

MARÓSZERSZÁMOK DINAMIKAI TULAJDONSÁGAI ÉS AZOK HATÁSA A MEGMUNKÁLÁS STABILITÁSÁRA

DYNAMIC PROPERTIES OF MILLING TOOLS AND THEIR EFFECTS ON STABILITY OF CUTTING

Dombóvári Zoltán^{1,2,*}, Stépan Gábor³

ABSTRACT

Theoretical and practical problems occurring during the identification of the dynamic characteristics of milling tools are investigated in this paper. It is shown that the dynamics of milling processes can be described directly in the modal space without using general coordinates in Cartesian space. This way one can bypass the construction of the mass, damping and stiffness matrices subjected to the assumption that the real structure is proportionally damped. Practical examples demonstrate how the dynamic parameter identification of the tool is carried out both by tip-to-tip and complete modal analysis. The results of these tests and their effect on the cutting stability predictions are compared and the reasons of the discrepancies are pointed out and discussed. Finally, the effect of the measured vibration modes on the stability calculations is also shown.

1. BEVEZETÉS

Gépeink alkatrészeinek nagy hányada forgácsolással készül. A gazdasági elvárások megkövetelik a termelékenység növelését, melyet forgácsolás esetén az egységnyi idő alatt leválasztott forgácstérfogat maximalizálásával érhetünk el. Ezt például marás és esztergálás esetén a szerszám illetve a munkadarab fordulatszámának a növelése is segíti. Nagysebességű megmunkáláskor alkalmunk adódhat különösen nagy forgácsszélesség alkalmazására is, kedvező paraméterek esetén káros rezgések keletkezése nélkül.

Az 1960-as években két kutató, Tobias [28] és Tlustý [27] egymástól függetlenül rávilágított arra, hogy a regeneratív hatások jelentős szerepet játszanak a

forgácsolási folyamatok stabilitásában. Ezek a hatások tipikusan esztergálás, fúrás és marás esetén keletkeznek, amikor a már megmunkált felület mintázata gerjeszti a szerszámgépet a forgácsoló erőn keresztül. Matematikai értelemben, a forgácsolási folyamat nem csak az aktuális állapottól függ, hanem a múltbéli állapottól is, a megfelelő matematikai modellek készletetett differenciálegyenletek, melyek triviális megoldásai gyakran instabilak. Mégis, a rendszer sajátfrekvenciáihoz viszonyítva magas fordulatszámokon ún. stabil „zsebek” keletkeznek, melyekbe hangolva a rendszert jelentősen növelhető az időegység alatt leválasztott forgácstérfogat. Ez a jelenség vezetett a nagysebességű megmunkálások szélesebb körű alkalmazásához, melyet jól forgácsolható anyagok (tipikusan alumínium, ill. acél) esetén alkalmazhatunk. Ha a megmunkálási folyamatot instabil zónába hangoljuk, a folyamat dinamikusan elveszti a stabilitását és egyre növekvő amplitúdójú rezgés keletkezik. A rezgések addig növekednek, amíg a szerszám kilép az anyagból, „átrepül felette”, majd ismét belép az anyagba [9, 11]. Stabil öngerjesztett rezgés keletkezik, mely jelentősen csökkentheti a gyártmány minőségét és esetenként roncsolhatja a szerszámgépet is. Ezt az iparban egyébként instabilnak nevezett rezgés az ún. „chatter”, melynek elkerülése az automata gyártósorok megjelenésével felértékelődött.

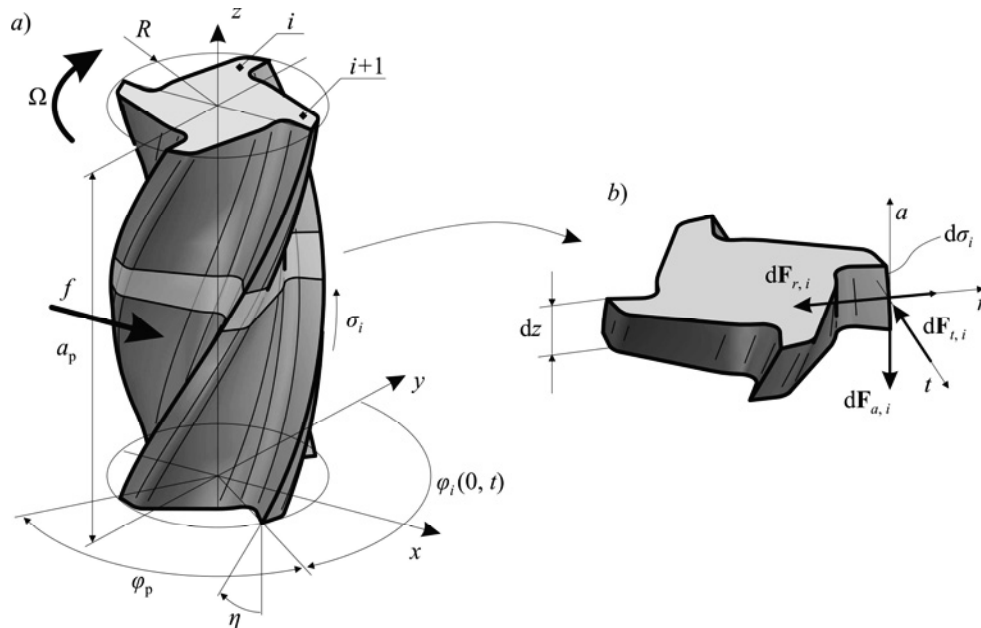
Szemben az esztergálással, marási folyamatok esetén a dinamikai paraméterek időfüggőek, periodikusak, mivel az élek ki és belépése folyamatos lüktető (paraméteres) gerjesztést ad a rendszernek [1-3, 10, 19, 26, 29]. A megfelelő matematikai modell paraméteresen gerjesztett készletetett differenciálegyenlet. Ekkor az időben periodikus dinamika tulajdonságait egy alkalmasan megválasztott diszkrét leképezés segítségével követhetjük, melyet a *Floquet-elmélet* tárgyal [15].

* dombo@mm.bme.hu

¹ Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, MTA-BME Gépek és Járűművek Dinamikája Kutatócsoport

² Ideko Technological Centre, Elgoibar, Baszkföld, Spanyolország

³ Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék



1. ábra a) része bemutatja egy közönséges csavart élű maró szerszám geometriai viszonyait. Az ábra b) része az i -ik dz vastagságú élszegmensen kialakuló forgácsoló erő tangenciális (t), radiális (r) és axiális (a) komponenseit mutatja. Megjegyzés: $d\mathbf{F}_{tra,i} = \mathbf{f}_{tra,i} d\sigma_i$ (vö. (5)).

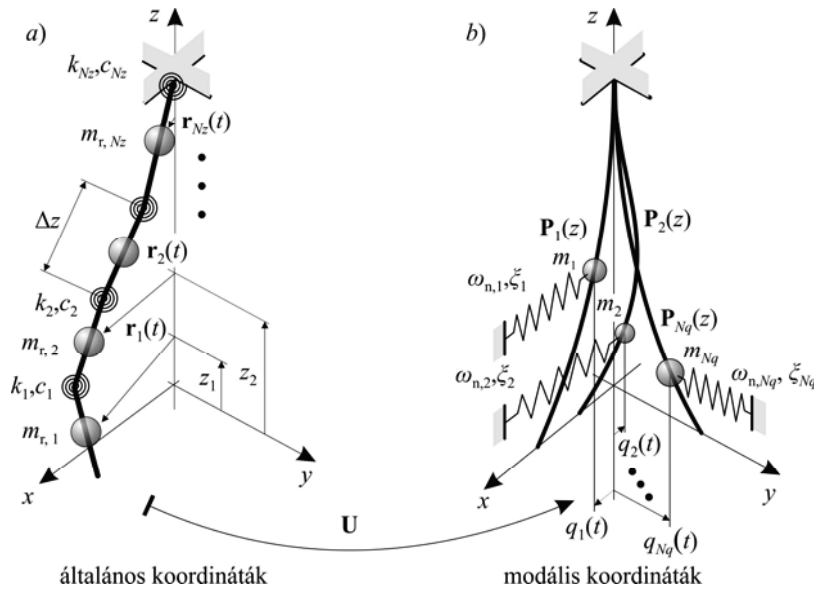
Technológiai tervezés során kezd elterjedni a marási folyamatok stabilitási térképének használata, melyek segítségével stabil és hatékony megmunkálások tervezhetők a technológiai paraméterek terében. A szakirodalomban több eljárás is fellelhető a regeneratív hatások vizsgálatára, melyek különböző mélységben modellezik a marási folyamatokat. Frekvencia tartományban a nullad-rendű közelítést (Zeroth Order Approximation, ZOA) [1] és a többszörös frekvencia megoldást (Multiple Frequency solution, MF) [7, 22], időtartományban a szemi-diszkretizációt [17], ill. az időbeli végesesemes [6] eljárásokat lehet említeni. Gyakorlati szempontból a frekvencia tartományon alapuló eljárások kényelmesebben használhatóak, hiszen közvetlenül illeszthető a munkadarab-készülék-gépszerszám (MKGS) rendszer mérésrel meghatározott frekvencia átviteli függvényei (Frequency Response Function, FRF). Ezek az eljárások viszont korlátozottan alkalmazhatóak bonyolult marási folyamatok stabilitásának vizsgálatára, kizárólag lineáris esetekben. Időtartományban a modellezés és annak akár nemlineáris analízise elméletileg nem ütközik akadályba, de itt a mért dinamikai paraméterek meghatározása, mérésekből való visszaszámolása jelenthet problémát.

