

FESZÜLTSÉGEK ÉS ELMOZDULÁSOK MEGHATÁROZÁSA ÜREGES PIEZOELEKTROMOS KÖRTÁRCSÁKBAN

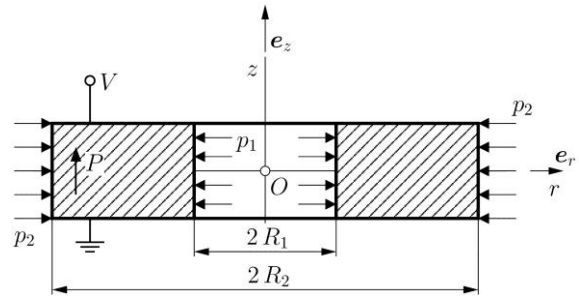
DETERMINATION OF STRESSES AND DISPLACEMENTS IN A PIEZOELECTRIC HOLLOW CIRCULAR DISK

Ecsedi István, egyetemi tanár, dr. habil, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék
Baksa Attila, egyetemi docens, PhD, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék

ÖSSZEFOGLALÁS (ABSTRACT). The static and dynamic linear responses of a hollow circular disk of a piezoelectric ceramic poled in thickness direction are treated. The applied mechanical loads are uniform pressures acting on the inner and outer curved boundary surfaces. Upper and lower faces are traction-free and are electroded with a driving voltage across the thickness. Under the conditions of plane-stress state an analytical solution is presented to determine the static and dynamic responses of the thickness polarized hollow circular disk made of PZT4 ceramic.

1. BEVEZETÉS

A PZT kerámiák a microtechnológiák legfontosabb szerkezeti komponenseiként nyernek alkalmazást. Használjuk szenzorok és actuátorok kialakítására kedvező piezoelektromos tulajdonságaik és nagy dielektromos állandójuk miatt. Az elmúlt években a piezoelektromos anyagok alkalmazási területe jelentősen kibővült az intelligens (smart, adaptive) struktúrákkal, ahol kiemelt szerkezeti anyagként különböző piezoelektromos kerámiák nyernek alkalmazást. E dolgozat tárgyát vékony vastagságú, üreges körhenger alakú síkfeszültségi állapotban lévő piezokerámiák statikai és dinamikai feladatainak analitikus megoldása alkotja. A feladat megoldása döntően a lineáris piezoelektromosságtan alapvető mezőegyenleteinek felhasználására épül. A vonatkozó peremérték feladatok megfogalmazására az $Or\varphi z$ henger-koordinátarendszer használatát. A vékony falvastagságú üreges körtárcsa axiálisan (z irányban) polarizált. A vizsgált tárcsa meridián metszetét az 1. ábra szemlélteti az alkalmazott mechanikai és villamos terhelésekkel együtt. A felső és alsó lap ($z = t/2$ és $z = -t/2$) elhanyagolható vastagságú elektródákat tartalmaz úgy, hogy a $z = t/2$ és a $z = -t/2$ lapokon a villamos potenciál szűkségképpen állandó [1, 2].



1. ábra. Körgyűrű alakú piezoelektromos kerámia.

A vizsgált feladat tengelyszimmetrikus és az általunk tanulmányozott dinamikai feladatban a

$$\begin{aligned} \bar{p}_i(\tau) &= p_i \cos \omega \tau, \quad (i=1,2) \\ \bar{U} &= U \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (1)$$

időben harmonikus mechanikai és villamos terhelésekhez tartozó állandósult elmozdulásokat és feszültségeket határozzuk meg, ahol \bar{p}_i, p_i nyomást, nyomás amplitúdót ($i=1,2$), \bar{U}, U az alkalmazott villamos feszültséget, illetve a villamos feszültség amplitúdóját jelöli, továbbá τ az időkoordináta, ω pedig az előírt, időben harmonikus függvényvel jellemzett terhelések (mechanikai és villamos) körfrekvenciáját jelöli.

