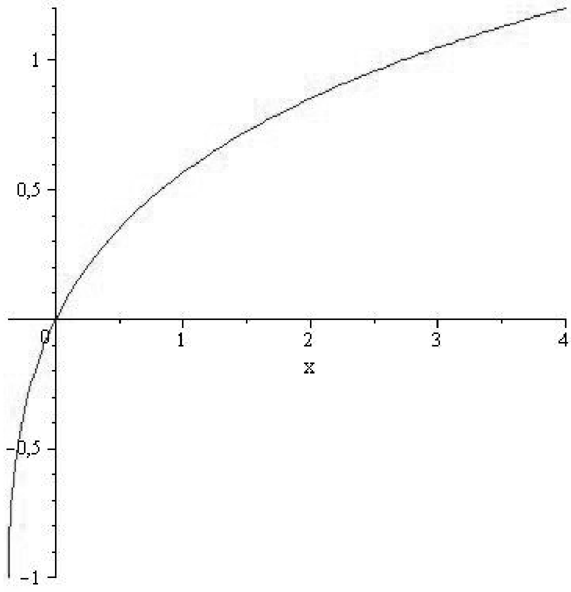
A megoldást láthatóan a Lambert-féle $W-$ függvény adja a (2) egyenletben. A következő szakaszban a $W-$ függvény alapvető tulajdonságait ismertetjük.

3. A LAMBERT-FÉLE $W-$ FÜGGVÉNY

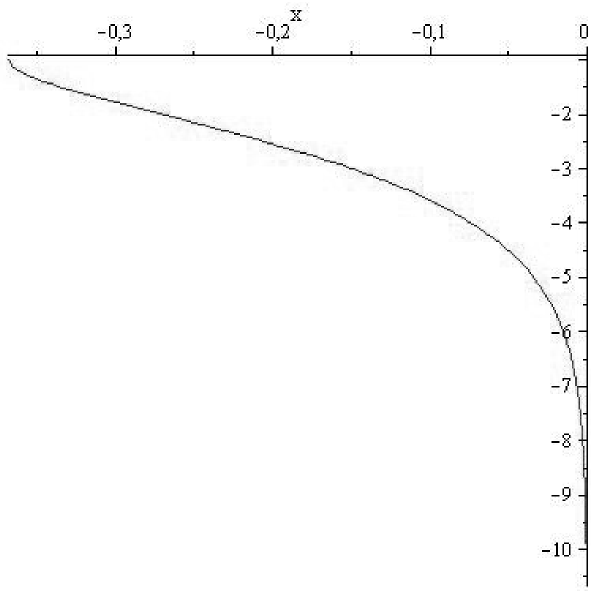
A Lambert-féle $W-$függvény teljesíti a következő egyenletet

$$W(z)e^{W(z)}=z.$$

Az egyenletnek végtelen sok megoldása van a komplex számok körében. Egy ág analitikus a 0-nál. Ezt tekintjük főágnak. A függvény először Lambert (1758) egy számelméleti munkájában jelent meg. A jelölés a Pólya-Szegő (1925) példatárban jelent meg először [4]. Részletes leírás található [1]-ben.



1. ábra. A Lambert-féle $W-$függvény főága.



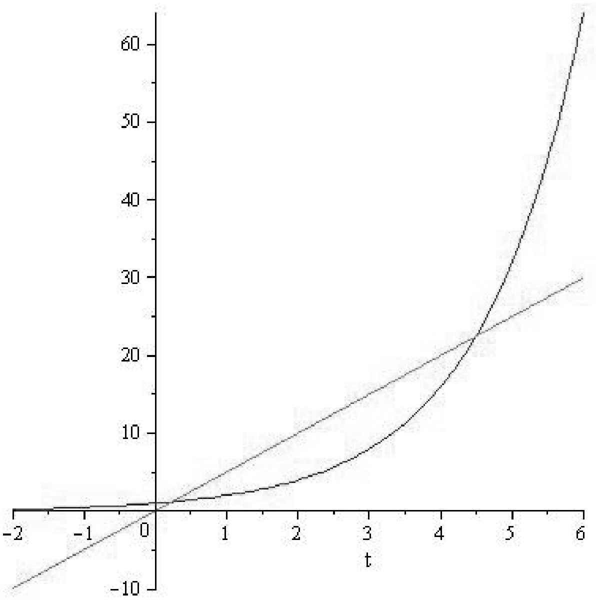
2. ábra. A Lambert-féle $W-$függvény W_{-1} ága.

Tekintsük példaként a következő egyszerű egyenletet:

$$2^t=5t,\quad t\in\mathbf{R}.$$

$$t=\frac{-W\left(\frac{-\ln 2}{5}\right)}{\ln 2}.$$

A két gyök közelítő értéke: 0.235455710, 4.48800113.



3. ábra. A $2^t = 5t$ egyenlet megoldásához.

Egyszerű tulajdonságok [1], [4] alapján:

1. Elemi függvényekkel nem fejezhető ki.

2. $W'(x) = \dfrac{1}{(1+W(x))\exp(W(x))} = \dfrac{W(x)}{x(1+W(x))},$
ha $x \neq 0$.

3. $z(1+W)\dfrac{dW}{dz} = W$, ha $z \neq -\dfrac{1}{e}$.

4. $\int W(x)dx = x\left(W(x) - 1 + \dfrac{1}{W(x)}\right) + C.$

5. $W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n.$

Néhány alkalmazási terület [1] alapján:

Kombinatorika - gyökeres fák generátorfüggvénye. Egyenletek megoldása - iterált hatványozás. Repülőgép üzemanyag fogyasztás. Késleltetett differenciálegyenlet:

$$y'(t) = ay(t-1).$$

Richards egyenlet, Lotka-Volterra egyenletrendszer. Algoritmusok elemzése. Borel-Tanner eloszlás, $M/D/1/$ modell a sorbanálláselméletben.

