

AZ ELLENÁLLÁSTÉNYEZŐ MEGHATÁROZÁSA NEM- NEWTONI KÖZEGBEN

DETERMINATION OF THE DRAG COEFFICIENT IN NON- NEWTONIAN MEDIA

Vadászné Bognár Gabriella, Dr. habil., Miskolci Egyetem, Gép- és Terméktervezési Tanszék

ABSTRACT

Our aim is to determine the drag coefficient above a moving solid in the boundary layer flow of non-Newtonian media. Applying the similarity method, the two independent variables are combined to form a new variable in order to transform the continuity and momentum equation into an ordinary differential equation.

1. BEVEZETÉS

Számos elméleti és numerikus módszer alkalmazható folyadékok áramlási jellemzőinek vizsgálatára és arra, hogy meghatározzuk, milyen hatást gyakorolnak a gyártási folyamatra és a gépszerkezetek működésére. Komplex, a gyártási folyamatokra érvényes prediktív modellek általában nem ismertek, a gyakorlat nagyobb részt empirikus. A fizikai és matematikai modellek azonban elősegítik, hogy betekintést nyerjünk a gépelemek működésébe és a végtermékre hatással bíró folyadék áramlási jellemzőibe. Fontos, hogy megismerjük az alapegyenletek és a peremfeltételek által meghatározott folyadékáramlási mechanizmusokat és az egyes paraméterek hatását, hogy befolyásolni tudjuk azok hatását.

Kenés, terjedés, polimer bevonat készítés és a polimer feldolgozás, vékony film előállítás és öntés, valamennyi fontos alkalmazási területe a szilárd felület melletti áramlásnak. Az elmozduló gépelemek határfelületei között a kenőanyagok rugalmas kapcsolatot teremtenek, amelyek a tribológiai rendszer paramétereitől függően fejtik ki hatásukat. A korszerű kenőolajok alapolajból és különböző funkciójú adalék anyagokból állnak. Az 1960-as évektől kezdve széles körben elterjedt, hogy az alapolajokhoz polimer adalékokat adnak, így javítva a kenőanyagoknak a felhasználás szempontjából fontos

tulajdonságait. Ezek az oldatok viszkozitás szempontjából nem-newtoni viselkedést mutatnak az ásványi olajokkal ellentétben, melyeket newtoni folyadéknak lehet tekinteni. A kenőolajok viszkozitásának jellemzésére a modell egyszerűsége miatt a nem-newtoni hatvány törvényt alkalmazzák. Napjainkban a tribológia egyik gyakran vizsgált területe a nem-newtoni hatásnak a kenőanyag áramlási jellemzőkre gyakorolt befolyása kenőfilmek, nyomott csapágyak, siklócsapágyak és görgőcsapágyak esetén [7]. Az alapegyenletek és a peremfeltételek bonyolultsága miatt analitikus módszerek a feladatok megoldására csak nagyon kevés gyakorlati esetben alkalmazhatók. Bár a numerikus eljárások széles körben elterjedtek, az analitikus megoldások rendkívül értékesek, mivel általuk numerikus modellek igazolhatók, az áramlási mechanizmusokra alapvető információkat nyújtanak és mennyiségi eredményeket is adnak az egyes komponensekre.

2. HATÁRRÉTEG EGYENLETEK

Prandtl elméletének alkalmazásával a Navier-Stokes-egyenletek egyszerűbb alakú differenciálegyenletekre redukálhatók, amelyeket határréteg egyenleteknek nevezünk [6]. A Prandtl-féle határréteg elmélet szerint a szilárd felület és a folyadék viszonylagos mozgásakor az áramlási tér két tartományra osztható. Az egyik a szilárd felület környezetében kialakuló vékony határréteg, amelyben a súrlódás jelentős szerepet játszik. A határrétegen kívül esőtartományban a súrlódás elhanyagolható, a mozgás az ideális folyadékokra érvényes törvények szerint megy végbe. A fal melletti rétegben a newtoni, vagy nem-newtoni viszkozus feszültségek játszanak szerepet, míg a határrétegen kívül ezek a feszültségek elhanyagolhatók a nyírósebesség kis értékei

miatt. A határréteg általában igen vékony az "objektum" méretéhez viszonyítva.