A tengelyszimmetrikus feladat megoldásához az alábbi egyenleteket használjuk [1, 2]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \rho \omega^2 u = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_r = C_{11} \varepsilon_r + C_{12} \varepsilon_\varphi - E_{31} E_3, \quad (4)$$

$$\sigma_\varphi = C_{12} \varepsilon_r + C_{11} \varepsilon_\varphi - E_{31} E_3, \quad (5)$$

$$D_z = E_{31} \varepsilon_r + E_{31} \varepsilon_\varphi + \kappa_{33} E_3, \quad (6)$$

$$D_r = \kappa_{11} E_1, \quad E_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad E_3 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r D_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r D_z) = 0. \quad (8)$$

A (2-8) egyenletekhez tartozó peremfeltételek

$$\phi(r, -t/2) = 0, \quad \phi(r, t/2) = U \quad (9)$$

$$R_1 \leq r \leq R_2,$$

$$D_r(R_1, z) = D_r(R_2, z) = 0 \quad |z| \leq t/2, \quad (10)$$

$$\sigma_r(R_1, z) = -p_1, \quad \sigma_r(R_2, z) = -p_2 \quad (11)$$

$$|z| \leq t/2.$$

A fenti egyenletekben $u(r)$ a radiális elmozdulás amplitúdója; σ_r, σ_ϕ a normál feszültségek amplitúdói; $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi$ az alakváltozási amplitúdók; $\mathbf{E} = E_1 \mathbf{e}_r + E_3 \mathbf{e}_z$ a villamos térerősség amplitúdója; ϕ az elektromos potenciál amplitúdója, $\mathbf{D} = D_r \mathbf{e}_r + D_z \mathbf{e}_z$ a villamos eltolási vektor amplitúdója. Az anyagegyenletekben szereplő állandókat tekintettel a síkfeszültségi állapottal kapcsolatos $\sigma_z = 0$ egyenletre a következő módon nyerjük a piezokerámiákhoz tartozó $c_{11} = c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}$ merevségi együtthatókból és az e_{31}, e_{33} piezoelektromos állandókból:

$$C_{11} = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \quad C_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \quad (12)$$

$$E_{31} = e_{31} - \frac{c_{13}}{c_{33}} e_{33}. \quad (13)$$

A (6), (7) egyenletekben κ_{11}, κ_{33} az alkalmazott kerámia dielektromos állandóit jelöli [1, 2]. A (2-8) egyenletek felírásánál felhasználtuk, hogy a γ_{rz} nyírési alakváltozás elhanyagolható az $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi$ fajlagos nyúlásokhoz képest, mely felvetés összhangban van a síkfeszültségi állapot előírásaival. A (9) peremfeltételi előírások által vezetve a villamos potenciál kifejezésére az alábbi függvényt használjuk:

$$\phi = U \left(0, 5 + \frac{z}{t} \right). \quad (14)$$

A (14) egyenletnek megfelelően

$$D_r = 0, \quad E_3 = -\frac{U}{t} = \text{állandó}. \quad (15)$$

A (2), (4) és (5) egyenletekből az következik, hogy

$$\sigma_r = C_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + C_{12} \frac{u}{r} + E_{31} \frac{U}{t}, \quad (16)$$

$$\sigma_\phi = C_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + C_{11} \frac{u}{r} + E_{31} \frac{U}{t}. \quad (17)$$

A (3) és (16), (17) egyenletek kombinálása a következő differenciálegyenletet adja az $u = u(r)$ elmozdulási amplitúdóra:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \left(r^2 \frac{\rho \omega^2}{C_{11}} - 1 \right) u = 0. \quad (18)$$

A (6) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$D_z = E_{31} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \kappa_{33} \frac{U}{t}. \quad (19)$$

Evidens, hogy a (15)₁ és a (19) egyenletek által definiált komponensekkel rendelkező villamos eltolási vektor kielégíti a (8) Gauss egyenletet, hiszen az u radiális elmozdulási amplitúdó csak az r koordináta függvénye. A (11) feszültségi peremfeltételek kielégítése révén nyerjük az értékét a (18) homogén, másodrendű, közönséges differenciál-egyenletben szereplő két integrációs állandónak.

