A YANG-BAXTER EGYENLET NÉHÁNY MEGOLDÁSÁNAK GRAFIKUS REPREZENTÁCIÓJA

Graphical representations of certain solutions of the Yang-Baxter equation

*Varga Péter**

ABSTRACT

The Yang-Baxter equation is a basic equation of the theory of integrable system. It was realized later, that it can be interpreted as an invariance principle of certain structures under the third Redemeister move of knot theory. This observation made it possible to interpret certain algebraic equations as the topological invariance of certain drawings of knots or braids. We extend that framework by adding strings that are cut at certain points. That allows us to provide a graphical interpretation for certain solutions of the Yang-Baxter equation. Our approach also motivates the introduction of a generalization of the Temperley-Lieb algebra.

1. BEVEZETÉS

A Yang-Baxter egyenlet az egzaktul megoldható kétdimenziós matematikai fizikai rendszerek elméletének az egyik sarokköve. Eredetileg a kétdimenziós Ising model (ami a mágnesesességnek egy idealizált modelje) bukkant fel Onsager [1] híres munkájában. Az egyenlet további vizsgálata a kezdeti időkben leginkább Yang [2] és Baxter [3] nevéhez köthető. Ők további alkalmazásait fejlesztették ki ennek az egyenletnek az egydimenziós kvantummechanikai rendszerek, illetve a kétdimenziós, egy rácson megadott statisztikus mechanika rendszerek esetében. Eleinte az egyenletet egy nagyon komplikált harmadfokú sokismeretlenes egyenletnek tekintették, aminek a megoldásait ad hoc számításokkal származtatták. Később felfedezték, hogy az egyenlet legintuitívabb interpretációja a csomóelmélet keretében adható meg. (Itt megjegyezzük, hogy ez szigorúan véve csak az úgynevezett sprektrális paraméter nélküli esetben igaz. Mi a továbbiakban ezzel az esettel foglalkozunk míg bizonyos alkalmazások az általánosabb eset vizsgálatát is megkövetelik.) Kiderült, hogy az ismeretlen, tradicionálisan R-nek nevezett mátrixra vonatkozó tenzoriális kommutációs reláció nem más, mint csomóelméletből ismert úgynevezett harmadik Redemeister [4] lépés algebrai interpretációja. Ebben a keretben sikerült például a csomók Jones polinomját (ami eredetileg a von Neumann algebrák elméletében merült fel [5]) egy teljesen elemi, grafikusan is ábrázolható módon interpretálni [6]. Mivel a Yang-Baxter egyenlet ezeken a területeken kívül is fontos szerepet, játszik (itt elsősorban a kvantum csoportok és a Hopf algebrák elméletét érdeme kiemelni [7,8]), meglehetősen komoly erőfeszítések irányultak az egyenlet megoldásainak a megkeresése felé. Mivel azonban az R mátrix egy n^4 ismeretlent tartalmazó objektum, a megoldások teljes klasszifikációja csak az n=2 esetben járt teljes sikerrel [9]. Mi több, a megoldások reprezentációja vagy interpretációja sokszor legalább olyan fontos (mint ezt a [9] dolgozat hangsúlyozza), mint azok megkeresése. Ebből a szempontból a legelegánsabb eredmények Kaufmann nevéhez fűződnek [13], akinek sikerült igen komplikált csomóelméleti vagy algebrai számításokat grafikus manipulációkká alakítani.

Mi ezt a tradíciót kívánjuk követni a dolgozatunkban. Megvizsgájuk, hogy mi történik, ha a csomóelméleti ábrákon megengedjük azt, hogy a csomót reprezentáló görbék elszakadjanak, ne legyenek folytonosak. Ez kibővíti a grafikusan ábrázolható megoldások körét. Mi több, ez a megközelítés motiválhatja néhány algebra általánosítását, itt leginkább a Temperley-Lieb [10], és a Birman-Murakami-Wenzl [11,12] algebrák jöhetnek számításba. A következőekben először az összehasomlítás kedvéért felidézzük a Yang-Baxter egyenletnek azt a megoldását, amelyet a Temperely-Lieb algebra szolgáltat, illetve szintén megadjuk ennek a jól ismert grafikus jelentését. Ezután megnézzük, hogyn módosul ez a séma , ha a Temperley-Lieb algebra ábrázolásához használt félköröket és szakaszokat estelegesen megszakadt vonalakkal helyetesítjük. Egy egyszerű esteben explicit módon is elvégezzük azt a kalkulációt, ami a Yang-Baxter egyenlet teljesülését biztosítja. Az általánosabb eset vizsgálatához

* *egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék*

szimbólikus algebrai csomagot használunk. Végezetűl megjegyezzük, hogy az így kapott grafikus kalkulus egy természetes kiterjesztését adja meg például a Temperely-Lieb algebrának.