A cikkben összefoglaljuk a marási folyamatok modellezésének problémáit, a geometria leírásától a mérésrel meghatározott dinamikai tulajdonságok figyelembevételéig.

2. MARÁS DINAMIKAI MODELLJE

A marással történő megmunkálás mind a forgácsleválasztás kis környezetében, mind a szerszám gép strukturális léptékében bonyolult fizikai folyamat. A forgácsleválasztásból származó – a marószerszámot, illetve a munkadarabot terhelő – erőrendszer empirikusan adható meg, tipikusan az ortogonális forgácsolással meghatározott ún. forgácsolási erő karakterisztika használatával. Az iparban és a szakirodalomban több forgácsolási erő modell megtalálható [2, 21, 24], melyek különböző technológiai paraméterektől függenek, de mind a forgácsvastagság valamilyen lineáris vagy nemlineáris függvényei. A lokális forgácsvastagság időben való nyomon követése érdekében elengedhetetlen a folyamat geometriai viszonyainak pontos modellezése, a regeneratív hatások azonosítása.

Az itt bemutatott mechanikai modell alkalmas a hagyományos csavart élű („hélixes”) marószerszámokkal történő palástmarás modellezésére. Különböző élgeometriák hullámos élű [10], vagy változó szögosztású [8] maró szerszámok okozhatnak bonyolult regeneratív viszonyokat (több állandó késés [10], állapottól függő késés [5], megoszló késés [4]). A szerszámon keletkező forgácsolási erőt egy általános empirikus forgácsolási erő karakterisztika segítségével határozzuk meg, mely gerjeszti a lineárisan rugalmasnak és arányosan csillapítottnak tekintett MKGS rendszert. Kitérünk továbbá az FRF matematikai értelmezésére, megmutatjuk hogyan fejthetőek vissza dinamikai mérések alapján a modális paraméterek.



2. ábra a) része a szerszám – (6) szerinti – $\mathbf{r}(t)$ általános koordináták alapján származtatott mechanikai modelljét ábrázolja. Ekkor az N_z db. m_r redukált tömeg, k merevség és a vele arányos c csillapítás szerint írható fel a (7) mozgásegyenlet az \mathbf{M} tömeg-, \mathbf{K} merevségi és \mathbf{C} csillapítási mátrix meghatározásával. Az ábra b) része a szerszám modális modelljét mutatja, amikor a szerszám mozgása N_q db. egymástól független ω_n körfrekvenciájú és ζ_n csillapítású $\mathbf{P}(z)$ lengésképekkel irtató le, melyek mérésből közvetlenül meghatározhatóak. Kettő felírás között az \mathbf{U} modális transzformációs mátrix teremti meg a kapcsolatot (lásd (17)).

2.1. Forgácsoló erő

A marószerszámot terhelő megoszló regeneratív erőrendszer meghatározásához szükség van a marási folyamat geometriai modellezésére. A szerszám egyes éleinek elfordulását a lokális – y tengelyhez képesti – élszöggel lehet időben nyomon követni:

$$\varphi_i(z, t) = \Omega t + \sum_{k=1}^{i-1} \varphi_{p,k} - \frac{z}{R} \tan \eta, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

ahol Ω (rad/s) a főorsó szögsebessége, R a szerszám sugara, η a csavart élű szerszám menetemelkedésének a szöge (hélix-szög), N a fogak számát jelöli (1. ábra a), illetve $\varphi_{p,k}$ a k -ik és a következő él közötti szögosztás. A továbbiakban állandó szögosztású marószerszámot vizsgálunk, azaz, $\varphi_p = \varphi_{p,k} = 2\pi/N$. Az i -ik vágó- és az $(i+1)$ -ik megelőző él közötti elméleti (geometriai) forgácsvastagság $h_{g,i}(z, t)$ felírható az élek egymáshoz képesti elmozdulásának és az aktuális vágóél normálisának skaláris szorzataként:

$$h_{g,i}(z, t) \approx (\Delta \mathbf{r}(z, t) + \text{col}(f_x, 0, 0)) \cdot \mathbf{n}_i(z), \quad (2)$$

melyben f_x a szerszám elötölés (x) irányú elmozdulása, $\Delta \mathbf{r}(z, t) = \mathbf{r}(z, t) - \mathbf{r}(z, t - \tau)$ pedig a regeneratív hatást jelöli az i -ik és az azt megelőző vágóél között, ahol $\mathbf{r}(z, t) = \text{col}(x(z, t), y(z, t), z(z, t))$. A regeneratív hatás a szerszám $\mathbf{r}(z, t)$ aktuális mozgása (rezgése) és annak τ idővel korábbi $\mathbf{r}(z, t - \tau)$ mozgása között jön létre. τ az

az idő, amíg két egymást követő fog ugyanabba a $\varphi_i(z, t)$ szöghelyzetbe nem ér, mely felírható a következő módon

$$\tau = \frac{1}{\Omega} \varphi_p = \frac{1}{\Omega} \frac{2\pi}{N}.$$

A forgácsvastagság (2) szerinti meghatározása megenged negatív értékeket, azaz, hogy $h_{g,i}(z, t) < 0$ legyen, mely eset fizikailag természetesen nem értelmezhető, de megkönnyíti a matematikai modellezést. Az él lokális $\mathbf{n}_i(z) = \text{col}(\sin \varphi_i(z, t), \cos \varphi_i(z, t), 0)$ normálisának (2)-be helyettesítésével a geometriai forgácsvastagság a következő alakban fejezhető ki,

$$h_{g,i}(z, t) = (x(z, t) - x(z, t - \tau) + f) \sin \varphi_i(z, t) + (y(z, t) - y(z, t - \tau)) \cos \varphi_i(z, t). \quad (3)$$

Ekkor az él valós ciklois pályáját körívvel közelítjük egy megfelelően egyszerű, de a szükséges hatásokat még jól leíró modell érdekében. Mivel minden él ugyanolyan geometriájú, a forgácsvastagság (1) és (3) szerint időben periodikus lesz $T = 2\pi/\Omega$ periódus idővel ami egyenlő a τ késéssel is. A szerszám munkadarabra való radiális és axiális behatolását figyelembe veszi a h_i valós forgácsvastagság, amit a következő módon határozunk meg:

$$h_i(z, t) := g_i(z, t) h_{g,i}(z, t),$$

ahol a $g_i(z, t) = \mathbf{g}_{n,i}(z, t) \cdot \mathbf{g}_{ap}(z)$ kapcsolófüggvény figyelembe veszi a radiális és axiális fogásmélységet a következő függvényekkel:

$$g_{ri,i}(z,t) = \begin{cases} 1, & \varphi_{be} < (\varphi_i(z,t) \bmod 2\pi) < \varphi_{ki}, \text{ és} \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad (4)$$

$$g_{ap}(z) = \begin{cases} 1, & z \leq a_p, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Itt a munkadarabba való radiális behatolást a φ_{be} és φ_{ki} be- illetve kilépési szöghelyzettel, az előírt axiális fogásmélységet a_p -vel vesszük figyelembe (1. ábra *a*). Az egységnyi lokális éldarabra ható $\mathbf{f}_{tra,i}(z,t)$ forgácsolási erőt empirikusan meghatározott $\mathbf{f}(h)$ forgácsoló erő karakterisztikával tudjuk figyelembe venni (1. ábra *b*), így

$$\mathbf{f}_{tra,i}(z,t) := -\mathbf{f}(h_i(z,t)). \quad (5)$$

A lokális (*tra*) koordináta-rendszerben értelmezett egységnyi élhosszra vonatkoztatott erő felírható az (*xyz*) alap-koordináta-rendszerbe való visszatranszformálással a következők szerint:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i(z,t; \mathbf{r}(z,t), \mathbf{r}(z,t-\tau)) \\ = \mathbf{f}_i(z,t) := g_i(z,t) \mathbf{T}_i(z,t) \mathbf{f}_{tra,i}(z,t), \end{aligned}$$

ahol

$$\mathbf{T}_i(z,t) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_i := \varphi_i(z,t).$$

A regeneratív hatásra a fajlagos forgácsoló erő utolsó argumentumában lévő $\mathbf{r}(z,t-\tau)$ tag utal.

