

# A "DOUBLE-LINEAR" FUZZY INTERPOLÁCIÓS MÓDSZER KITERJESZTÉSE A FUZZISÁG INTERPOLÁCIÓJÁVAL

## EXTENDING THE "DOUBLE-LINEAR" FUZZY INTERPOLATION METHOD WITH THE INTERPOLATION OF FUZZINESS

*Kovács Szilveszter*\*

### ABSTRACT

*Most Fuzzy Rule Interpolation (FRI) methods have difficulties in describing the changes of the conclusion's fuzziness. For example, it is difficult to describe cases in which the conclusion for a crisp observation must be fuzzy, or in which an increase in the fuzziness of an observation yields less fuzziness in the conclusion. This problem is mainly inherited from a lack of information in the model, and originates from the deficiency of the fuzzy rule representation. In this paper, a novel rule representation concept called "double fuzzy dot" is suggested, which helps the elaboration of FRI methods in order to be able to better handle the fuzziness of the conclusion. A simple example of such FRI methods is also briefly introduced in this paper.*

### 1. BEVEZETÉS

A fuzzy interpolációs (Fuzzy Rule Interpolation - FRI) következtetési módszerek alapvető problémája, hogy nehézkesen kezelik a következmény fuzzy halmaz fuzziságának változását. Ilyen eset például amikor crisp megfigyeléshez fuzzy halmaz tartozik, vagy az, amikor a megfigyelés halmaz fuzziságának növekedése a következmény halmaz fuzziságának csökkenését kell, hogy eredményezze. A probléma gyökere az információ hiányban, a fuzzy szabályok „fuzzy pont” tudásábrázolási formájában rejlik. Megoldásként jelen cikkben egy új szabályábrázolási formát, a „dupla fuzzy pont” formát vezetjük be. A „dupla fuzzy pont” szabályforma használatával lehetőség nyílik olyan fuzzy következtetési módszerek kidolgozására, melyek a következmény fuzziságának változását is képesek leírni. Az így kialakítható módszerek egy egyszerű példája jelen cikkben is bemutatásra kerül.

### 2. FUZZY FÜGGVÉNYEK ÉS INTERPOLÁCIÓ

A fuzzy függvények megadására két módszer kínálkozik. Az első a klasszikus leírás alapú, ahol a

fuzzy függvényt fuzzy relációként értelmezzük. A második a deklaratív forma, ahol a fuzzy függvényt két fuzzy univerzum egymáshoz rendeléseként értelmezzük.

A leírás alapú nézet szerint a fuzzy szabályok az antecedens és konzekvens fuzzy halmazok relációjaként értelmezhetők [8]. Ebben az esetben a teljes fuzzy szabálybázis is reláció, az antecedens és konzekvens univerzumok relációja, mely a fuzzy szabály relációk diszjunkciójaként adódik. A klasszikus kompozíciós fuzzy következtetés [3] szabálybázisa is leírás alapú, a következmény fuzzy halmaz a fuzzy megfigyelés és a fuzzy szabálybázis reláció kompozíciójaként számítható.

A cikk további részében a fuzzy függvény deklaratív leírását követjük, azaz két fuzzy univerzum egymáshoz rendeléseként értelmezzük. A Perfilieva *et al.* [1], [2] által bevezetett jelölést használva a fuzzy függvény, mint hozzárendelés az alábbi módon definiálható:

Legyen  $L^X$  és  $L^Y$  fuzzy univerzum az  $X$  és  $Y$  alaphalmazon.

Az  $f: L^X \rightarrow L^Y$  leképezés fuzzy függvény, ha valamennyi  $A, B \in L^X$ ,  $A = B$  esetén  $f(A) = f(B)$ .  $A = B$  iff  $\forall x \in X, A(x) = B(x)$ .

Egy fuzzy függvény  $f: L^X \rightarrow L^Y$  kiterjesztett, ha valamennyi  $A, B \in L^X$ ,  $(A \equiv B) \leq (f(A) \equiv f(B))$ , ahol  $\equiv$  egy  $L^X, L^Y$ -on definiált hasonlóság reláció.