.

2. GRAFIKUS KALKULUS ÉS A CSOMÓELMÉLET

Először is idézzük fel a Yang-Baxter egyenlet definícióját. Legyen R egy n^4 méretű mátrix, amihez a következő lineáris transzformáció tartozik:

$$R: V \times V \text{ -> } V \times V$$

Itt V egy n dimenziós vektortér, vagyis R a V vektortér önmagával vett direkt szorzatán hat.. Legyen továbbá R_{12} és R_{23} a következő:

$$R_{AB} : V \times V \times V \text{ -> } V \times V \times V$$

$$R_{12}=R \times id, \qquad R_{23}=id \times R.$$

Ekkor a Yang-Baxter egyenlet a következő lesz:

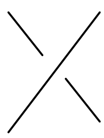
$$R_{12}\, R_{23}\, R_{12} = R_{23}\, R_{12}\, R_{23.}$$

Ez a reláció nem más, mint az Artin féle fonatcsoportból jól ismert nemtriviális kommutációs reláció megfelelője:

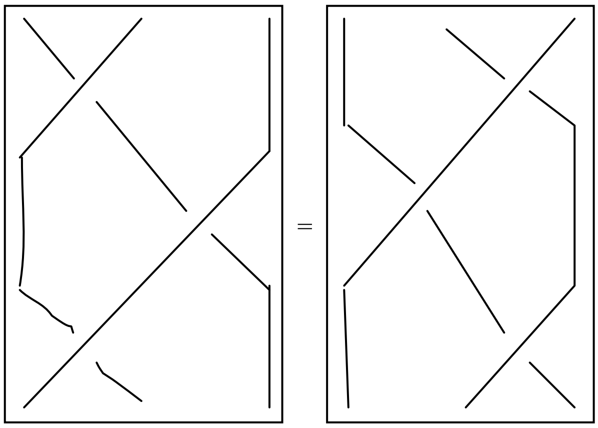
$$s_i \;\; s_{i+1} \;\; s_i = s_{i+1} \;\; s_i \;\; s_{i+1}.$$

Itt s_i a fonat i-edik és az (i+1)-edik szálainak kereszteződését jelöli. Tehét a Yang-Baxter egyenlet megoldásai reprezentálják az Artin féle kommutációs relációt, ha pedig az R mátrix invertálható, akkor a fontacsoprt reprezentációja is megkonstruálható belőlük. Ennek alapján a következő megfeleltetés állítható fel:

R =

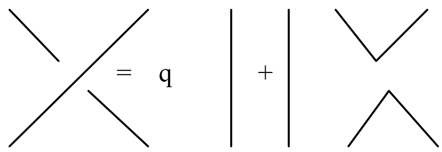


Itt úgy gondolunk a vonalak végpontjaira, mint amelyekhez hozzá van rendelve V egy kópiája, a tenzorszorzatot pedig a vízszintesen egymás mellett elhelyezkedő végpontok reprezentálják.
Ez a megfeletetés lehetővé teszi a Yang-Baxter egyenletnek a következő formájú grafikus interpretációját:



Ez nem más, mint a csomóelméletből ismert harmadik Redemeister féle lépés, ha az itt látható vonalakat térben képzeljük el, akkor ez a lépés nyilvánvalóan folytonosan elvégezhető a vonalak elvágása nélkül.

A Yang-Baxter egyenletnek talán a leghíresebb megodása (ez reprodukálja a Jones polinomot, illetve ez merűl fel az SL(2) csoport kvanum verziójában is) a következőképpen ábrázolható a grafikus kalkulus seítségével. Rendeljuk hozzá az R mátroxhpz, vagyis egy kereszteződéshez a kovetkező szimbőlumok súlyozott összegét:

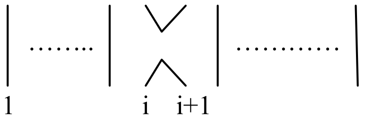


Ekkor az előző két ábra mindegyikén a három kereszteződés (mivel mindegyik esetében két variáció van) szétesik 8 darabra, amelyek kőzűl nemelyik egy zárt hatszöget (hurkot) is tartalmaz is tartalmaz. Ha a hurokhoz az u skaláris szorzófaktort rendeljük hozzá, akkor a jobb és bal oldali ábrák szorzófaktorai megegyeznek. mégpedig abban az értelemben, hogy két ábra ekvivalens, ha az alul és felül elhelyezkedő pontok ugyanazon módon vannak összekötve. Ezek az ábrák természetesen átkonvertálhatók mátrixokká is. Ekkor egy függőleges vonaldarabhoz a Kronecker delta mátrix tartozik, míg egy v alakhoz egy tetszőleges M_{ab} mátrix tartozik. Annak az érdekében, hogy egy v és egy forditott v kompozíciójaához az identikus mátrix tartozzon, a fordított v-hez M inverzét kell rendelnünk. Ekkor egy zárt hurokhoz az

$$u = Tr(M^T M^{-1})$$

faktor rendelődik hozzá.

Ezekhez a konstrukciókhoz hozzárendelhető egy érdekes algebrai struktúra, a Temperley-Lieb algebra. Ennek az elemeit a következő grafikus szimbólumok generálják:

U_i = 

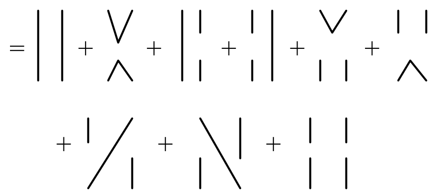
Ez kielégíti a az alapvető

$$U_i^2 = u\,U$$

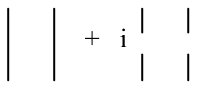
relációt, plusz további relációkat is, amelyeket ezenek az ábráknak a csatlakoztatása generál [10].

Mi a következőképpen próbájuk kiterjeszteni ezt a kalkulust. Az R mátrixot megprobáljuk felírni olyan grafikus szimbólumok formális lineáris kombinációjaként, amely ábrák elszakadt vonalakat is tartalmaznak. Vagyis

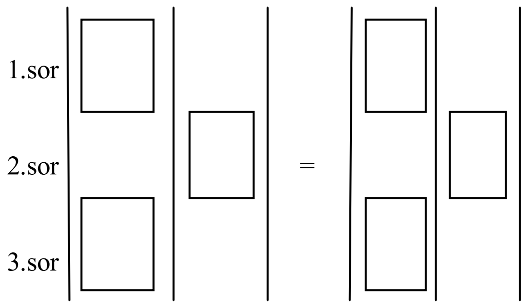
R=  = A+B+C+D+E+F+G+H+J



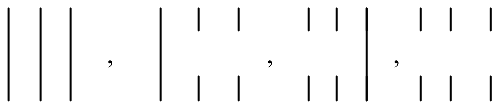
Itt az egyes szimbólumok együtthatóit nem írtuk ki. Ezek után feltehető az a kérdés, hogy milyen együtthatóválasztás esetén teljesül a Yang-Bater egyenlet. Teljes általánosságban ez a kérdés persze csak terjedelmes, számítógépes algebrai számításokkal válaszolható meg, azonban néhány egyszerű esetben a kalkulációk kézzel is elvégezhetőek. Vegyük azt a redukált esetet, amikor csak az első és az utolsó tagoknak van nem nulla együtthatója:

R=A+iI= 

Helyettesítsünk most be ezt a két szimbólumot a Yang-Baxter egyenlet grafikus reprezentációjainak a kereszteződéseket tartalmazó helyeire. Ekkor az alábbi ábrák mindegyike nyolc további ábrát generál.



Itt az ábrán látható négyzetek mindegyikébe vagy az A vagy a I szimbólumot írhatjuk. Összesen négyféle összekapcsolódási mintázat jöhet létre az alsó és afelső három pont között:



Rendeljünk továbbá miden szabad szakaszdarabhoz egy v szorzófaktort. Ekkor a baloldali YB ábrán ennek a négy konfigurációnak a súlyfaktorai

$$1, \qquad i, \qquad i^2v^2+2i, \quad 2i^3v^2+i^2$$

lesznek. Ugyanez a jobboldali ábrán

$$1, \qquad i^2v^2+2i, \qquad i, \qquad 2i^3v^2+i^2$$

lesz. Ennek alapján azt kapjuk, hogy

$$i=-1/v^2,$$

vagyis ezen választás mellett teljesül a Yang-Baxter egyenlet. Hogyan tudjuk ezt, vagy az ehhez hasonló, szabad végpontokat is tartalmazó megoldást numerikus R mátrixszá konvertálni? Ennek érdekében egy alappont-végpont vonalhoz rendeljük hozzá a vKroneckerDelta(0,a) mátrixelemet.