2.2. Dinamikai modell

A marószerszámot és a szerszámgépet lineárisan rugalmasnak feltételezve, bevezethető a szerszám elmozdulás függvényének egy diszkrétizált változata a következők szerint

$$\mathbf{r}(t) = \text{col}(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_{N_z}(t)) = \text{col}_{l=1}^{N_z}(\mathbf{r}(z_l, t)), \quad (6)$$

ahol z_l a Δz vastagságú axiális marószerszám elem közepének axiális koordinátája (2. ábra *a*). (6)-ban $\mathbf{r}_l(t) = \mathbf{r}(z_l, t)$ az l -ik axiális marószerszám elem általános koordinátái, azaz $\mathbf{r}_l(t) = \text{col}(x_l(t), y_l(t), z_l(t))$. Marási eljárások dinamikai viselkedése a következő késleltetett differenciálegyenlettel adható meg általánosan (2. ábra *a*)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t; \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t-\tau)), \quad (7)$$

ahol \mathbf{M} , \mathbf{C} , ill. \mathbf{K} az \mathbf{r} általános koordinátákkal konzisztens tömeg-, csillapítási és merevségi mátrix. \mathbf{F} a különböző axiális elemekre ható – az \mathbf{r} általános koordináták szerint felírt – megoszló forgácsoló erő eredője, azaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t; \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t-\tau)) \\ = \text{col}_{l=1}^{N_z} \left(\sum_{i=1}^N \int_{z_l-\Delta z/2}^{z_l+\Delta z/2} \mathbf{f}_i(\zeta, t; \mathbf{r}_l(t), \mathbf{r}_l(t-\tau)) d\sigma_i(\zeta) \right), \end{aligned}$$

ahol $d\sigma_i(\zeta) = d\zeta / \cos \eta$ (vö. 1. ábra *a*). Behelyettesítve $\mathbf{r}(t) = \mathbf{P} e^{i\omega t}$ exponenciális próba-függvényt (7) homogén részébe, a csillapítatlan gerjesztetlen rendszer frekvenciaegyenlete a következő alakban írható fel

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

A \mathbf{P} lengéskép változatlanul valós marad az arányosan csillapított esetben. (8)-nak létezik triviálisól különböző megoldása, ha ω kielégíti a frekvencia (karakterisztikus) egyenletet

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0. \quad (9)$$

Eszerint meghatározhatóak a modális paraméterek, azaz az $\omega_{n,k}$ saját-körfrekvenciák és az azokhoz tartozó \mathbf{P}_k lengésképek (2. ábra *b*). Az eredeti dinamikai rendszernek végtelen sok modusa van, amiből az axiális felbontástól függően $3N_z$ határozható meg (9) szerint. Az elméleti modális analízis szerint az $\mathbf{r}(t)$ általános koordináták és a $\mathbf{q}(t) = \text{col}(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N_z}(t))$ modális koordináták között a következő transzformáció érvényes

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{U} \mathbf{q}(t), \quad \text{ahol } \mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2 \ \dots \ \mathbf{U}_k \ \dots \ \mathbf{U}_{3N_z}] \text{ és}$$

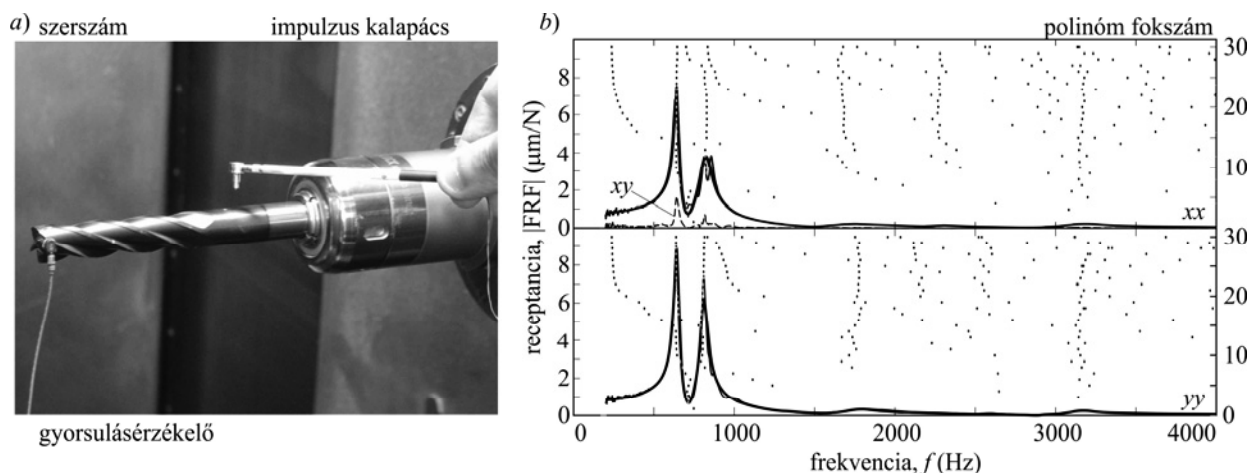
$$\mathbf{U}_k = \text{col}_{l=1}^{N_z}(\mathbf{U}_{k,l}) = c_k \mathbf{P}_k. \quad (10)$$

A megfelelő modulus normalizálási paramétere $c_k = (\mathbf{P}_k^T \mathbf{M} \mathbf{P}_k)^{-1/2}$ ($k=1, 2, \dots, 3N_z$) alakú. Itt \mathbf{U} a tömeggel normalizált modális transzformációs mátrix $3N_z$ méretű kvadratikus mátrixa. (7) alakja a modális térben a következő (2. ábra *b*)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}(t) + [2\xi_k \omega_{n,k}] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\omega_{n,k}^2] \mathbf{q}(t) \\ = \mathbf{U}^T \mathbf{F}(t; \mathbf{U} \mathbf{q}(t), \mathbf{U} \mathbf{q}(t-\tau)), \end{aligned} \quad (11)$$

amiből látszik, hogy a modális koordináták csak a forgácsoló erőn keresztül csatolódnak. (11)-ben $[2\xi_k \omega_{n,k}]$ és $[\omega_{n,k}^2]$ diagonális mátrixok, melyek a k -ik modulus ξ_k relatív csillapítását, ill. $\omega_{n,k}$ saját-körfrekvenciáját tartalmazzák. A k -ik modulus modális tömege és modális merevsége kifejezhető a következők szerint

$$m_k = \mathbf{P}_k^T \mathbf{M} \mathbf{P}_k = (\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k)^{-1} \mathbf{P}_k^T \mathbf{P}_k, \quad k_k = m_k \omega_{n,k}^2.$$



3. ábra. Az a) része az ábrának a modális mérés során használt eszközöket mutatja. A b) rész a szerszámcsúcs átviteli függvényeit (FRF) mutatja az előtolás irányában gerjesztve és mérve (xx), illetve rá merőlegesen (yy). A vékony folytonos vonal a valós mérést, míg a folytonos vastag vonal az illesztett parciális tört függvényt (RFP) mutatja. Szaggatott vékony vonal az úgynevezett kereszt átviteli függvény (xy) ábrázolja. A b) ábrán a lépcsőzetesen növelt fokszámú parciális törtfüggvények gyökei is ábrázolásra kerültek, melyből egyértelműen kivethetők a „stabil” valós modulusok.

Ehhez hozzátartozik, hogy az m_k modális tömeg és a \mathbf{P}_k lengéskép összetartozó, viszonylagos paraméterek, azaz, a modális tömeg nagysága attól függ, hogyan normalizáljuk a lengésképeket. Például (10)-ben \mathbf{U}_k a tömeggel normalizált lengéskép, azaz a hozzá tartozó modális tömeg egységnyi.

A (7) szerinti felírás a gyakorlatban nehezen használható, hiszen sem az \mathbf{M} tömeg-, sem a \mathbf{C} csillapítási, sem az \mathbf{K} merevségi mátrixot nem ismerjük egy valós berendezésre. (11) szerint azonban a modális paraméterek és a lengésképek ismerete elegendő a marás dinamikai viselkedésének vizsgálatához.

