

# Nemnewtoni folyadék kényszeráramlása síklapon porózus közegben

## Forced convection flow of a non-Newtonian fluid over a flat plate in porous medium

Bognár Gabriella\*, Rozgonyi Erika\*\*

### ABSTRACT

We study the steady forced convection flow of a non-Newtonian fluid over a horizontal surface embedded in a saturated Darcy-Brinkman-Forchheimer porous medium. The flow is driven by a constant pressure gradient. The mathematical model is formed by a boundary value problem which is investigated analytically. We give the solution of this problem as a power series expansion where the coefficients will be determined.

### 1. BEVEZETÉS

A porózus közeggel kapcsolatos kutatások a XIX. században a Darcy-féle modellhez kötődnek, melyet többféle formában továbbfejlesztettek, mint például a Darcy-Brinkman, vagy a Darcy-Brinkman-Forchheimer modell. Newtoni közegre a Darcy-féle viszkozus tagot 1947-ben Brinkman egy második taggal egészítette ki, amely modellhez 1982-ben Joseph egy újabb tagot illesztett, egy a sebesség négyzetével arányos Forchheimer-féle tagot (lásd. [8]).

1987-ben Poulikakos és Renken [11] a kényszeráramlást porózus közeggel töltött csatornában vizsgálta változó porozitás és Brinkman surlódás mellett. Hsu és Chang 1990-ben megjelent [7] cikkében a Darcy-Brinkman-Forchheimer modellt tanulmányozta newtoni közeg esetén.

Newtoni folyadékok porózus közegben való áramlásának irodalma és a nemnewtoni speciális hatványtörvény szerinti folyadékok áramlásával foglalkozó cikkek száma rendkívül nagy. A nemnewtoni folyadékokra irányuló figyelmet a mérnöki alkalmazhatóságok széles köre indokolja.

2009-ben Nield [10] átfogó ismertetést adott a kutatások fejlődéséről az utóbbi évtizedekre vonatkozóan a hatványtörvény szerinti folyadékok áramlását leíró matematikai modellre porózus közeg esetén.

Ezen dolgozatban Magyarai és Pantokratoras [9] 2010-es cikke alapján hatványtörvény szerinti folyadék

állandó nyomás gradiens melletti állandósult mozgását vizsgáljuk. Megadjuk a probléma matematikai modelljét. Magyarai és Pantokratoras a származtatott peremérték problémát véges differenciák módszerével oldotta meg. A probléma aszimptotikus megoldását a hatványkitevő két speciális értéke esetén egzakt analitikus formában írták fel és vizsgálták a Darcy és a Forchheimer számoknak az áramlásra tett hatását.

Egyes alkalmazások szempontjából fontos a megoldásfüggvények megadása végtelen sor alakjában, amely végtelen soroktól megkívánjuk, hogy bizonyos intervallumban a sorba fejtett függvényt jól közelítsék.

A peremérték problémához megadjuk, hogy a megoldás milyen hatványsor alakban létezik és módszert adunk a hatványsorban szereplő együtthatók kiszámítására.

### 2. A PROBLÉMA MATEMATIKAI MODELLJE

Nemnewtoni hatványtörvény szerinti folyadék áramlását vizsgáljuk Darcy-Brinkman-Forchheimer porózus közegbe ágyazott vízszintes síklapon. Jelöljük a folyadék áramlási sebességének  $x$  irányú komponensét  $u$ -val,  $y$  irányú komponensét  $v$ -vel, ahol a síklap az  $x$  tengelyen helyezkedik el,  $y$  pedig az erre merőleges koordinátát jelöli. Az állandósult kétdimenziós határréteg áramlás kontinuitási- és mozgásegyenletét összenyomhatatlan nemnewtoni folyadékokra a szokásos határréteg elmélet szerinti elhanyagolások és a Forchheimer-féle tag figyelembe vételével az alábbi egyenletekkel írhatjuk le (lásd. Nield [10]):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

és

$$\frac{\rho}{\varepsilon^2} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\varepsilon^n} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\mu}{K^*} u^n - \frac{\rho C_F}{K^{1/2}} u^2, \quad (2)$$