Ebben az esetben a fuzzy adatok fuzzy interpolációja a fuzzy függvény kiterjesztéseként értelmezhető:

Legyen  $\{(A_i, B_i) \mid i = 1, \dots, n\}$  párokkal megadott fuzzy adat, ahol  $A_i \in L^X, B_i \in L^Y, i = 1, \dots, n$ , és  $A_1, \dots, A_n$  az  $=$  szerint eltérő. Mindemellett legyen  $f: A_i \rightarrow B_i$  egy fuzzy függvény a  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  alaphalmazon, és  $P \subseteq \{\emptyset \neq \emptyset: D \rightarrow L^Y\}$ , ahol  $A \subset D \subseteq L^X$ , a lehetséges fuzzy függvények egy kiválasztott részhalmaza. A feladat egy olyan  $\emptyset \in P$  ( $P$  az interpolációs függvények halmaza) keresése, ahol az interpolációs feltétel  $\emptyset(A_i) = B_i, i = 1, \dots, n$  teljesül. Ebben az esetben  $\emptyset$  egy az  $\{(A_i, B_i) \mid i = 1, \dots, n\}$  fuzzy adatot leíró interpolációs fuzzy függvény. Azaz a  $\emptyset$  interpolációs fuzzy függvény az  $f$  fuzzy függvény kiterjesztése a  $D$  alaphalmazon.

\* egyetemi docens, Miskolci Egyetem, ALT

### 3. FUZZY SZABÁLY INTERPOLÁCIÓS MÓDSZEREK

A fuzzy függvény és a fuzzy interpoláció terminológiáját alkalmazva a fuzzy szabályokra és a fuzzy szabály interpolációra a fuzzy függvény deklaratív leírását követve, a fuzzy szabálybázis  $n$  fuzzy szabálya a „fuzzy adat”  $\{(A_i, B_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ , más néven „fuzzy pont”. Ebben az esetben a fuzzy szabály interpoláció alapú fuzzy következtetés nem más, mint egy alkalmas  $\varphi(A_i) = B_i, i = 1, \dots, n$  interpolációs fuzzy függvény keresése. Az interpolációs fuzzy függvénynek megfelelően az  $x \in L^X$  megfigyelésre kapott  $y \in L^Y$  következtetés egyszerűen  $y = \varphi(x)$ .

Számos fuzzy szabály interpolációs (FRI) módszer született az elmúlt 20 évben. Az egyik első módszer Kóczy és Hirota [5] nevéhez (KH módszer) kötődik. Kizárólag konvex és normális fuzzy halmazokon értelmezték. A következtetés fuzzy halmazt a megfigyelést közrefogó két szabály alapján határozza meg  $\alpha$ -vágatonként úgy, hogy a megfigyelés szabály antecedens távolság arányok megegyezzenek a szabály konzekvens, keresett következtetés távolság arányokkal. A KH módszernek számos variánsa született.

Az FRI lényegesen más megközelítést javasolja Baranyi *et al.* [4] tetszőleges formájú halmazokra kiterjesztve az alaplódszert. A javasolt kétlépéses módszer „Általános Módszertan” („General Methodology”, „GM”) először egy interpolált szabályt hoz létre, mely antecedens referencia pontja egybeesik a megfigyelés referencia pontjával. Majd második lépésként egy „egyszabályos következtetéssel” („single rule reasoning”) az interpolált szabály antecedense és a megfigyelés hasonlósága alapján az interpolált szabály konzekvenséből kiindulva meghatározza a következmény fuzzy halmaz végső formáját. A GM módszer gyakorlati alkalmazására ad példát Johanyák *et al.* [9]. A javasolt „Polar Cut” interpoláció polár metszetek segítségével végzi az egyszabályos következtetést.

Számos FRI módszer implementációja a MATLAB FRI Toolbox [6] részeként egy ritka fuzzy szabálybázis modell identifikációs toolbox-al [7] egyetlen fellelhető [11] alatt.

### 4. A FUZZISÁG INTERPOLÁCIÓJA

Annak érdekében, hogy a fuzzióság változását is kifejezhessük, a fuzzy pont szabály reprezentációt ki kell bővítenünk a fuzzy pont helyén további fuzzióság ábrázolási képességekkel.