2.3. Modális tulajdonságok

A gyakorlatban egy dinamikai rendszer modális paraméterei többek között ütési vagy rázási kísérlettel határozhatók meg. A cél a különböző pontokhoz és/vagy irányokhoz tartozó frekvencia átviteli függvények (FRF-ek) meghatározása. Megfelelő N_m számú és helyzetű FRF-ek leméréseivel egy valós szerkezet dinamikai tulajdonságai meghatározhatóak. Ez tipikusan valamilyen görbeillesztési módszert jelenti, mellyel N_q számú modust azonosíthatunk, azaz az eredeti végtelen méretű modális tér egy N_q dimenziós leszűkítését határozhatjuk meg mérésrel: $\mathbf{q}(t) = \text{col}(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{N_q}(t))$. Ekkor, (10) és (11) szerint látszik, hogy \mathbf{U} -nak csak egy csonkított $3N_m \times N_q$ méretű változata állítható elő kísérleti modális analízissel, mivel \mathbf{U} N_q darab $3N_m$ méretű \mathbf{U}_k lengésképet tartalmaz (itt $k = 1, 2, \dots, N_q$). A (11) felírás ugyanúgy érvényben marad nem kvadratikusan \mathbf{U} esetén is. A gerjesztés és a válasz térbeli irányát vegyük figyelembe a \mathbf{w} és \mathbf{v} egységvektorokkal. Ha a gerjesztés és a válasz z_m és z_n axiális szinteken értelmezett, akkor az előbb említett vektorokat felírhatjuk a (6)-ban bevezetett diszkrétizáció

szerint a következőképpen: $\mathbf{w} = \text{col}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{w}_m, \dots, \mathbf{0})$ és $\mathbf{v} = \text{col}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{v}_n, \dots, \mathbf{0})$. Ekkor \mathbf{w} és \mathbf{v} irányok közötti átviteli függvény [14] szerint kifejezhető a következő alakban

$$\Phi_{wv}(\omega) = \sum_{k=1}^{N_q} \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{w}}{-\omega^2 + 2\xi_k \omega_{n,k} i \omega + \omega_{n,k}^2} = \sum_{k=1}^{N_q} \frac{\mathbf{v}_n^T \mathbf{U}_{k,n} \mathbf{U}_{k,m}^T \mathbf{w}_m}{-\omega^2 + 2\xi_k \omega_{n,k} i \omega + \omega_{n,k}^2}, \quad (12)$$

ha $\mathbf{U}_k = \text{col}(\mathbf{U}_{k,1}, \mathbf{U}_{k,2}, \dots, \mathbf{U}_{k,m}, \dots, \mathbf{U}_{k,n}, \dots, \mathbf{U}_{k,N_m})$. A k -ik modushoz tartozó $\mathbf{v}^T \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{w}$ skalár együttható az ún. modális konstans, reciproka az effektív (vagy reflektív) modális tömeg

$$m_{k,wv} := (\mathbf{v}^T \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{w})^{-1}, \quad (13)$$

amiből az effektív (vagy reflektív) merevség felírható $k_{k,wv} := m_{k,wv} \omega_{n,k}^2$. A modális paramétereinek meghatározásához elvileg elegendő a tér három irányába elvégzett egyetlen ütési kísérlet – természetesen nem csomópontban mérve a válaszjeleket. A lengésképek azonosításához azonban több pontban kell mérnünk FRF-t, melyek mátrixba rendezhetőek:

$$\Phi(\omega) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(\omega) & \dots & \Phi_{1N_m}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{N_m 1}(\omega) & \dots & \Phi_{N_m N_m}(\omega) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

x	$\omega_{n,k}$ (Hz)	ξ_k	$ U_{k,x,1}^2 $ (1/kg)	$\text{ang}(U_{k,x,1}^2)$ (fok)	$k_{k,xx,11}$ (N/ μm)
1	641	0,024	5,175	1,155	3,1364
2	822	0,047	9,460	-0,394	2,8204
3	1681	0,108	4,961	23,645	24,560
4	2276	0,033	1,042	-8,366	198,46
5	3156	0,036	5,972	-1,133	65,858
y	$\omega_{n,k}$ (Hz)	ξ_k	$ U_{k,y,1}^2 $ (1/kg)	$\text{ang}(U_{k,y,1}^2)$ (fok)	$k_{k,yy,11}$ (N/ μm)
6	643	0,022	6,140	-0,664	2,6552
7	811	0,028	8,738	-1,303	2,9711
8	1779	0,074	5,187	-13,473	24,760
10	3153	0,028	5,598	13,421	72,054

1. táblázat. A maró szerszámcsúcs méréséből visszafejtett modális paraméterek. A 9. modus a modális analízis során később bekerül a vizsgálatba, azonban a direkt szerszámcsúcs mérés során rejtve maradt (lásd 3. ábra b). ($k_{k,xx,11}$ és $k_{k,yy,11}$ a szerszámcsúcs méréshez tartozó reflektív modális merevséget, $\text{ang}(\bullet)$ pedig a komplex szám szögét jelöli.)

$$\Phi_{mn}(\omega) = \begin{bmatrix} \Phi_{xx,mn}(\omega) & \Phi_{xy,mn}(\omega) & \Phi_{xz,mn}(\omega) \\ \Phi_{yx,mn}(\omega) & \Phi_{yy,mn}(\omega) & \Phi_{yz,mn}(\omega) \\ \Phi_{zx,mn}(\omega) & \Phi_{zy,mn}(\omega) & \Phi_{zz,mn}(\omega) \end{bmatrix},$$

ahol $n, m = 1, 2, \dots, N_m$. A (14) szerinti felírás konzisztens a (10)-ben bevezetett jelöléssel, ha $U_{k,l} = \text{col}(U_{k,x,l}, U_{k,y,l}, U_{k,z,l})$. (12) és (14) szerint a mért átviteli mátrix felírható a következő módon

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=1}^{N_q} \frac{U_k \circ U_k}{-\omega^2 + 2\xi_k \omega_{n,k} i \omega + \omega_{n,k}^2}. \quad (15)$$

A szakirodalomban $U_k \circ U_k$ diadikus szorzat az ún. maradék mátrix (residue matrix), mely tulajdonképpen a modushoz, a gerjesztési és a válasz irányokhoz megfelelő [14] reflektív tömegeket tartalmazza (lásd (13)), azaz

$$U_k \circ U_k = \begin{bmatrix} U_{k,1} \circ U_{k,1} & \dots & U_{k,1} \circ U_{k,N_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{k,N_m} \circ U_{k,1} & \dots & U_{k,N_m} \circ U_{k,N_m} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$U_{k,m} \circ U_{k,n} = \begin{bmatrix} m_{k,xx,mn}^{-1} & m_{k,xy,mn}^{-1} & m_{k,xz,mn}^{-1} \\ m_{k,yx,mn}^{-1} & m_{k,yy,mn}^{-1} & m_{k,yz,mn}^{-1} \\ m_{k,zx,mn}^{-1} & m_{k,zy,mn}^{-1} & m_{k,zz,mn}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_{k,x,m} U_{k,x,n} & U_{k,x,m} U_{k,y,n} & U_{k,x,m} U_{k,z,n} \\ U_{k,y,m} U_{k,x,n} & U_{k,y,m} U_{k,y,n} & U_{k,y,m} U_{k,z,n} \\ U_{k,z,m} U_{k,x,n} & U_{k,z,m} U_{k,y,n} & U_{k,z,m} U_{k,z,n} \end{bmatrix}.$$

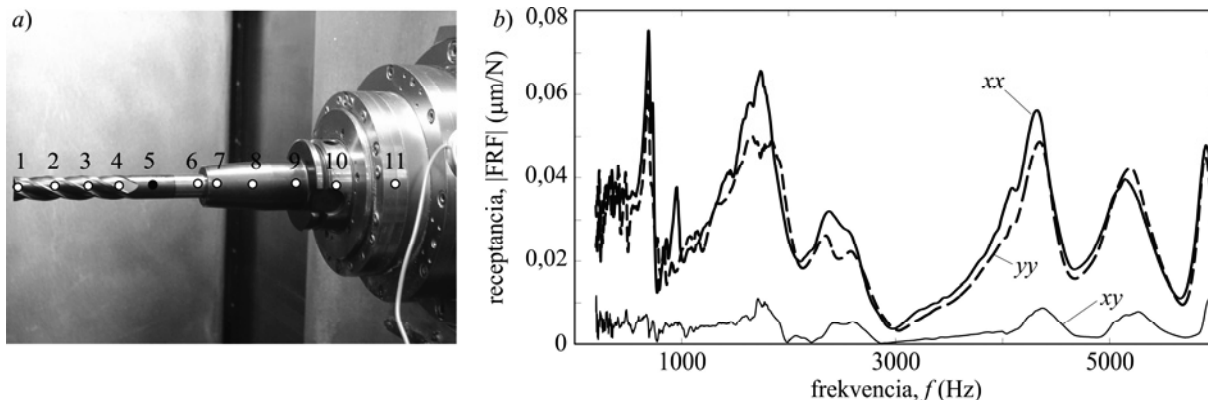
A gyakorlatban nem szükséges a Φ átviteli mátrix minden elemét külön-külön meghatározni. A Maxwell felcserélhetőségi elv szerint Φ – a linearitás feltételezésével – a gyakorlatban is szimmetrikus, azaz $\Phi_{m,n} = \Phi_{n,m}^T$. A modális paraméterek, úgymint, $\omega_{n,k}$ saját-körfrekvencia és ξ_k csillapítási tényező

meghatározásához elegendő a Φ főátlójában lévő elemek vizsgálata, ahol a modulusok feltehetően a legtisztábban jelennek meg. A lengésképek azonosításához elegendő, ha a Φ egy oszlopát vagy egy sorát mérjük csak ki, mivel ebből is kifejezhetőek U_k komponensei (lásd (16)). Tehát, ahogy az közismert, elegendő egy pontban gerjeszteni és minden más pontban választ mérni, vagy fordítva, kivéve a lengésképek csomópontjait.

