

NÉHÁNY ÁLTALÁNOSÍTOTT TODA RÁCS MÓDOSÍTOTT LAX REPEZENTÁCIÓJA

MODIFIED LAX REPRESENTATION OF CERTAIN GENERALIZED TODA CHAINS

Varga Péter*

ABSTRACT

We present a modified Lax pair representation of certain generalized Toda chains. We use a scheme of Drinfeld and Sokolov that replaces the usual commutator of matrices by a more general expression. We apply a reduction of their general setting to rederive the equation of motion of certain Toda chains. Our method uses (in some sense) smaller groups for the description of these dynamical systems.

1. BEVEZETÉS

A teljesen integrálható dinamikai rendszerek elméletének egyik alapvető dolgozata [1], ahol Lax Péter egy mátrix (vagy egy differenciáloperátor) mozgásegyenletét az

$$L' = LP - PL = [L, P]$$

alakban írta fel. Ez az L operátor infinitezimális hasonlósági transzformációja, így megőrzi L spektrális invariánsait. Ennek a sémának egy általánosítását adta meg Drinfeld és Sokolov [2], akik az $L=AB$ szorzat hasonlósági transzformációjának az A és a B mátrixokra való hatását vizsgálták. Konkrét eseteit ennek a módszernek Dodd-Fordy és Hirota-Satsuma tanulmányozta [3,4]. Egy régebbi dolgozatom [5] azt a kérdést vizsgálta, hogy mi történik akkor, ha A és B egymás adjungáltjai, vagyis $A^*=B$. A fent említett munkák mindegyike parciális differenciálegyenleteket írt le, míg a jelenlegi dolgozatom a közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozik az úgynevezett Toda [6,7,8] rácsok esetében. Miután az összehasonlítás végett felírjuk az A_3 rács Lax párját és mozgásegyenletét, megmutatjuk, hogy egy két oszloppal kibővített L mátrix segítségével megkapható például a B_3 (az egyik ortogonális csoporthoz tartozó) Toda rács. Az irodalomban általánosan használt reprezentáció megduplázná a mátrix méretét.

2. MÓDOSÍTOTT LAX PÁROK

Jól ismert, hogy az

$$L' = LP - PL = [L, P]$$

egyenlet az

$$L(0) \rightarrow \exp(-tP) L(0) \exp(tP)$$

hasonlósági transzformáció infinitezimális alakja. Ez biztosítja, hogy L és hatványainak a nyomai időben állandóak, megmaradó mennyiségek. Nézzük most az általánosított

$$L \rightarrow \exp(-tB) L \exp(tA)$$

transzformációt.

Tekintsük most az LL^T időbeli változását:

$$LL^T \rightarrow \exp(-tB) L \exp(tA) \exp(tA^T) L^T \exp(-tB^T)$$

Ez továbbra is hasonlósági transzformáció marad, ha B transzponáltja $-B$, illetve, ha $A^T=-A$, hiszen ekkor az L és az L^T közötti tag 1. Jegyezzük meg, hogy bár az A és B mátrixoknak kötelező négyzet alakúaknak lenniük, az L mátrix nyugodtan lehet téglalap alakú is. Hasonló érvelés alkalmazható az $L^T L$ szorzat esetében is, de ez a mi szempontunkból nem vezet új megmaradó mennyiségek létezéséhez, hiszen pl. $\text{Tr}(LL^T)=\text{Tr}(L^T L)$.

Mindezek alapján levonhatjuk a következtetést, hogy ha egy L mátrix kielégíti a következő egyenleteket:

$$L' = LA - BL, \quad A = -A^T, \quad B = -B^T,$$

akkor az $L^T L$ szorzat sajátértékei megmaradó mennyiségek. Természetesen a megmaradó mennyiségek száma általában csekély a mátrix elemeinek a számához képest, így csak a megfelelően választott L , A , B hármas esetén kapunk teljesen integrálható rendszert.

* egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék

Ez az eljárás egy speciális esete Drinfeld és Sokolov általánosabb sémájának [2]. Ők az MN sorozat izospektrális deformációit vizsgálták. megfigyelték, hogy ha

$$MN \rightarrow \exp(-tB) M \exp(tA) \exp(-tA) N \exp(tB),$$

akkor M és N mozgásegyenletei

$$M' = MA - BM, N' = NB - AN.$$

Ennek a sémának a fentebb leírt variánásán kívül más lehetőségek is vannak, például vizsgálható az LL^* , az LL^{T-1} , LL^{*-1} operátorok izospektrális deformációja is [5].

3. EGY TODA RÁCS ÉS ANNAK STANDARD LAX PÁRJA

A legegyszerűbb példa a Toda rácsokra az A_N sorozat. Ennek tagjainak a mozgásegyenlete a következő:

$$q_{ij} = \exp(x_i - x_j), p_i = x'_i, \\ p'_i = x''_i = -q_{i,i+1}^2 + q_{i-1,i}^2,$$

kivéve az első és az utolsó tagokat, ahol az egyik négyzet értelemszerűen hiányzik (itt $i=1..N$).