Erre a célra jelen cikkben egy egyszerű módszert javasolunk, a fuzzy pont szabály reprezentációnak két egymásra illeszkedő, de eltérő fuzzióságú fuzzy pontra („dupla fuzzy pont”) való cseréjét. A javasolt szabályreprezentációban egy fuzzy szabály valójában

két olyan fuzzy szabály egyesítéseként adódik, ahol az illeszkedő szabályok antecedens és konzekvens referencia pontjai egybeesnek, de fuzzióságuk eltérő.

Az egyszerűbb magyarázat és vizualizáció miatt a továbbiakban a fuzzy halmazok formáját egyenlőszárú háromszögekre korlátozzuk. Ezen megkötés csak a magyarázatot egyszerűsíti, maga az alapkoncepció tetszőleges formájú halmazokra is kiterjeszthető.

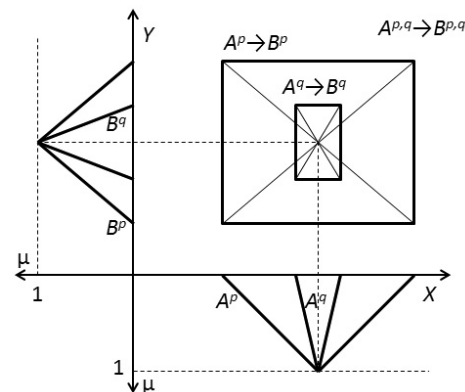
Egyenlőszárú háromszög alakú fuzzy halmazok esetén a referencia pont egyetlen pont, a halmaz magja:

$$\mu_{core(A)} = 1$$

Ez esetben az  $i^{th}$  szabály dupla fuzzy pont („double fuzzy dot”) alakja az alábbi formában adható meg:

$$A_i^{p,q} \rightarrow B_i^{p,q},$$

ami két egymásra illeszkedő fuzzy szabály egyesítéséből adódik:  $A_i^p \rightarrow B_i^p$  és  $A_i^q \rightarrow B_i^q$ , ahol  $\varphi(A_i^p) = B_i^p$  és  $\varphi(A_i^q) = B_i^q$ , valamint mindkét szabály antecedensének és konzekvensének megegyezik a referencia pontja:  $core(A_i^p) = core(A_i^q)$ ,  $core(B_i^p) = core(B_i^q)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de a fuzzióságuk mértéke eltérhet (lásd pl. 1. ábra).



1. ábra „Double fuzzy dot” szabályreprezentáció, abban az esetben ha a fuzzióság változásának iránya megegyezik az antecedens és a konzekvens oldalon.

### 5. A "DOUBLE-LINEAR" FUZZY INTERPOLÁCIÓ

A „double fuzzy dot” szabályreprezentáció alkalmazásának bemutatása érdekében a következőkben az egyszerűsített egydimenziós „double-linear” fuzzy szabály interpolációs módszer fuzzióság interpolációjának képességével való kiterjesztését vizsgáljuk.

A példa egyszerűsítése az alap „double-linear” fuzzy szabály interpolációs módszer háromszög és trapéz formájú fuzzy halmazokra korlátozásában áll. A vizsgált FRI módszer így elég egyszerűvé és jól vizualizálhatóvá válik annak érdekében, hogy a „double fuzzy dot” szabályreprezentáció lényegét bemutathassuk.

Az eredeti "double-linear" fuzzy szabály interpolációs módszert egydimenziós antecedens univerzumra és a valós számok alaphalmazán értelmezett konvex és normális fuzzy halmazokra vezette be Detyniecki *et al.* [10]. A szabályrendszer mindössze két szabályból áll:  $A_1 \rightarrow B_1$  és  $A_2 \rightarrow B_2$ , ahol  $\{A_1, A_2\} \in L^X, X \subseteq \mathfrak{R}$  és  $\{B_1, B_2\} \in L^Y, Y \subseteq \mathfrak{R}$  fuzzy halmazok. A szabálybázis ritka,  $A_1$  és  $A_2$  diszjunktak, valamint  $A_1 \leq A_2$ , ahol  $\leq$  a precedencia reláció. A  $\leq$  precedencia reláció  $B_1, B_2$  között is fennáll.