3. MARÓSZERSZÁM DINAMIKÁJÁNAK MEGHATÁROZÁSA

Ebben a részben bemutatjuk, hogyan lehet a maró szerszám dinamikai tulajdonságait meghatározni helyi modális mérések segítségével. Az itt tárgyalt módszer olyan értelemben statikus, hogy nem veszi figyelembe a szerszám forgás közben megváltozott dinamikáját. Bizonyos körülmények között az itt leírt egyszerűbb eljárás is elegendően pontos a szerszám-szerszám-befogógép dinamikai viselkedésének a leírásához. Ha például magas fordulatszámra egy merev háromtengelyes marógéppel munkálunk meg alumíniumot, akkor valószínűleg csak a marószerszám saját modulusai fogják befolyásolni a stabilitást.

Ha azonban titánt munkálunk meg, amikor is a fordulatszám alacsony és a forgácsoló erők nagyok, nagyobb valószínűséggel fognak a marógép saját strukturális modulusai berezegni. Ilyenkor elengedhetetlenek a pontosabb, az egész munkatérre kiterjedő modális mérések. A méréseket egy 3 tengelyes vízszintes elrendezésű precíziós marógépen (Danobat, Falcon 500-2G) végeztük el. A négyfogú, csavart élű, $D = 16$ mm átmérőjű marószerszám zsugorkötésű szerszámtartón keresztül kapcsolódott a gép főorsójához. A szerszám túlnyúlása a szerszám tartóhoz képest $L_0 = 122$ mm volt.



4. ábra. Az a) rész a szerszámon felvett 11 db modális pontnak a helyzetét mutatja. A szerszámot minden esetben az 5. pontban gerjesztettük impulzus kalapáccsal. A b) része az ábrának a termikus szerszámbefogó csúcsának (7. pont az a) részen) mért dinamikáját mutatja előtolás (xx) rá merőleges (yy) és kereszt (xy) irányban.

3.1. Szerszámcsúcs mérés

Ez a legegyszerűbben kivitelezhető mérés a szerszám-szerszámbefogó-gép és a munkadarab közötti relatív mozgások dinamikai tulajdonságainak meghatározására. Két mérési sorozatot végzünk gyorsulás érzékelővel és impulzus kalapács segítségével (x) előtolás, és a rá merőleges (y) irányban (3. ábra a). Az eredményeket a 3. ábra b) része foglalja össze, melyből kiténik, hogy a szerszám hasonló dinamikával rendelkezik mind a két irányban. A keresztirányú hatások is ellenőrizhetők egy (xy) méréssel, ami azonban a 3. ábra b) szerint elhanyagolható mértékű.

A lemért FRF-k alapján azonosíthatók a modális paraméterek. Az iparban széles körben elfogadott a parciális tört polinomok illesztése (rational fraction polynomials, RFP), melynek során előre megadott fokú lengő rendszert, azaz, hányados polinomot illesztünk a mért FRF-re. Bevett szokás a fokszám fokozatos növelésével több illesztést is elvégezni, és kiválogatni az úgynevezett stabil gyököket (3. ábra b). Ezek helyzete viszonylag független a fokszám fokozatos növelésétől, azaz egy frekvencia fokszám diagramon, mint függőleges „pont-sorok” jelennek meg. A kiválasztást segíti, ha a mért FRF abszolút értékét vagy a képzetes részét is ábrázoljuk ugyanazon ábrában, hiszen ekkor jól látható mely lengéskép tekinthető a folyamat stabilitása szempontjából fontosnak, azaz melyek a „rugalmas” modulusok. Az RFP módszer szerint kiválasztott gyökökből a sajátfrekvenciák és a csillapítások közvetlenül adódnak. A (13) alapján bevezetett modális konstans a gyökhöz tartozó parciális tört együtthatója, melyből (15) és (16) szerint a lengésképek visszafejthetők, továbbá (13) alapján a modushoz tartozó modális reflektív tömegek és modális reflektív merevségek is meghatározhatóak. A fent említett maró szerszámcsúcs méréséhez kiválasztott gyököket és az azokból számított modális paramétereket a 1. táblázatban foglaltuk össze és a 3. ábra. b) részén látható az illesztés minősége is, ami annyira jó, hogy a

(vékony) mért függvényt az illesztett (vastag) függvény gyakorlatilag vonalvastagságon belül takarja. Az 1. táblázatból kiténik, hogy a (8)-ban a valós lengésképekre, azaz a csillapítás arányos voltára tett feltételezés csak részben teljesül, hiszen az (x) irányban a harmadik, (y) irányban a nyolcadik, továbbá a tizedik modulus jelentősebb fáziscsúszással rendelkezik.

A 3. ábra b) részén azonban az is látszik, hogy ezek a modulusok jóval merevebbek mint az (x) és (y) irányú első két modulus, így ezek képzetes részeinek elhanyagolása nem befolyásolja lényegesen a dinamikai vizsgálatot. Mivel a szerszámcsúcs mérés csak egy modális elemet használ a csúcsban a (15) és (16) definíciós egyenletek alapján a maradék mátrix most csak 3×3-as méretű, és a bennük szereplő k-ik modális konstansok felírhatóak a következők szerint

$$\mathbf{U}_{k,1} \circ \mathbf{U}_{k,1} = \begin{bmatrix} U_{k,x,1}^2 & U_{k,x,1}U_{k,y,1} & 0 \\ U_{k,y,1}U_{k,x,1} & U_{k,y,1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. táblázat mért adataival a valós lengésképek arányos csillapítás feltételezésével és az elhanyagolható kereszthatások zérussal való közelítésével a következő, tömeggel normalizált modális átviteli mátrix függőleges oszlopaiban jelennek meg:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2,3 & 3,1 & 2,2 & 1,0 & 2,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 & 2,9 & 2,3 & 2,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\text{kg}}} \quad (17)$$

Ez alapján látszik, hogy \mathbf{U} a normalizált modális átviteli mátrix visszafejthető a mérés alapján, így (11) mozgásegyenlet közvetlenül felírható a modális térben az \mathbf{r} általános koordináták terében felírt \mathbf{M} tömeg-, \mathbf{C} csillapítási illetve \mathbf{K} merevségi mátrix (7) meghatározása nélkül. A mérés igazi egyszerűségét az adja, hogy még a lengésképek alakjának pontos meghatározására sincsen szükség, csupán azok (x), (y) és (z) koordinátáinak

arányaira, melyeket az \mathbf{U} mátrix első három sorának számai tartalmaznak. A további sorok tartalmaznák a lengésképek pontos alakját (6) szerint, de ezekre a regeneratív hatásokat is figyelembe vevő (11) dinamikai modellben nincsen szükség, ezért kimérésük is felesleges. Ez jelentősen leegyszerűsíti szerszámcsúcs mérés alapján marási folyamatok dinamikai modellezését.

3.2. Lengésképek azonosítása teljes modális analízissel

Vannak olyan marási műveletek azonban, amikor szükség lehet a szerszám vagy a munkadarab teljes lengésképeinek pontos mérésére, figyelembevételére. Ez tipikusan simító megmunkálásnál fordulhat elő, amikor a szerszám viszonylag nagy palástfelületen, kis radiális fogásmélységgel érintkezik a munkadarabbal. Ekkor, fontos a szerszám és/vagy a munkadarab teljes modális analízisének az elvégzése, amit ismét gyorsulásérzékelők és impulzus kalapács segítségével végeztünk el ugyanazon a marógépen. Most nem szerszámcsúcs mérést végzünk, de (16) szerint ilyenkor is elegendő csupán egy helyen gerjeszteni a szerszámot, viszont több helyen kell válaszjelet mérni. Ilyenkor célszerű a szerszámot ott gerjeszteni ahol a legkényelmesebb, illetve ott, ahol az érintkező felületek is a legjobban alkalmasak a gerjesztés átvitelére. Ezért a szerszámot a szerszám-befogó alatt gerjesztettük (5. pont a 4. ábra *a* részén) és 11 különböző pontban mértük a gyorsulás válaszjelet előtolás (x), ill. rá merőleges (y) irányban (4. ábra *a*). A keresztgerjesztést az előző szerszámcsúcs mérés alapján már elhanyagolhatónak tartottuk.

Az előző részben tárgyalt módon, az RFP eljárás alkalmazásával a modális paraméterek és a modális konstansok visszafejthetők. (16) alapján, így a következő lengésképek koordinátákat kapjuk meg:

$$U_{k,x,m} \quad \text{és} \quad U_{k,y,m},$$

ahol $k = 1, 2, \dots, 10$ és $m = 1, 2, \dots, 11$, melyeket külön-külön ábrázoltunk a 2. táblázatban. Az ábrák alapján szembeötlő az egyes irányokban az első, illetve a második lengésképek hasonlósága. Ugyanez fedezhető fel a harmadik és a negyedik lengésképek esetén is. Ez nehezen lenne magyarázható a szerszám egyszerű, mereven befogott rúdmodelljével, de ugyanígy valószínűtlennek tűnik, hogy ez a marógép „szerszám előtti” dinamikájának a hatása, ami egyébként két nagyságrenddel merevebb, mint a szerszám maga. Az 4. ábra *b*) részén a szerszám befogó peremének átviteli függvényei láthatóak előtolás (x) és rá merőleges (y) irányban (vö. 3. ábra *b*), amelyek azt mutatják, hogy az egyébként sokkal merevebb szerszám-gépnek is van viszonylag alacsony sajátfrekvenciája. Ezek a merev szerszám-gép módusok rezonanciaszerűen szuperponálódnak a szerszám dinamikájára, és mint veszélyes rugalmas módusok jelennek meg.