2. STATIKAI FELADAT

A statikai feladat megoldását a (16-19) egyenletek felhasználásával kapjuk az $\omega = 0$ helyettesítéssel. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$u(r) = k_1 r + k_2 r^{-1}, \quad (20)$$

$$\sigma_r(r) = (C_{11} + C_{12}) k_1 + (-C_{11} + C_{12}) k_2 r^{-2} + E_{31} \frac{U}{t}, \quad (21)$$

$$\sigma_\phi(r) = (C_{11} + C_{12}) k_1 + (-C_{12} + C_{11}) k_2 r^{-2} + E_{31} \frac{U}{t}, \quad (22)$$

$$D_z = 2k_1 E_{31} - \kappa_{33} \frac{U}{t}, \quad (23)$$

ahol

$$k_1 = \frac{1}{(C_{11} + C_{12})(R_2^2 - R_1^2)} \left[R_1^2 \left(p_1 + E_{31} \frac{U}{t} \right) - R_2^2 \left(p_2 + E_{31} \frac{U}{t} \right) \right], \quad (24)$$

$$k_2 = \frac{p_1 - p_2}{C_{11} - C_{12}} \frac{R_2^2 R_1^2}{R_1^2 - R_2^2}. \quad (25)$$

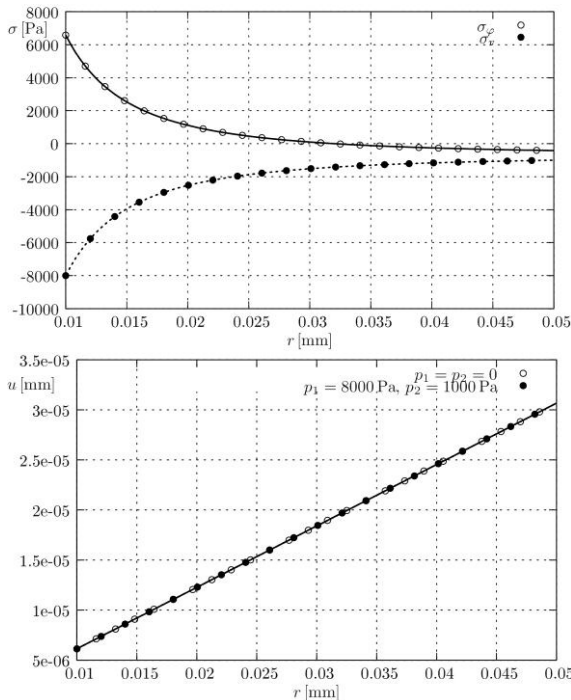
Abban a különleges esetben, mikor is $p_1 = p_2 = 0$, azt kapjuk, hogy

$$u(r) = \frac{E_{31}}{(C_{11} + C_{12})t} r, \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = 0, \quad (26)$$

$$D_z = \left(\frac{2E_{31}^2}{(C_{11} + C_{12})t} - \frac{\kappa_{33}}{t} \right) U. \quad (27)$$

A 2. ábra egy numerikus példa eredményeit tünteti fel, amely a következő adatokkal lett kiszámolva (PZT4):

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{22} &= 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, & c_{12} &= 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \\ c_{13} &= 7,4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, & c_{33} &= 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, & e_{31} &= -5,2 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \\ e_{33} &= 15,1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, & \kappa_{11} &= 0,646 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{Vm}}, \\ \kappa_{22} &= 0,562 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{Vm}}, & t &= 1 \text{ mm}, & R_1 &= 10 \text{ mm}, \\ R_2 &= 50 \text{ mm}, & U &= 500 \text{ V}, \\ p_1 &= 8000 \text{ Pa}, & p_2 &= 1000 \text{ Pa}. \end{aligned}$$



2. ábra. Feszültségek és elmozdulások szemléltetése $\omega = 0$ esetre.