Ennek az egyenletnek a Lax reprezentációja az $N=3$ esetben a következő:

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & q_{12} & 0 \\ q_{12} & p_2 & q_{23} \\ 0 & q_{23} & p_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 \\ -q_{12} & 0 & q_{23} \\ 0 & -q_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

A két mátrix $L^2=LA-AL$ kommutátora:

$$L' = \begin{pmatrix} -2q_{12}^2 & p_1q_{12}-p_2q_{12} & 0 \\ p_1q_{12}-p_2q_{12} & 2q_{12}^2-2q_{23}^2 & p_2q_{23}-p_3q_{23} \\ 0 & p_2q_{23}-p_3q_{23} & 2q_{23}^2 \end{pmatrix}$$

Ez pontosan a fentebb leírt mozgásegyenleteket szolgáltatja. Ennek a konstrukciónak többféle általánosítása is létezik [6,7,8]. Ezek nagy része Lie-algebrái eszközöket használ, aminek következtében megváltozik a rács végpontjaiban lévő részecskék dinamikája. A legáltalánosabb végponti dinamika Izmontsev [9] nevéhez fűződik, azonban azt lehet

mondani, hogy a leghatékonyabb eljárásnak a végponti dinamika generálásához a Sklyanin [10] által kidolgozott tükrözési R métrix nevezhető. A következőekben leírunk egy eljárást, amivel az így kapott mozgásegyenleteknek egy részalmlaza reprodukálható.

4. EGY ÁLTALÁNOSÍTOTT TODA RÁCS ÉS ANNAK NEM STANDARD LAX PÁRJA

Bővítsük az L mátrixunkat két extra oszloppal a következő módon:

$$L = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & q_{12} & 0 & 0 \\ 0 & q_{12} & p_2 & q_{23} & 0 \\ 0 & 0 & q_{23} & p_3 & q_3 \end{pmatrix}$$

Válasszuk a következő két antiszimmetrikus mátrixot A és B szerepébe:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ -q_1 & 0 & q_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -q_{12} & 0 & q_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -q_{23} & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & -q_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 \\ -q_{12} & 0 & q_{23} \\ 0 & -q_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Ekkor a módosított Lax egyenlet a következő alakú lesz:

$$L' = \begin{pmatrix} -p_1q_1 & q_1^2-2q_{12}^2 & p_1q_{12}-p_2q_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_1q_{12}-p_2q_{12} & 2q_{12}^2-2q_{23}^2 & p_2q_{23}-p_3q_{23} & 0 \\ 0 & 0 & p_2q_{23}-p_3q_{23} & 2q_{23}^2-q_3^2 & p_3q_3 \end{pmatrix}$$

Az extra q_1 és q_2 mennyiségeket a következő egyenlet határozza meg:

$$q_1 = \exp(-x_1), p_1 = x'_1, \\ q_3 = \exp(x_3), p_3 = x'_3.$$

Látható, hogy a végpontok, vagyis $x_{1,3}$ dinamikája megváltozott, azok alakja most

$$p'_1 = x''_1 = -q_{1,2}^2 + q_1^2, \\ p'_3 = x''_3 = -q_3^2 + q_{23}^2.$$

Ha csak az utolsó oszloppal végeztük volna el a bővítést, akkor pontosan a B_3 néven ismert, az egyik

ortogonális csoporthoz tartozó Toda rácsot kapnánk. Az itt leírt konstrukció viszont lehetőséget ad arra, hogy ugyanezt a dinamikai rendszert az A_3 Lie algebra segítségével konstruáljuk meg. Mi több, a mindkét végén kibővített rácsok csoportelméleti leírása meglehetősen komplikált, így az itt ismertetett konstrukció alkalmas arra, hogy néhány eset tárgyalását egyesítse. Természetesen hangsúlyozzuk, hogy a Skylanin féle végpontbeli reflexiók mátrixok elmélete általánosabb rendszerek megkonstruálását is lehetővé teszi. Mi a példáinkat a három dimenziós esetben írtuk le, ezek általánosítása tetszőleges dimenziókra legfeljebb jelölésbeli nehézségekkel járna.

A következőekben megpróbálkozunk az itt leírt eljárás egy további általánosításával, azonban, mint az később ki fog derülni, ilyen módon már lényegében nem kapunk új dinamikai rendszereket. Felbuzdulva az eddigi eredményeinken, próbáljuk meg az A_4 rács standard Lax mátrixa jobb szélét két extra oszloppal bővíteni, vagyis legyen L a következő alakú:

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & p_2 & q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{23} & p_3 & q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{34} & p_4 & a & d \end{pmatrix}$$

Ezzel a formával összhangban válasszuk A -t a következő mátrixnak:

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{12} & 0 & q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_{23} & 0 & q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_{34} & 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & -d & -p_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Továbbá legyen a B mátrix formája

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 \\ -q_{12} & 0 & q_{23} & 0 \\ 0 & -q_{23} & 0 & q_{34} \\ 0 & 0 & -q_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