\* egyetemi docens, Miskolci Egyetem Analízis Tanszék

\*\* egyetemi adjunktus, Miskolci Egyetem Analízis Tanszék

ahol  $p$  a nyomást,  $\varepsilon$  a porozitást,  $\mu$  a konzisztencia együtthatót,  $n$  a hatványtörvényben lévő kitevőt,  $\rho$

folyadék sűrűségét,  $K^*$  a módosított áteresztőképességet,  $K$  a normál áteresztőképességet, míg  $C_F$  a Forchheimer konstans jelöli. Ha  $0 < n < 1$ , akkor a folyadék pszeudoplasztikus,  $n > 1$  esetben dilatáló, míg  $n = 1$  esetben newtoni folyadékokról beszélhetünk. A peremfeltételek a síklapon ( $y = 0$ ):

$$u = 0, v = 0, \quad (3)$$

illetve a határréteg szélén ( $y \rightarrow \infty$ )

$$u \rightarrow u_\infty, \quad (4)$$

ahol a folyadék áramlási sebessége a határrétegen kívül  $u_\infty$ . A konstans nyomás gradienst a határréteg szélén felírt (4) feltételből határozzuk meg:

ha  $y \rightarrow \infty$ , akkor

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{K^*} u_\infty^n + \frac{\rho C_F}{K^{1/2}} u_\infty^2, \quad (5)$$

tehát a (2) egyenlet a következő alakba írható [9]:

$$\frac{\rho}{\varepsilon^2} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\mu}{\varepsilon^n} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\mu}{K^*} (u_\infty^n - u^n) + \frac{\rho C_F}{K^{1/2}} (u_\infty^2 - u^2). \quad (6)$$

Bevezetjük az alábbi dimenziómentes mennyiségeket:

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, U = \frac{u}{u_\infty}, V = \frac{v}{u_\infty}, \quad (7)$$

ahol

$$L = \left( \frac{\mu \varepsilon^{2-n} u_\infty^{n-2}}{\rho} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (8)$$

Az (1) és a (6) egyenletek dimenziómentes változókkal az alábbiak:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (9)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{n-1} \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \frac{1}{Da} (1 - U^n) + F (1 - U^2), \quad (10)$$

ahol a  $Da$  a Darcy és az  $F$  a Forchheimer számot a

$$Da = \frac{K^*}{\varepsilon^n L^{n+1}}, F = \frac{C_F \varepsilon^2}{K^{1/2}} L \quad (11)$$

kifejezésekkel értelmezzük. A (3) és (4) feltételek a dimenziómentes változókkal az

$$U(X, 0) = 0, V(X, 0) = 0, \quad (12)$$

$$U(X, \infty) = \lim_{Y \rightarrow \infty} U(X, Y) = 1 \quad (13)$$

formulákkal adhatók meg.

Feltételezzük, hogy a nemnewtoni folyadék Blasius-féle határréteg áramlásához hasonlóan a folyadék áramlás főárammal párhuzamos  $U = U(X, Y)$  sebesség komponense monoton növekszik 0-tól az 1 értékig minden  $X > 0$  esetén, miközben  $Y \rightarrow \infty$ . Tehát  $U$  deriváltja  $Y$  irányban nem negatív, azaz  $\partial U / \partial Y \geq 0$ . Így a (10) egyenlet az

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = n \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (14)$$

alakba írható. A teljesen kifejlődött áramlás esetén a belépőélnél jelentkező perturbáció hatása elhanyagolható és ekkor az  $U$  sebességkomponens csak az  $Y$  változó függvénye, továbbá  $V = 0$ . Tehát a (9) egyenlet teljesül, a (14) parciális differenciálegyenlet pedig a következő közönséges differenciálegyenlet alakot ölti:

$$n \left( \frac{dU}{dY} \right)^{n-1} \frac{d^2 U}{dY^2} + \frac{1}{Da} (1 - U^n) + F (1 - U^2) = 0. \quad (15)$$

Ezen differenciálegyenlethez tekintsük a

$$\frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = S \quad (16)$$

kezdeti feltételt, amely teljesen kifejlődött áramlás esetén

$$S = \left( (1/Da) + 2(n+1)F/3n \right)^{1/(n+1)} \quad (17)$$

(lásd [9]).

Ezen probléma megoldását implicit alakban Magyari és Pantokratoras [9] adta meg

$$Y = \int_0^U \left[ \frac{1}{nDa} (U^{n+1} - (n+1)U + n) + \frac{(n+1)F(U^3 - 3U + 2)}{3n} \right]^{-1/(n+1)} dU \quad (18)$$

alakban.

A [9] cikkben a szerzők meghatározták az  $n=1$  newtoni és az  $n=2$  dilatáló folyadék esetén az egzakt megoldást. Ha  $n \neq 1$  vagy  $n \neq 2$ , akkor a peremérték feladat megoldása zárt alakban nem ismert.

Teljesen kifejlődött áramlás esetén tetszőleges  $n$  esetén az  $U(Y)$  sebességkomponenst a felírt (15) másodrendű nemlineáris differenciálegyenletből az

$$U(0) = 0 \text{ és } \left. \frac{dU}{dY} \right|_{Y=0} = S \quad (19)$$

kezdeti feltételek mellett határozzuk meg.