A háromszög alakú  $A_i, B_i$  fuzzy halmazoknak megfelelően módosítva [10] egyenleteit, az ugyancsak háromszög alakú  $A_*$  megfigyelésre a  $B_*$  következtetésre az alábbi lineáris összefüggések adódnak (lásd a 2. ábrát a jelölésekért):

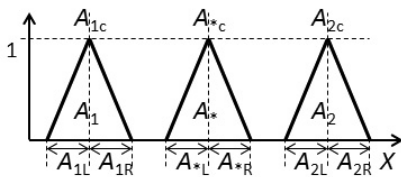
$$A_{*c} = \alpha \cdot A_{1c} + (1 - \alpha) \cdot A_{2c} \quad (1)$$

$$B_{*c} = \alpha \cdot B_{1c} + (1 - \alpha) \cdot B_{2c} \quad (2)$$

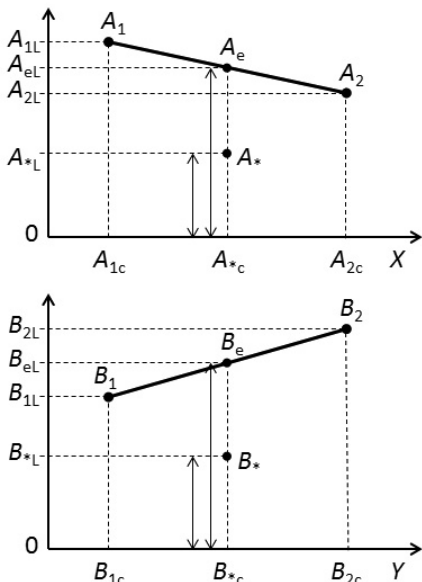
$$\alpha = \frac{A_{2c} - A_{*c}}{A_{2c} - A_{1c}} \quad (3)$$

$$B_{*c} = \frac{A_{2c} - A_{*c}}{A_{2c} - A_{1c}} \cdot B_{1c} + \frac{A_{*c} - A_{1c}}{A_{2c} - A_{1c}} \cdot B_{2c} \quad (4)$$

ahol  $B_{*c}$  a következtetés magja (referencia pontja).



2. ábra Az  $A_1, A_2$  és  $A_*$  háromszög alakú fuzzy szabály antecedenseknél alkalmazott jelölésrendszer (a jelölés megegyezik a  $B_1, B_2$  és  $B_*$  konzekvensenek esetében is).



3. ábra Az interpolált szabály  $A_e \rightarrow B_e$  bal  $A_{eL}, B_{eL}$  bizonytalanságainak és a következménynek  $A_* \rightarrow B_*$  a számítása.

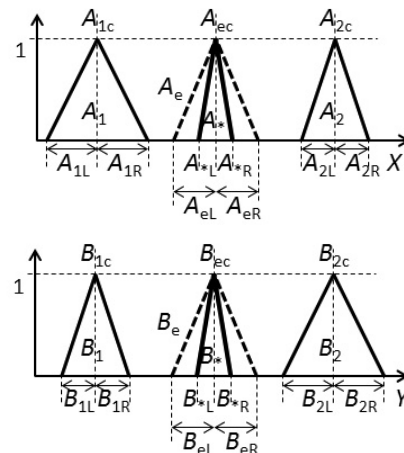
Az interpolált szabály  $A_e \rightarrow B_e$  bal  $A_{eL}, B_{eL}$  (és jobb  $A_{eR}, B_{eR}$ ) bizonytalanságaira az előző egyenletekhez hasonló lineáris összefüggések adódnak (lásd a 3. ábrát):

$$A_{eL} = \alpha \cdot A_{1L} + (1 - \alpha) \cdot A_{2L} \quad (5)$$

$$B_{eL} = \alpha \cdot B_{1L} + (1 - \alpha) \cdot B_{2L} \quad (6)$$

A következmény bal  $B_{*L}$  (és jobb  $B_{*R}$ ) bizonytalansága a megfigyelés és az interpolált szabály relatív bizonytalansága alapján számítható, azaz a megfigyelés  $A_{*L}$  és az interpolált szabály antecedens  $A_{eL}$  relatív bizonytalansága egyezzen meg az interpolált szabály konzekvens  $B_{eL}$  és a konklúzió  $B_{*L}$  relatív bizonytalanságával (példát lásd a 3. ábrán):