Ekkor az

$$L' = LA - BL,$$

kommutátorra a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{pmatrix} -2q_{12}^2 & p_1q_{12} - p_2q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1q_{12} - p_2q_{12} & 2q_{12}^2 - 2q_{23}^2 & p_2q_{23} - p_3q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2q_{23} - p_3q_{23} & 2q_{23}^2 - 2q_{34}^2 & p_3q_{34} - p_4q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3q_{34} - p_4q_{34} & -a^2 - d^2 + 2q_{34}^2 & ap_4 - dp_4 & ap_4 + dp_4 \end{pmatrix}$$

A legszó két nem nulla eleme ennek a mátrixnak a következő differenciálegyenleteket adja a két ismeretlen a és b függvényekre:

$$a'(x) = a(x) - d(x), d'(x) = a(x) + d(x).$$

Ennek az egyenletrendszernek a legáltalánosabb megoldása

$$\begin{aligned} a(x) &= \exp(x) (u \cos(x) + v \sin(x)), \\ d(x) &= \exp(x) (v \cos(x) - u \sin(x)). \end{aligned}$$

Mivel az $x''_4 = p'_4$ gyorsulást leíró mátrixelemben a következő extra tag: $-d^2 - a^2$ jelenik meg, ami egyenlő $\exp(x)$ többszörösével, így az így kapott dinamikát lehetséges a „d” oszlop hozzáadása nélkül is generálni. Mindazonáltal az itt leírt módszer többféle irányban is általánosítható. Sikerült az $Sp(2n)$ szimplektikus csoporthoz tartozó standard Lax párt úgy módosítani, hogy a végpontokban az Izmotsev féle általánosított Toda rácsoknál megjelenő inverz koszinusz hiperbolikus potenciál hasson. Ezt egy későbbi dolgozatban tervezzük publikálni.

A Lax pár létezése természetesen csak a nagyszámú megmaradó mennyiség létezését garantálja, a Liouville féle teljes integrálhatóságot ez önmagában még nem biztosítja. A Lax párok klasszikus elméletében a teljes integrálhatóság, vagyis az eset, amikor a független megmaradó mennyiségek száma egyenlő a fázisér dimenziójának a felével és ezek Poisson zárójel mind nulla egymással, a leeffektívebben a következő tétel segítségével bizonyítható.

Tétel []: Ha létezik olyan r mátrix, hogy

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2],$$

akkor a $\text{Tr}(L^n)$ mennyiségek Poisson zárójel nulla.

Ezt a tételt a következőképpen módosítottuk:

Létezzenek olyan l és r mátrixok, hogy

$$\{L_1, L_2\} = (l_{12} L_1 - L_1 r_{12}) - (l_{21} L_2 - L_2 r_{21}).$$

Ekkor a

$$H_n = \text{Tr}(LL^T)$$

mennyiségek Poisson zárójelle egymással nulla.

Ennek a tételnek az alkalmazása további kutatások tárgyát képezi.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A Drinfeld és Sokolov által kidolgozott módosított Lax párok elméletét a közönséges differenciálegyenletek elméletében, az általánosított Toda rácsok esetében alkalmaztuk. Ezen a módon sikerült néhány esetben alternatív, egyszerűbb, kisebb méretű Lax reprezentációt találnunk. Többek között sikerült a B_n típusú rácsokat az A_n rácsokhoz hasonló mátrixokkal reprezentálni. Végezetül megadtunk egy tételt, amelynek segítségével alternatív bizonyítás adható bizonyos rácsok Liouville féle integrálhatóságára.

KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

A tanulmány a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként - az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében - az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg. A kutatást az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok támogatta az OTKA T 75678 számú projekt keretében.

IRODALOM

- [1] Lax, P. (1968), "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Comm. Pure Applied Math.* 21 (5): 467–490
- [2] Drinfeld, V.G.; Sokolov, V.V. Lie algebras and equations of KortewegdeVries type. (Russian) *Current problems in mathematics*, Vol. 24, 81–180, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984.
- [3] R.K. Dodd and A.P. Fordy, On the integrability of a system of coupled KdV equations. *Phys.Letts. A* , 89 168-70, 1982.
- [4] W. Oevel, On the integrability of the Hirota-Satsuma system, *Physics Letters A*, Volume 94, Issue 9, 4 April 1983, Pages 404–407.

[5] Péter Varga, Unitary deformations and complex soliton equations, *J. Math. Phys.* 40, 3404 (1999)

[6] Toda, Morikazu (1989), *Theory of Nonlinear Lattices* (2 ed.), Berlin: Springer ISBN 978-0387102245

[7] Bertram Kostant. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory. *Adv. in Math.*, 34(3):195–338, 1979.

[8] M. Olshanetsky, A. Perelomov, Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras, *Physics Reports*, v.71 (1981), 313-400

[9] Inozemtsev V.I., The finite Toda lattices, *Comm. Math. Phys.* 121 (1989), 629-638.

[10] E.K. Sklyanin, Boundary conditions for integrable quantum systems, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 21, 2375-2389, (1988).