### 3. HATVÁNSOR ALAKÚ MEGOLDÁS

A megoldást  $U = Y \cdot Q(Y^\alpha)$  alakban keressük, ahol az  $\alpha$  kitevő meghatározásához az [1]-ben ismertetett módszert alkalmazzuk. A hatványsor alakú megoldás létezésére a Briot-Bouquet tételt alkalmazhatjuk. A másodrendű differenciálegyenletet speciális Briot-Bouquet egyenletekből álló egyenletrendszerrel helyettesítjük, amire érvényes a következő tétel:

**3.1. Briot-Bouquet tétel:** Tegyük fel, hogy a

$$\left\{ \begin{aligned} \xi (dz_1 / d\xi) &= u_1(\xi, z_1(\xi), z_2(\xi)) \\ \xi (dz_2 / d\xi) &= u_2(\xi, z_1(\xi), z_2(\xi)) \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer esetén,  $u_1$  és  $u_2$  holomorf függvényei a  $\xi$ ,  $z_1(\xi)$  és  $z_2(\xi)$  változóknak, továbbá  $u_1(0,0,0) = u_2(0,0,0) = 0$ , akkor a fenti egyenletrendszernek létezik az origó közelében holomorf megoldása, amely kielégíti a  $z_1(0) = 0$ ,  $z_2(0) = 0$  kezdeti feltételeket feltéve, ha a

$$\begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial z_1(0,0,0) & \partial u_1 / \partial z_2(0,0,0) \\ \partial u_2 / \partial z_1(0,0,0) & \partial u_2 / \partial z_2(0,0,0) \end{bmatrix}$$

mátrix egyik sajátértéke sem pozitív egész szám.

A tétel bizonyítását lásd a [3] cikkben.

A  $U = Y \cdot Q(Y^\alpha)$  alakú megoldásokat keresve meghatározzuk az

$$U'(Y) = Q(Y^\alpha) + \alpha \cdot Y^\alpha \cdot Q'(Y^\alpha) \quad (20)$$

$$U''(Y) = \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot Y^{\alpha-1} Q'(Y^\alpha) \quad (21)$$

deriváltakat, majd a (15) egyenletbe helyettesítve kifejezzük  $Q''(Y^\alpha)$ -t.

Elvégezzük az  $Y^\alpha = \xi$  helyettesítést és feltételezzük, hogy

$$Q(\xi) = b_0 + b_1 \xi + z(\xi),$$

ahol  $z$  legalább kétszer differenciálható függvény és teljesíti a  $z(0) = 0, z'(0) = 0$  feltételeket. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{cases} z_1(\xi) = z(\xi) \\ z_2(\xi) = z'(\xi), \end{cases}$$

ahol  $z_1(0) = 0$  és  $z_2(0) = 0$ . Ezek után legyenek az  $u_1$  és  $u_2$  függvények:

$$\begin{cases} u_1(\xi, z_1, z_2) = \xi \cdot z_2 \\ u_2(\xi, z_1, z_2) = \xi \cdot z_2' = \xi \cdot Q''(\xi). \end{cases}$$

A (15) differenciálegyenletből az  $U = Y \cdot Q(Y^\alpha)$  helyettesítéssel a

$$Q''(\xi) = -\frac{\xi^{1-2\alpha}}{n\alpha^2 [Q(\xi) + \alpha\xi Q'(\xi)]^{n-1}} \left[ \frac{1}{Da} \left( 1 - \xi^\alpha Q^n(\xi) \right) + F \left( 1 - \xi^\alpha Q^2(\xi) \right) \right] - \frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\xi} Q'(\xi)$$

összefüggést kapjuk.

A Briot-Bouquet tételben szereplő  $u_1(0,0,0) = 0$ ,  $u_2(0,0,0) = 0$  feltételek csak akkor teljesülhetnek, ha

$$-\frac{\xi^{\frac{1}{\alpha}-1}}{n \cdot \alpha^2 \cdot b_0^{n-1}} \left[ \frac{1}{Da} + F \right] - \frac{\alpha+1}{\alpha} b_1 = 0,$$

azaz  $(1/\alpha) - 1 = 0$ , és innen  $\alpha = 1$ . Az  $u_2(0,0,0) = 0$  megkötésből

$$b_1 = -\frac{\frac{1}{Da} + F}{\alpha(\alpha+1)b_0^{n-1}}$$

adódik. Tehát  $\alpha = 1$  esetén a

$$b_1 = -\frac{\frac{1}{Da} + F}{2b_0^{n-1}}$$

összefüggés érvényes. Az  $U'(0) = Q(0) = b_0$  kezdeti feltételt figyelembe véve (16)-tal

$$b_0 = S.$$

Mivel így a Briot-Bouquet tétel feltételei a (15) differenciálegyenletre a (19) kezdeti feltételekkel teljesülnek  $b_0$  és  $b_1$  megfelelő megválasztásával, ezért a Briot-Bouquet differenciálegyenlet rendszernek létezik  $z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k$  és  $z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi^k$  alakú megoldása.