Bonyolultabb, több paramétert is tartalmazó R mátrix esetén ezek a számítások persze egyre hosszabbá válnak. Itt már célszerű a szimbólikus algebrai csomagok használat. Mi egy Mathematikában lekódolt program segítségével kerestük a Yang-Baxter egyenlet

$$R=A+bB+cC+cD+dE+dF+eG+eH+fI$$

alakú megoldásait. Az egyenletek megoldása nem ütközött különösebb nehézségbe, mi itt felsorolunk néhányat a kapott megoldások közül.

a) $b=0, v=0,$
$f=-2 c^2 - 4 c d - 4 c e - 4 d e - 2 e^2 - d^2 u.$
b) $u=(-1 - b^2)/b, v=0.$
c) $b=0, v=0, d=0, f=-2 (c^2 + 2 c e + e^2).$
d) $b=0, c=-(1/v), d=0.$
e) $b=0, v=0, d=0, e=0, f=-2 c^2.$
f) $u=(-1 - b^2)/b, v=0, c=0,$
$f=3 b d^2 + 5 b d e + 2 b e^2 + 3 d^2 u + 5 d e u + 2 e^2 u.$
g) $u== ((-1 + b - b^2)/b), c=-(1/v), d=b c, e=0.$
h) $u=(-1 - b^2)/b, v=0, c=0, e=-2 d,$
$f=b d^2 + (d^2).$
i) $u=(-1 + 2 b - b^2)/b, c=0, d=-((1 + I) b)/v,$
$e=0, f=2 d^2 - b d^2 - d^2 u.$

Az általánosabb eset vizsgálata valószínűleg csak specializáltabb egyenletmegoldó programok segítségével lenne lehetséges. További vizsgálatokat igényelne az a kérdés is, hogy mely megoldások hasonlóak (lineáris algebrai értelemben) egymáshoz.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A Yang-Baxter egyenlet megoldásait vizsgáltuk egy, a csomóelmélethez kapcsolódó grafikus kalkulus segítségével. Ezt, a téma irodalmában sokat vizsgált módszert azzal az ötlettel bővítettük ki, hogy olyan ábrákat is használtunk, ahol megengedtük, hogy a Yang-Baxter egyenletet reprezentáló csomóelméleti ábrákon megengedtük a szálak elszakadását. Az így kapott ábrák vizsgálatát egy viszonylag egyszerű esetben kézzel, bonyolultabb estekben számítógéppel végeztük el.

KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

A tanulmány a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként - az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében - az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg. A kutatást az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok támogatta az OTKA T 75678 számú projekt keretében.

IRODALOM

[1]Onsager L (1971) The Ising model in twodimensions. In: Mills RE, Ascher E. and Jaffee RI.. (eds) Critical phenomena in alloys, magnets and superconductors, pp xix–xxiv, 3–12. McGraw-Hill, New York.

[2] Yang CN (1967) Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. Phys. Rev. Lett.19: 1312–1314.

[3] Baxter RJ (1982) Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic Press, London.

[4] Reidemeister K (1926) Knoten und Gruppen. Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 5: 7–23. Elementare Begr¨undung der Knotentheorie. ibid. 24–32.

[5]Louis H. Kauffman, State models and the Jones polynomial. Topology 26 (1987), no. 3, 395—407.

[6] Louis H. Kauffman, Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds, with Sostenes Links, Princeton University Press, 312 pp, 1994.

[7] Kassel, Christian (1995), Quantum groups, Graduate Texts in Mathematics, 155, Berlin, New York: Springer-Verlag

[8] Dăscălescu, Sorin; Năstăsescu, Constantin; Raianu, Şerban (2001), Hopf Algebras, Pure and Applied Mathematics, 235 (1st ed.), Marcel Dekker,

[9] J. Hietarinta: All solutions to the constant quantum Yang-Baxter equation in two dimensions, Phys. Lett. A 165, 245-251 (1992).

[10] N. Temperley, E. Lieb, Relations between the percolation and colouring problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem. Proceedings of the Royal Soc. SeriesA322(1971),25.280.

[11] Birman, Joan S.; Wenzl, Hans (1989), "Braids, link polynomials and a new algebra", Transactions of the American Mathematical Society
(American Mathematical Society) 313 (1): 249–273,

[12] Murakami, Jun (1987), "The Kauffman polynomial of links and representation theory", Osaka Journal of Mathematics 24 (4): 745–758