4. KORLÁTOK ÉS HATÁRÉRTÉKEK

A $W-$függvény melyik ága adja a megoldást az (1) egyenletre? A fizikai feltételek egyértelműen meghatározzák, hogy ez az ág az amelyik teljesíti, hogy $W(x) \leq -1$. Ennek jelölése és korlátai:

$$W_{-1}(x), \quad -\frac{1}{e} \leq x < 0, \quad -\infty < W_{-1}(x) \leq -1.$$

Vizsgáljuk meg, hogy mikor érjük el a korlátokat:

$$-\frac{2+(\kappa-1)M_2^2}{M_2^2(\kappa+1)} = -1,$$

azaz $M_2 = 1$.

$$-\frac{2+(\kappa-1)M_2^2}{M_2^2(\kappa+1)} \to -\infty,$$

azaz $M_2 \to 0 \quad (M_2 > 0)$.

Ha $M_1 \to 0 \quad (M_1 > 0)$, akkor

$$-\frac{1}{e} = -\frac{2+(\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)} \exp\left(\frac{\frac{2fl\kappa}{D}M_1^2 - 2 - (\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)}\right),$$

A másik korlátra pedig a következő adódik az (1) egyenletből:

$$-\frac{1}{e} = -\frac{2+(\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)} \exp\left(\frac{\frac{2fl\kappa}{D}M_1^2 - 2 - (\kappa-1)M_1^2}{M_1^2(\kappa+1)}\right),$$

azaz

$$M_1 \leq \frac{2}{\sqrt{2 - 2\kappa - 2(\kappa+1)W\left(-\exp\left(-\dfrac{2\frac{fl}{D}\kappa + \kappa + 1}{\kappa+1}\right)\right)}}.$$

$$M_1 \leq \frac{2}{\sqrt{2 - 2\kappa - 2(\kappa+1)W\left(-e^{-1}\exp\left(-\dfrac{2\frac{fl}{D}\kappa}{\kappa+1}\right)\right)}}.$$

Megjegyzés. Ha megoldjuk az (1) egyenletet az M_1 paraméterre feltéve, hogy $M_2 = 1,$ akkor

$$M_1 = \frac{2}{\sqrt{2 - 2\kappa - 2(\kappa+1)W\left(-e^{-1}\exp\left(-\frac{2\frac{fl}{D}\kappa}{\kappa+1}\right)\right)}}.$$

Végül, ha $\frac{fl}{D} \to 0,$ akkor a felső korlát $\to 1$.

5. A MEGOLDÁS NUMERIKUS MEGHATÁROZÁSA

A feladat a Lambert-függvényt meghatározó egyenlet megoldása lehetőleg gyors és pontos módszerrel:

$$W(z)e^{W(z)} = z.$$

A $W-$függvény értékeinek a meghatározására a Halley-módszert alkalmazzuk, azaz

$$w_{j+1} = w_j - \frac{w_j e^{w_j} - z}{e^{w_j}(w_j+1) - \frac{(w_j+2)(w_j e^{w_j} - z)}{2(w_j+1)}},$$

ahol $w_j = W(z_j)$ és a w_0 kezdő érték tetszőleges a $(-\infty, -1)$ intervallumon [1]. Rögtön látható, hogy a $W-$függvény rosszul kondicionált, ha $z = -1/e,$ azaz $W(z) \approx -1$.

A Halley-módszer egy jól ismert harmadrendű iterációs (egy pontos), nemlineáris egyenletmegoldó algoritmus, amely úgy adódik, hogy az

$$f(x) = 0$$

egyenletben egy racionális függvénnyel a

$$h(z) = \frac{a}{z+b} + c$$

alakban közelítjük az f függvényt.

Meghatározzuk $a,$ b és c értékét úgy, hogy

$$h^{(i)}(x) = f^{(i)}(x), \qquad i = 0,1,2.$$

Ekkor megoldva a

$$h(z) = 0$$

egyenletet, megkapjuk az iterációt, azaz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{1}{1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2}}\right).$$

A Halley-módszer fenti geometriai bevezetése Gardnertől (1978) származik.
Algebrai származtatás:

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}} = 0.$$

Alkalmazzuk g -re a Newton-Raphson ierácuiós módszert.

Az (1) egyenletet megoldó numerikus algoritmus beépült 2006-ban a Miskolci Egyetem, Kőolaj és Gázipari Intézete által készített FLARE lefúvató szimulációs rendszerbe. Pontossága 10^{-14}.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A tanulmány a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként - az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében - az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

IRODALOM

[1] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth (1996) On the Lambert Function. *Adv. Comput. Math.,* pp.329-359.

[2] Genick Bar-Meir (2012) *Fundamentals of Compressible Fluid Mechanics,* Minneapolis, **Version** (0.4.9.0 February 13, 2012).

[3] H. Y. Mak (1978) New method speeds pressure-relief manifold design, *The Oil and Gas Journal,* NOV. 20, pp.166-172.

[4] Pólya Gy., Szegő G. (1925) *Aufgaben und LehrsSätze der Analysis,* Berlin.

[5] L. Tihanyi, E. Bobok, T. Bódi (2000) A new model for blow-off of a gas pipeline, *Oil and Gas Business,* pp. 234-246.

[6] L. Tihanyi, E. Bobok (2001) Flow conditions during blow-off of gas pipeline, *Journal of Computational and Applied Mechanics,* pp.145-156.