A (15), (19) kezdetiérték probléma megoldásainak hatványsora tehát

$$U = Y \sum_{i=0}^{\infty} b_i Y^i = b_0 Y + b_1 Y^2 + b_2 Y^3 + \dots \quad (22)$$

alakban kereshető.

Ezek után meghatározzuk a még ismeretlen együtthatókat. Az

$$U' = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)b_i Y^i = b_0 + 2b_1 Y + 3b_2 Y^2 + \dots,$$

$$U'' = \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)b_j Y^{j-1} = 2b_1 + 6b_2 Y + 12b_3 Y^2 + \dots,$$

deriváltakat a (15) differenciálegyenletbe helyettesítjük. Ahhoz, hogy megadjuk a  $b_i$  együtthatókat, ha  $i \geq 2$ , a J.C.P. Miller [5] formulát alkalmazzuk, majd az egyenlet két oldalán a megfelelő kitevőjű tagok együtthatóit összehasonlítva a (22) kifejezésben lévő  $b_2, b_3, b_4, \dots$  együtthatók a kapott rekurzív formulákból előállíthatók.

#### 4. ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozatban hatványtörvény szerinti nemnewtoni közeg vízszintes síklap feletti kényszeráramlását leíró differenciálegyenlet rendszer hatványsor alakú megoldásának létezését mutattuk meg, ha a lap Darcy-Brinkman-Forchheimer porózus közegbe van beágyazva.

Megadtuk, hogy a folytonossági- és mozgásegyenletekből származtatott az áramló közeg síklappal párhuzamos  $U$  sebesség komponensére vonatkozó közönséges differenciálegyenlet  $U = Y \cdot Q(Y)$  alakú megoldásai mikor elégítik ki a kezdetiérték feltételeket. A Briot-Bouquet-tétel alapján kiszámított  $b_0$  és  $b_1$  együtthatókon kívül a J.C.P. Miller formulával a

$$U = Y \sum_{i=0}^{\infty} b_i Y^i$$

hatványsorban szereplő  $b_2, b_3, b_4, \dots$  együtthatók rekurzív formulákkal előállíthatók.

#### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A publikáció a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként - az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében - az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

#### IRODALOM

- [1] Bognár, G. (2008) Local analytic solutions to some nonhomogeneous problems with  $p$ -Laplacian, *Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, pp.:1-8.
- [2] Bognár, G., Rozgonyi, E. (2006) The power series solutions of some nonlinear initial value problems, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **6**, pp.: 627-635.
- [3] Briot, CH., Bouquet, J.K. (1856) Etude des fonctions d'une variable imaginaire, *Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier* **36**, pp.:85-131.
- [4] Hady, F.M., Ibrahim, F.S. (1997) Forced convection heat transfer on a flat plate embedded in porous media for power-law fluids. *Transport Porous Med.* **28**, pp.:125-134.
- [5] Henrici, P. (1974) Applied and computational complex analysis, Power series integration-conformal mappings-location of zeros. Wiley, New York-London-Sydney-Toronto.
- [6] Hooman, K. (2008) A perturbation solution for forced convection in a porous saturated duct. *J. Comput. Appl. Math.* **211**, pp.:57-66.
- [7] Hsu, C.T., Cheng, P. (1990) Thermal dispersion in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transf.* **33**, pp.:1587-1597.
- [8] Joseph, D.D., Nield, D.A., Papanicolaou, G. (1982) Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium *Water Resour. Res.*, **18**, pp.:1049-1052.
- [9] Magyari, E., Pantokratoras, A. (2010) Forced convection flow of power-law fluids over a flat plate embedded in a Darcy-Brinkman porous medium. *Transp. Porous Med.* **85**, pp.: 143-155.
- [10] Nield, D.A., Bejan, A. (2006) *Convection in porous media*, 3<sup>rd</sup> ed. Springer, New York.
- [11] Poulidakos, D., Renken, K. (1987) Forced convection in a channel filled with porous medium, including the effect of flow inertia, variable porosity and Brinkman friction. *ASME J. Heat Transf.* **109**, pp.: 880-888.
- [12] Shenoy, A.V. (1994) Non-newtonian fluid heat transfer in porous media. *Adv. Heat Trans.* **24**, pp.:101-190.