A vizsgált feladatban az előírt $p_1 = 8000 \text{ Pa}$, $p_2 = 1000 \text{ Pa}$ és $V = 0$ terhelés esetén fellépő radiális elmozdulás 10^{-9} nagyságrendű, ez magyarázza a 2. ábrában az elmozdulások kicsiny eltérését. E példában a radiális elmozdulások döntően az alkalmazott villamos terhelésből származnak.

3. DINAMIKAI FELADAT

A (18) homogén, közönséges, másodrendű differenciál-egyenlet általános megoldása $\omega \neq 0$ esetben elsőrendű első és másodfajú Bessel függvények lineáris kombinációjaként adható meg [3]:

$$u(r, \omega) = K_1 f_1(r) + K_2 f_2(r), \quad (28)$$

ahol

$$f_1(r) = J_1 \left(\frac{\rho \omega^2}{C_{11}} r \right), \quad f_2(r) = Y_1 \left(\frac{\rho \omega^2}{C_{11}} r \right). \quad (29)$$

A (11) feszültségi peremfeltételekből a K_1 és K_2 állandókra az alábbi képleteket tudjuk levezetni:

$$K_1 = \frac{p_2 a_{12} - p_1 a_{11} + (a_{11} - a_{12}) E_{31} U / t}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad (30)$$

$$K_2 = \frac{p_1 a_{21} - p_2 a_{22} + (a_{21} - a_{22}) E_{31} U / t}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad (31)$$

ahol

$$a_{11} = C_{11} g_1(R_1) + C_{12} \frac{f_1(R_1)}{R_1}, \quad (32)$$

$$a_{12} = C_{11} g_2(R_1) + C_{12} \frac{f_2(R_1)}{R_1}, \quad (33)$$

$$a_{21} = C_{11} g_1(R_2) + C_{12} \frac{f_1(R_2)}{R_2}, \quad (34)$$

$$a_{22} = C_{11} g_2(R_2) + C_{12} \frac{f_2(R_2)}{R_2}, \quad (35)$$

$$g_1(r) = \frac{\partial f_1}{\partial r}, \quad g_2(r) = \frac{\partial f_2}{\partial r}. \quad (36)$$

A normál feszültségek számítása a (16) és (17) képletek, valamint a (28) egyenlet kombinálásával levezetett összefüggések alapján történik:

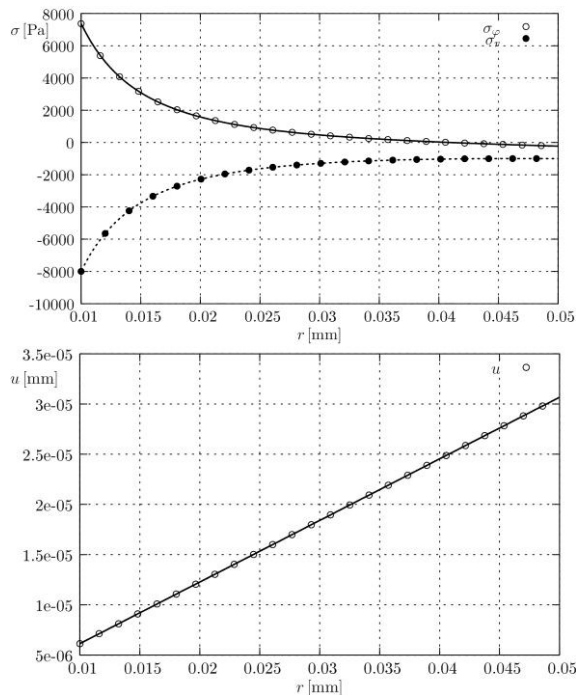
$$\begin{aligned} \sigma_r(r, \omega) &= K_1 \left[C_{11} g_1(r) + C_{12} \frac{f_1(r)}{r} \right] + \\ &K_2 \left[C_{11} g_2(r) + C_{12} \frac{f_2(r)}{r} \right] + E_{31} \frac{U}{t}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\sigma_{\varphi}(r, \omega) = K_1 \left[C_{12} g_1(r) + C_{11} \frac{f_1(r)}{r} \right] + K_2 \left[C_{12} g_2(r) + C_{11} \frac{f_2(r)}{r} \right] + E_{31} \frac{U}{t}. \quad (38)$$