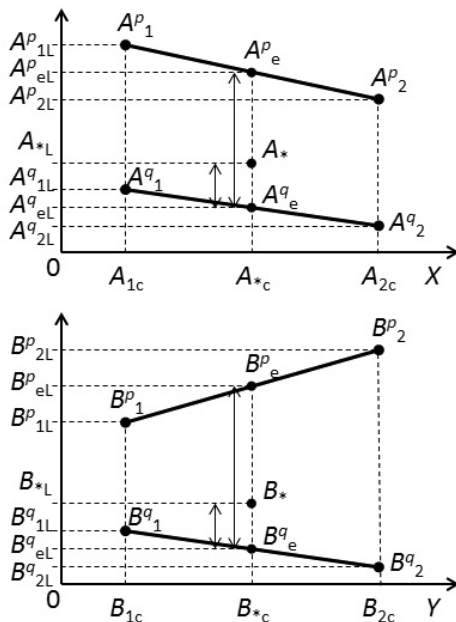
$$B_{*L} = \frac{A_{*L}}{A_{eL}} \cdot B_{eL} \quad (7)$$



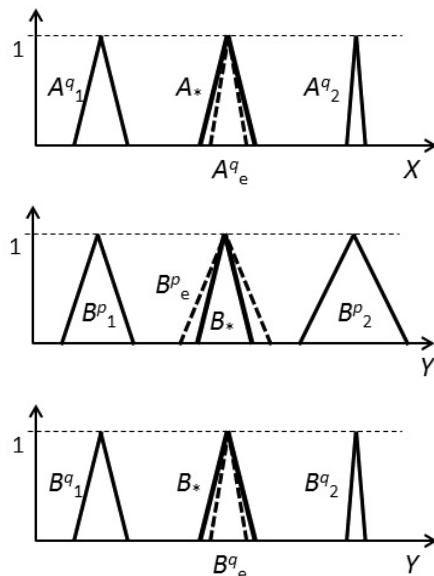
4. ábra Két fuzzy szabály  $A_1 \rightarrow B_1, A_2 \rightarrow B_2$  „double-linear” interpolációja, az interpolált fuzzy szabály  $A_e \rightarrow B_e$  és a konklúzió  $A_* \rightarrow B_*$ .

A "double-linear" fuzzy interpolációs módszer nagyon egyszerűen kiterjeszhető a "double fuzzy dot" szabályreprezentációra. Az alapkoncepció változatlan marad. Alapjaiban nem változik az (1) – (6) egyenlet, csak az interpolált fuzzy szabályt külön ki kell számolni a "double fuzzy dot" szabály  $A^p_i \rightarrow B^p_i$  és  $A^q_i \rightarrow B^q_i$  komponensére. Értelem szerűen így az interpolált szabályt is "double fuzzy dot" formában kapjuk  $A^{pq}_e \rightarrow B^{pq}_e$  (példát lásd a 6. ábrán). A konklúzió bal  $B_{*L}$  (és jobb  $B_{*R}$ ) bizonytalanságának számításához újból az eredeti módszert követjük (7), attól eltekintve, hogy itt most a relatív bizonytalanságot a megfigyelés és a két interpolált szabály között kell vizsgálnunk. Azaz a megfigyelés  $A_{*L}$  és a két interpolált szabály antecedens  $A^p_{eL}$  és  $A^q_{eL}$  relatív bizonytalansága egyezzen meg a két interpolált szabály konzekvens  $B^p_{eL}, B^q_{eL}$  és a konklúzió  $B_{*L}$  relatív bizonytalanságával (pl. lásd az 5-7. ábrát):

$$B_{*L} = \frac{A^p_{eL} - A_{*L}}{A^p_{eL} - A^q_{eL}} \cdot B^q_{eL} + \frac{A_{*L} - A^q_{eL}}{A^p_{eL} - A^q_{eL}} \cdot B^p_{eL} \quad (8)$$