Ennek a jelenségnek az ellenőrzésére felépítettünk egy egyszerű vége-selemes modellt (VEM), ahol egy – a

szerszámmal megegyező befoglaló geometriájú illetve anyagú – rudat függesztünk fel egy rugólánc végére. A rugólánc tömeg, csillapítási és merevségi adatait a szerszám-tartó mért modális paramétereiből fejtettük vissza a rugólánc modális átviteli mátrixának elemeire nézve nemlineáris másodrendű egyenletrendszer segítségével. Ezzel a közelítéssel a szerszám befogó a szerszámmal érintkező végének a dinamikáját kielégítő pontossággal írtuk le. A VEM analízis tökéletesen igazolta a fenti magyarázatot az első és második mért módusok duplázódására.

Felmerülhet a kérdés a pontos modális analízis elvégzése után, hogy mennyire megbízható a szerszámcsúcs mérés, hiszen a teljes modális analízis során, olyan helyen ütjük meg a szerszámot ahol a gerjesztés pontosan átadódik a szerszám-szerszám-befogó-gép rendszernek. Ezzel szemben szerszámcsúcs mérés esetén a szerszám élét kell megütnünk, ami egyrészt, ronc-solhatja a szerszámot magát, másrészt a pontatlan érintkezés miatt a gerjesztés sem lesz tökéletes. Ráadásul páratlan élű szerszám esetén még a gyorsulásjelek mérése sem pontosan egy irányban történik a gerjesztés irányával. Ezért ha az idő engedi, a legalább két pontot tartalmazó modális analízist kell előnyben részesíteni a szerszám szárán gerjesztve.

4. MARÁSI FOLYAMAT LINEÁRIS STABILITÁSA

A (11)-ben szereplő nemlineáris késleltetett időben periodikus differenciálegyenlet lineáris stabilitását a *Floquet-elmélettel* vizsgáljuk. Ehhez (11) variációs rendszerét [15] kell előállítani, azaz egy $\mathbf{q}_p(t) = \mathbf{q}_p(t+T)$ periodikus stacionárius pálya körül tekintjük az $\mathbf{u}(t)$ kis perturbációt:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_p(t) + \mathbf{u}(t),$$

mely a következő lineáris, időben periodikus paraméteresen gerjesztett késleltetett differenciálegyenletet eredményezi

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + [2\xi_k \omega_{n,k}] \dot{\mathbf{u}}(t) + ([\omega_{n,k}^2] + \mathbf{H}(t)) \mathbf{u}(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{u}(t - \tau), \quad (18)$$

ahol

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}(t - \tau)}(t; \mathbf{q}_p(t), \mathbf{q}_p(t - \tau)).$$

Ez felírható elsőrendű alakban a következők szerint

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{L}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{R}(t) \mathbf{y}(t - \tau), \quad (19)$$

ahol $\mathbf{y}(t) = \text{col}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t))$.

n	(x) mért	(y) mért	(x) VEM
1	 $\omega_{h,1} = 641 \text{ Hz}, \zeta_1 = 1,7 \%, m_1 = 45 \text{ g}, k_1 = 0,7 \text{ N}/\mu\text{m}$	 $\omega_{h,6} = 643 \text{ Hz}, \zeta_6 = 1,9 \%, m_6 = 57 \text{ g}, k_6 = 0,92 \text{ N}/\mu\text{m}$	 687 Hz
2	 $\omega_{h,2} = 822 \text{ Hz}, \zeta_2 = 4,6 \%, m_2 = 59 \text{ g}, k_2 = 1,5 \text{ N}/\mu\text{m}$	 $\omega_{h,7} = 811 \text{ Hz}, \zeta_7 = 1,9 \%, m_7 = 71 \text{ g}, k_7 = 1,85 \text{ N}/\mu\text{m}$	 782 Hz
3	 $\omega_{h,3} = 1681 \text{ Hz}, \zeta_3 = 10,3 \%, m_3 = 61 \text{ g}, k_3 = 7,7 \text{ N}/\mu\text{m}$	 $\omega_{h,8} = 1778 \text{ Hz}, \zeta_8 = 7,8 \%, m_8 = 100 \text{ g}, k_8 = 12,4 \text{ N}/\mu\text{m}$	 1679 Hz
4	 $\omega_{h,4} = 2277 \text{ Hz}, \zeta_4 = 2,5 \%, m_4 = 517 \text{ g}, k_4 = 130 \text{ N}/\mu\text{m}$	 $\omega_{h,9} = 2564 \text{ Hz}, \zeta_9 = 3,1 \%, m_9 = 724 \text{ g}, k_9 = 182 \text{ N}/\mu\text{m}$	 2317 Hz
5	 $\omega_{h,5} = 3156 \text{ Hz}, \zeta_5 = 4,4 \%, m_5 = 108 \text{ g}, k_5 = 42,2 \text{ N}/\mu\text{m}$	 $\omega_{h,10} = 3153 \text{ Hz}, \zeta_{10} = 2,2 \%, m_{10} = 83 \text{ g}, k_{10} = 32,7 \text{ N}/\mu\text{m}$	 3635 Hz

2. táblázat tartalmazza a szerszám-szerszámbe fogó-gép rendszernek a mért és végeelemes módszerrel (VEM) számolt lengésképeit. A VEM számítás esetén a késtartó és a gép dinamikáját a vele egyenértékű rugó-lánc modellel lett figyelembe véve.

A rendszer periodicitásából adódóan (11) és (19) lineáris stabilitása megegyezik egy alkalmasan felírt lineáris leképezés stabilitási tulajdonságaival, amit a *Floquet-elmélet* tárgyal. A (19) késleltetett differenciálegyenlet az $\mathbf{y}_t(\theta) = \mathbf{y}(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ ún. eltolási (shift) függvény által generált végtelen dimenziós függvény térben értelmezett [16, 25], azaz

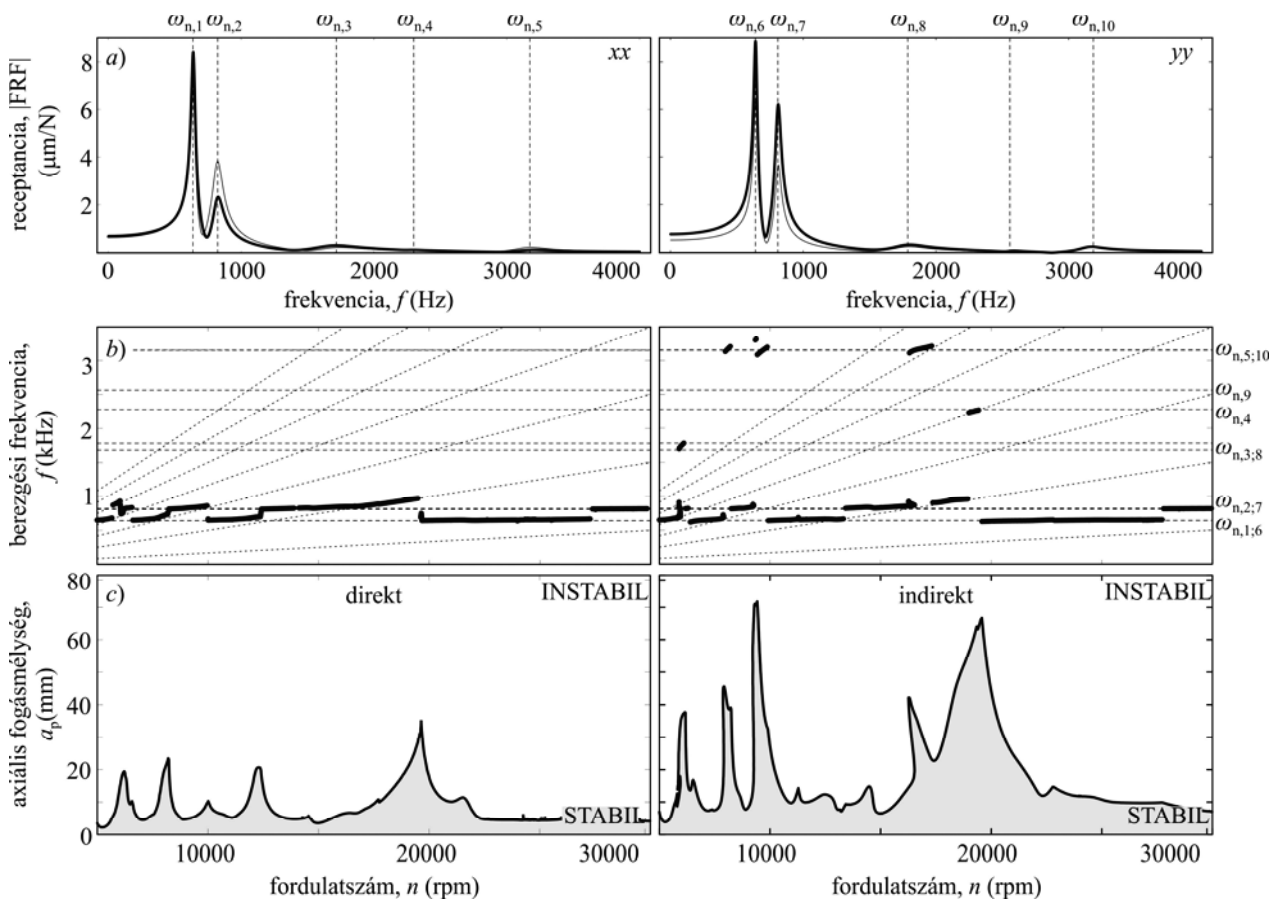
$$\mathbf{y}_{t+T} = \mathcal{M} \mathbf{y}_t,$$