A villamos eltolási vektor axiális komponensének a számítására a (19) egyenletből következő alábbi képlet használható:

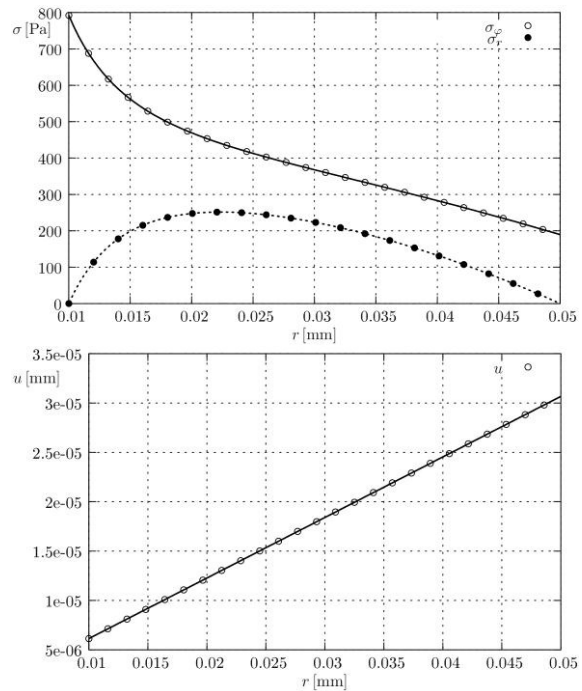
$$D_z = E_{31} \left[K_1 \left(g_1(r) + \frac{f_1(r)}{r} \right) + K_2 \left(g_2(r) + \frac{f_2(r)}{r} \right) \right] - \kappa_{33} \frac{U}{t}. \quad (39)$$

A 3. ábra egy olyan numerikus példa számítási eredményeit szemlélteti, amikor $\omega = 1000 \text{ rad/s}$, $p_1 = 8000 \text{ Pa}$, $p_2 = 1000 \text{ Pa}$ és $U = 500 \text{ V}$, vagyis az üreges körtárcsa egyidejűleg dinamikus mechanikai és villamos terhelések hatása alatt áll. A példában használt geometriai méretek és anyagállandók a statikai problémához tartozó feladatból származnak.



3. ábra. Feszültségek és elmozdulások egyidejűleg működő mechanikai és villamos terhelés esetén $\omega = 1000 \text{ rad/s}$

A 4. ábra pusztán dinamikus villamos terhelésnek kitett fentiekben vizsgált üreges kör alakú tárcsa feszültségeit és radiális elmozdulását szemlélteti.



4. ábra. Feszültségek és elmozdulások $p_1 = p_2 = 0$, $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ és $U = 500 \text{ V}$ esetén.

4. KÖVETKEZTETÉSEK

A tanulmány üreges, vékony vastagságú piezoelektromos körtárcsák statikai és dinamikai feladatának megoldására egy analitikus módszert ismertet. A lineáris piezoelektromosság síkfelületi állapotához tartozó egyenletei nyervek alkalmazást a vonatkozó peremérték feladatok megfogalmazásánál. Az analitikus módszer által nyert eredmények közvetlenül használhatók piezoelektromos kerámiák szilárdságtani problémáinak megoldására szolgáló különböző numerikus eljárások pontosságának az ellenőrzésére.

Köszönetnyilvánítás.

A tanulmány elkészítését az OTKA K67825 és a TÁMOP 4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 programok támogatták.

6. IRODALOM

- [1] J.S. Yang, An Introduction to the Theory of Piezoelectricity, Springer, New York, 2005.
- [2] J.S. Yang, The Mechanics of Piezoelectric Structures, Word Scientific, London, 2006.
- [3] Bronstejn-Musiol-Mühlig-Szemengyajev, Matematikai Kézikönyv, Typotex, Budapest, 2006.