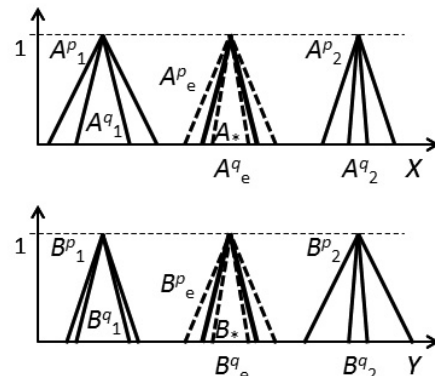
5. ábra Az interpolált szabály  $A^{p,q}_e \rightarrow B^{p,q}_e$  bal  $A^{p,q}_{eL}$ ,  $B^{p,q}_{eL}$  bizonytalanságainak és a következménynek  $A_* \rightarrow B_*$  a számítása "double fuzzy dot" szabályreprezentáció esetén.



6. ábra Két fuzzy szabály  $A^{p,q}_1 \rightarrow B^{p,q}_1$ ,  $A^{p,q}_2 \rightarrow B^{p,q}_2$  „double-linear” interpolációja és az interpolált fuzzy szabály  $A^{p,q}_e \rightarrow B^{p,q}_e$  „double fuzzy dot” szabályreprezentáció esetén.

#### 4. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutatómunka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.



7. ábra Az interpolált fuzzy szabály  $A^{p,q}_e \rightarrow B^{p,q}_e$  és a konklúzió  $A_* \rightarrow B_*$  „double fuzzy dot” szabályreprezentáció esetén.

#### 6. IRODALOM

- [1] I. Perfilieva, “Fuzzy function as an approximate solution to a system of fuzzy relation equations”, Fuzzy Sets and Systems 147, 2004, pp. 363–383.
- [2] I. Perfilieva, et al., “Interpolation of fuzzy data: Analytical approach and overview”, Fuzzy Sets and Systems, 2010, doi:10.1016/j.fss.2010.08.005
- [3] E. H. Mamdani and S. Assilian, “An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller”, Int. J. of Man Machine Studies, (7), 1975, pp.1-13.
- [4] P. Baranyi, L. T. Kóczy, and T. D. Gedeon, “A Generalized Concept for Fuzzy Rule Interpolation”, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 12, No. 6, 2004, pp. 820-837.
- [5] L. T. Kóczy and K. Hirota, “Rule interpolation by  $\alpha$ -level sets in fuzzy approximate reasoning”, In J. BUSEFAL, Automne, URA-CNRS. Vol. 46. Toulouse, France, 1991, pp. 115-123.
- [6] Zs. Cs. Johanyák, D. Tikk, Sz. Kovács, K. W. Wong “Fuzzy Rule Interpolation Matlab Toolbox – FRI Toolbox”, Proc. of the IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI'06), 15th Int. Conf. on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'06), July 16-21, Vancouver, BC, Canada, 2006, pp. 1427-1433.
- [7] Zs. Cs. Johanyák, “Sparse fuzzy model identification Matlab toolbox – RuleMaker toolbox”, Proceedings of IEEE 6<sup>th</sup> International Conference on Computational Cybernetics ICC3, Stara Lesná, Slovakia, 2008, pp. 69-74.
- [8] Zs. Cs. Johanyák: Fuzzy Rule Interpolation based on Subsethood Values, Proc. of 2010 IEEE International Conference on Systems Man, and Cybernetics (SMC 2010), 10-13 October 2010, pp. 2387-2393.
- [9] Zs. Cs. Johanyák, Sz. Kovács, “Fuzzy rule interpolation based on polar cuts”, Computational Intelligence, Theory and Applications, B. Reusch (Ed.), Springer, 2006 pp. 499-511.
- [10] M. Detyniecki, C. Marsala, and M. Rifqi, “Double-Linear Fuzzy Interpolation Method”, Proceedings of the 2011 IEEE International Conference On Fuzzy Systems, (FUZZ-IEEE 2011), Taipei, Taiwan June 27-30, 2011, pp. 455-462.
- [11] FRI Toolbox: <http://fri.gamf.hu/>