ahol \mathcal{M} a lineáris monodromia operátor, melynek végtelen sok μ multiplikátora alapján meghatározható a $\mathbf{q}_p(t)$ stacionárius pálya stabilitása [15]. Ha \mathcal{M} összes multiplikátorának abszolút értéke kisebb, mint 1, azaz a sajátértékek a komplex síkon értelmezett egység sugarú körön belül helyezkednek el, akkor $\mathbf{q}_p(t)$ aszimptotikusan stabilis. Ha a legnagyobb multiplikátor nagysága éppen egységnyi, akkor a paraméter térben épp a stabilitás határát jelöltük ki. A kritikus multiplikátor komplex síkon

való elhelyezkedésétől függően beszélhetünk a $\mathbf{q}_p(t)$ periodikus pálya periódus-kettőző ($\mu = -1$), nyereg-csomó ($\mu = 1$) illetve Hopf ($\text{Im}(\mu) \neq 0$) bifurkációjáról.

A monodromia operátor explicite nem állítható elő már véges dimenziós esetekben sem, viszont alkalmas eljárással jól közelíthető. Itt közelítésként az elsődrendű szemi-diszkretizációt alkalmazzuk [13, 17, 20], mely lineárisan közelíti a $\mathbf{y}(t-\tau)$ késleltetett tagot (19)-ben a $\mathbf{z}_i = \text{col}(\mathbf{y}(t_i), \mathbf{y}(t_i - \Delta\theta), \dots, \mathbf{y}(t_i - r\Delta\theta))$ -vel definiált véges dimenziós tér felett. Ezzel tulajdonképpen a (19)-ben megadott késleltetett differenciál egyenletet közelítjük véges számú közösleges differenciálegyenlettel, melyek analitikus megoldása ismert a $t \in [t_i, t_i + \Delta t]$ intervallumban. Az analitikus megoldás ismételt alkalmazásaival a \mathbf{z}_i kezdeti állapotot Φ lineáris véges dimenziós operátor (azaz mátrix) képezi le a \mathbf{z}_{i+l} következő periódusba:

$$\mathbf{z}_{i+l} = \Phi \mathbf{z}_i, \quad (20)$$



5. ábra a) része a mérésre illesztett frekvencia átviteli függvények (FRF-ek) eltérését mutatja (itt a vékony vonal a szerszámcsőcs mérésre (direkt), a vastag vonal a teljes kísérleti modális analízis (indirekt) szerinti meghatározott FRF-et mutatja). Az illesztett átviteli függvények alapján meghatározott lineáris stabilitási térképeket c), a stabilitás határán a fő rezgési frekvenciákat b) mutatja.

ahol $l \Delta t = r \Delta \theta = T = \tau$. Felbontástól függően Φ sajátértékei az \mathcal{M} monodromia operator μ multiplikátoraihoz konvergálnak, miközben a maradék végtelen sok multiplikátor abszolút értéke tetszőlegesen kicsire szorítható. A technológiai paraméterek változtatásával a stabilitás pontonként ellenőrizhető. Stabilitási vizsgálat szerszámcsőcs FRF alapján Az 5. ábra a) részén bemutatott összehasonlításból jól látható, hogy a tisztán méréssel meghatározott szerszámcsőcs frekvencia átviteli függvények (xx és yy ; vékony vonal) jó közelítéssel megegyeznek a teljes kísérleti modális analízis (vastag vonal) szerinti frekvencia átviteli függvényeivel. Különösebb eltérés a meghatározott csillapításokban és sajátfrekvenciákban nem fedezhető fel a két mérési elv között. Feltűnőek azonban a modulusok merevségi eltérései (a frekvenciacsúcsok nagyságának eltérései), melyek visszavezethetők a nem megfelelő gerjesztés átadásra a mérés során. Ez a különbség jelentős eltéréseket okozhat a stabilitási számításokban, amit (18) és (20) szerint végzünk el.

Az 5. ábra c) részében a csupán a szerszámcsőcs mérésre alapozott (direkt) illetve a teljes kísérleti modális

analízis szerszámcsőcsra történő átszámításával (indirekt) meghatározott lineáris stabilitási térképek láthatóak a stabilitás elvesztésekor jelentkező öngerjesztett rezgés domináns frekvenciájával együtt [12]. A számításhoz a különbségek jobb érzékelteése érdekében $N=2$ egyenes fogazású marószerszámot modelleztünk, mely egy $K_r=200$ MPa és $K_t=500$ MPa fajlagos forgácsolási merevségű anyagot vág kis radiális fogásmélységgel ($\varphi_{bc}=5\pi/6$ és $\varphi_{ki}=\pi$, vö. (4)).

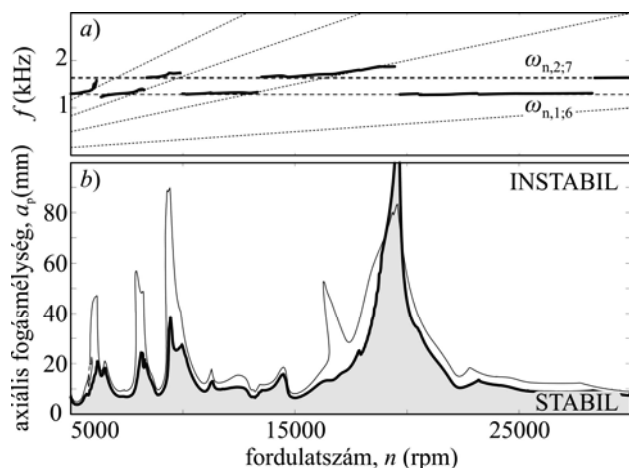
A stabilitási térképekből (5. ábra c) látszik, hogy a szerszámcsőcs mérés eredményének alkalmazásával alábecsüljük a rendszer stabilitását. Ezzel ugyan mérnökiileg a biztonság irányában tévedünk, de elveszítjük a termelékenység esetleges növelésének lehetőségét, amikor a rendszert a stabilitás határához viszonylag közel érdemes „hangolni”. Látható, hogy főként az alacsonyabb modulusokhoz tartozó rezonáns tartományokon, $\Omega_{n,k,l} = \omega_{n,k}/(lN)$ megmunkálási sebességek közelében ($k=1, 2, 6, 7$ és $l=1, 2, 3, \dots$) van jelentős javulás, ami akár 2-3 szoros is lehet.

Az 5. ábra b) részén az is megfigyelhető, hogy a stabilitási határ növekedésével más – magasabb – modulusok is szerephez jutnak a stabilitásvesztésben. Ezek

kis tartományban ugyan, de részei lehetnek a stabilitás határának (lásd pl. $\omega_{n,5}$ az 5. ábra *a*) és *b*) részén). Mindkét esetben található olyan tartomány, ahol a berezési frekvencia épp a fogkövetési frekvencia felének páratlan számú többszöröse (ferde szaggatott vonalak, az ún. Muñoa vonalak [23] az 5. ábra *b*) részén). Ekkor a periodikus $\mathbf{q}_p(t)$ stacionárius marás perióduskettőzödéssel veszti el stabilitását. A többi esetben $\mathbf{q}_p(t)$ egy új – valamely sajátfrekvencia közelében lévő – frekvenciával válik instabillá. Megjegyezzük, hogy mivel a rendszer T szerint időben periodikus ezért az említett domináns frekvenciáknak felharmonikusai is megjelennek a rezgésben, igaz különböző, de mindenképpen kisebb mértékben [12, 18].

4.1. Stabilitás vizsgálat teljes lengésképek alapján

A szerszám lengésképei befolyásolhatják a marási folyamat stabilitását főként simító eljárás esetén. A gyakorlatban ehhez hasonló probléma lép fel vékony falú munkadarabok forgácsolása közben is. Ezek tipikusan turbina illetve kompresszor lapátok nagyoló és simító megmunkálását jelentik. Ekkor magának a munkadarabnak a lengésképei határozzák meg a forgácsolási eljárás stabilitását. Mivel ez csak a lengésképek meghatározásának módjában különbözik a bemutatott példától, ezért ebben a cikkben csak a marószerszám lengésképeit vesszük figyelembe a számítás során, melyeket a 2. táblázat tartalmaz.



6. ábra. Az teljes modális analízis alapján meghatározott lineáris stabilitási térképeket *b*), a stabilitás határán a fő berezési frekvenciákat *a*) mutatja. (Itt a vékony vonal az indirekt szerszámcsúcs mérésre, a vastag vonal a teljes kísérleti modális analízis szerint meghatározott térképeket mutatja).

A 6. ábra bemutatja a 2. táblázatban szerepelő lengésképekkel számolt stabilitási térképet (6. ábra *b*) és a stabilitási határon lévő domináns öngerjesztett rezgési frekvenciákat (6. ábra *a*). A 6. ábrán összehasonlításképpen az 5. ábra indirekt méréshez

tartozó stabilitási térképe (vékony vonal) együtt kerül ábrázolásra a teljes lengésképekkel számolt stabilitási térképpel (vastag vonal).

Látható, hogy a stabilitás határát itt is az „alacsony” modulusok határozzák meg. Összességében elmondható, hogy a stabilitás határa csökkent, különösen az első két modulusnak megfelelő $\Omega_{n,k,l}$ rezonáns frekvenciák közelében, ahol $k=1, 2, 6, 7$ és $l=2, 3, \dots$. Az $\Omega_{n,k,1}$ első rezonáns frekvenciák körül azonban a stabilitás enyhén javult. A 6. ábra alapján a szerszám lengésképeinek a figyelembevétele a stabilitás térkép minimumát nem befolyásolja jelentősen, a rezonáns frekvenciák közelében jelentős változás azonban számottevő lehet. Ennek nyilvánvaló oka, a rezonáns megmunkálási sebességek közelében a pontos lengésképek szerepe megnő.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A cikkben összefoglaltuk a marási eljárások stabilitási vizsgálata közben felmerülő gyakorlati és elméleti kérdéseket. Kimutattuk, hogy a szerszámon és a szerszámgépen végzett kísérleti modális analízis eredményei alapján a marás mechanikai modellje közvetlenül létrehozható a modális térben. Ezzel kihagyható a klasszikus általános koordinátás felírás, ahol a tömeg-, a csillapítási és merevségi mátrix meghatározása szükséges. Bemutattuk, milyen eszközökkel történhet az egyszerűbb szerszámcsúcs mérés, illetve a teljes kísérleti modális analízis.

Megmutattuk, hogy a több nagyságrenddel merevebb szerszám gép jelentősen befolyásolja a szerszám dinamikáját, ami a tisztán befogott rúdként leírt szerszám modell pontatlanságát eredményezi. Egyszerűsége mellett kitértünk a szerszámcsúcs mérés esetleges pontatlanságaira is, aminek elsősorban a tökéletlen gerjesztés lehet az oka. A mért eredmények alapján összehasonlítottuk a szerszámcsúcs mérés és a teljes kísérleti modális analízisből visszszámolt szerszámcsúcs frekvencia átviteli függvényvel meghatározott stabilitási térképeket.

A teljes kísérleti modális analízis alapján visszafejtett teljes lengésképek alapján számolt stabilitási térképből következtettünk a szerszám teljes dinamikájának a marási folyamat stabilitására gyakorolt hatására. Ennek a pontosított stabilitási térkép számításnak akkor van nagy jelentősége, amikor rezonáns megmunkálási sebességtartományok alkalmazásával próbáljuk a marási folyamat termelékenységét többszörösképpen növelni. Ilyen esetekben a lengésképek pontos kísérleti meghatározásának jelentős szerepe van a stabilitás megfelelő előrejelzésében, akár a szerszám, akár az alkalmasint vékonyfalú munkadarab lengésképeiről legyen szó.

KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

A szerzők köszönetet mondanak az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramnak (OTKA, projektszám: K-101714), ill. a munka szakmai tartalma kapcsolódik a "Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen" c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az ÚMFT TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 programja támogatja.

6. IRODALOM

- [1] Altintas, Y., and Budak, E.: Analytical Prediction of Stability Lobes in Milling, *CIRP Annals – Manufacturing Technology*, Vol. 44, Issue 1, 357-362, 1995.
- [2] Altintas, Y.: Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations and CNC design, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2000.
- [3] Altintas, Y., Stepan, G., Merdol, D. & Dombovari, Z.: Chatter stability of milling in frequency and discrete time domain, *CIRP Journal Of Manufacturing Science And Technology*, Vol. 1, Issue 1, 35-44, 2008.
- [4] Bachrathy, D., Stepan, G.: Time-periodic velocity-dependent process damping in milling processes, *2nd International Conference Process Machine Interactions*, 1-12, Vancouver, British Columbia, Canada, 2010.
- [5] Bachrathy, D., Stepan, G., Turi, J.: The effects on stability of the state dependent regenerative delay in milling processes, *ASME Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 6, Issue 4, 1-9, 2011.
- [6] Bayly, P. V., Halley, J. E., Mann, B. P., and Davies, M. A.: Stability of Interrupted Cutting by Temporal Finite Element Analysis, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 125, Issue 2, 220-225, 2003.
- [7] Budak, E., Altintas, Y.: Analytical prediction of chatter stability in milling part I: General formulation, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 120, Issue 1, 22-30, 1998.
- [8] Budak, E.: An Analytical Design Method for Milling Cutters With Nonconstant Pitch to Increase Stability, Part I: Theory, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 125, Issue 1, 29-35, 2003.
- [9] Dombovari, Z., Barton, D.A.W., Wilson, R.E., Stepan, G.: On the Global Dynamics of Chatter in the Orthogonal Cutting Model, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 46, 330-338, 2011.
- [10] Dombovari, Z., Yusuf, A., Stepan, G.: The Effect of Serration on Mechanics and Stability of Milling Cutters, *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, Vol. 50, Issue 6, 511-520, 2010.
- [11] Dombovari, Z., Wilson, R. E. & Stepan, G.: Estimates of the bistable region in metal cutting, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 464, 3255-3271, 2008.
- [12] Dombovari, Z., Zatarain, M., Insperger, T.: Dominant Vibration Frequencies in Milling Using Semi-discretization Method, *2nd International Conference Process Machine Interactions*, 1-12, Vancouver, British Columbia, Canada, 2010.
- [13] Elbeyli, O., Sun, J. Q.: On the semi-discretization method for feedback control design of linear systems with time delay, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, Issue 1-2, 429-440, 2004.
- [14] Ewins, D. J.: Modal Testing: theory, practice and application, *Research Studies Press*, England, 2000.
- [15] Farkas, M.: Periodic Motions, *Springer-Verlag*, Berlin and New York, 1994.
- [16] Hale, J. K.: Theory of Functional Differential Equations, *Springer*, New York, 1977.
- [17] Insperger, T., Stepan, G.: Semi-discretization method for delayed systems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 55, 503-518, 2002.
- [18] Insperger, T., Stepan, G., Bayly, P. V., Mann, B. P.: Multiple chatter frequencies in milling processes, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 262, Issue 2, 333-345, 2003.
- [19] Insperger, T., and Stepan, G.: Vibration frequencies in high-speed milling processes or a positive answer to Davies, Pratt, Dutterer and Burns, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 126, 481-487, 2004.
- [20] Insperger, T., Stepan, G., Turi, J.: On the higher-order semi-discretizations for periodic delayed systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 313, 334-341, 2008.
- [21] Kienzle, O.: Spezifische schnittkräfte bei der metallbearbeitung, *Werkstattstechnik und Maschinenbau*, Vol. 47, Issue 1, 224-225, 1957.
- [22] Merdol, S. D., Altintas, Y.: Multi frequency solution of chatter stability for low immersion milling, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 126, Issue 3, 459-466, 2004.
- [23] Muñoz, J.: Desarrollo de un Modelo General para la Predicción de la Estabilidad del Proceso de Fresado. PhD Thesis, *University of Mondragon*, 2007.
- [24] Shi, H. M., and Tobias, S. A.: Theory of finite amplitude machine tool instability, *Int. J. of Machine Tool Design and Research*, 24, 45-69, 1984.
- [25] Stepan, G.: Retarded Dynamical Systems, *Longman*, London, 1989.
- [26] Szalai, R., Stepan, G., and Hogan, S.J.: Global dynamics of low immersion high-speed milling, *CHAOS* Vol. 14, No4, 1069-1077, 2004.
- [27] Tlustý, J., and Spacek, L.: Self-excited vibrations on machine tools (in Czech), *Nakl CSAV*, Prague, 1954.
- [28] Tobias, S. A.: Machine Tool Vibrations, *Blackie*, London, 1965.
- [29] Zatarain, M., Muñoz, J., Peigné, G. and Insperger, T.: Analysis of the Influence of Mill Helix Angle on Chatter Stability, *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, Vol. 55, Issue 1, 365-368, 2006.