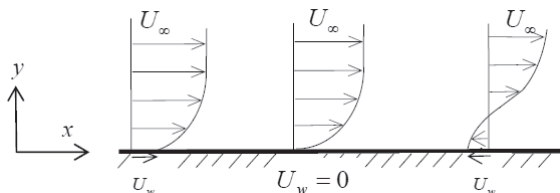
Tapasztalat szerint a folyadékok jelentős része nem-newtoni viselkedést mutat (pl. kenőanyagok, műanyag olvadékok és különbözőzagyok). Ilyen anyagoknál a τ nyírófeszültség és a $\partial u / \partial y$ nyírósebesség közötti viszonyt a $\tau = \mu_{app} \partial u / \partial y$ egyenlőség-gel jellemzik a μ_{app} látszólagos viszkozitást alkalmazva. Nem-newtoni folyadékok reológiai jellemzésére leggyakrabban használt modell a

$$\mu_{app} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1},$$

ún. Ostwald-de Waele hatványtörvény modell, amelynél a nyírófeszültség és a nyírósebesség kapcsolata a

$$\tau = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}$$

összefüggéssel adott, ahol K a konzisztencia állandó és n a folyási kitevő, vagy hatványkitevő [1]. Az $0 < n < 1$ eset a pszeudoplasztikus folyadéknak (pl. kenőanyagok, polimerek), az $n > 1$ eset a dilatáns folyadéknak (pl. zagyok) felel meg. Ha $n = 1$, akkor a newtoni közegre érvényes összefüggést kapjuk.



1. ábra Sebességprofilok a határrétegben

Összenyomhatatlan, nem-newtoni közegben síklappal párhuzamos, attól távol, a zavartalan áramlásban U_∞ állandó sebességű, lamináris áramlásban a folytonossági és a mozgásegyenlet az alábbi alakban írták fel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = K \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Az egyenletrendszerhez a szilárd felületen, és attól távol a sebesség-komponensekre feltételeket írunk elő:

- a tapadás törvényének érvényesülését feltéve $u(x, 0) = 0$ rögzített felületre és $u(x, 0) = U_w$

az U_w sebességgel x irányban mozgó felületre, ahol $U_w > 0$, ha a felület a x irányban mozog;

- $v(x, 0) = 0$ át nem eresztő felület és $v(x, 0) = v_w(x)$ átteresztő (permeabilis) felület esetén, ahol v_w az a felületen átáramló közeg sebességét jelöli;

- a felülettől távol $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U_\infty$, ha a

közeg x irányú áramlási sebessége U_∞ és $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$ nyugvó közeg esetén.

Bevezetve a ψ áramfüggvényt az

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

egyenletekkel a folytonossági egyenlet automatikusan teljesül és a mozgásegyenlet az alábbi alakba hozható:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right]. \quad (1)$$

Ha a ψ áramfüggvényt, valamint az η és f hasonlósági változókat a

$$\psi(x, y) = (K/\rho)^{\frac{1}{n+1}} U_\infty^{\frac{2n-1}{n+1}} x^{\frac{1}{n+1}} f(\eta),$$

$$\eta = (K/\rho)^{-\frac{1}{n+1}} U_\infty^{\frac{2-n}{n+1}} y x^{-\frac{1}{n+1}}$$

alakban vesszük fel, akkor az (1) egyenlet és a peremfeltételek helyett az

$$\left(|f''|^{n-1} f'' \right)' + \frac{1}{n+1} f f'' = 0, \quad (2)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -\lambda, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1, \quad (3)$$

nemlineáris közönséges differenciálegyenlet peremérték feladata adódik, ahol a deriváltak az η változó szerinti deriváltakat jelölik és $\lambda = U_w / U_\infty$ a sebességhányados. Ha $n = 1$, akkor (2) a Blasius-egyenlettel egyezik meg.

Ekkor a sebességkomponensek η és f alkalmazásával kifejezhetők

$$u(x, y) = U_\infty f'(\eta),$$

$$v(x, y) = v^*(x) [\eta f'(\eta) - f(\eta)],$$

ahol

$$v^*(x) = \frac{U_\infty}{n+1} \operatorname{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}} \text{ és } \operatorname{Re}_x = \frac{\rho U_\infty^{2-n} x^n}{K}.$$

Az f függvény ismeretében kapott $f''(0) = \gamma$, a fal melletti sebességgradiens, amelynek meghatározása vizsgálataink egyik főcélja. Az áramlásba helyezett testre ható, a zavartalan hozzááramlás sebességével párhuzamos ellenállás erőrsége a felületi súrlódásból származó erő, amelynek meghatározásához a $C_{D,\tau}$ dimenziómentes ellenállás tényezőt használjuk, melynek értéke az adott peremfeltételek mellett függ a Reynolds számtól. Az általunk vizsgált γ értékkel tudjuk meghatározni az ellenállás tényezőfali csúsztatófeszültségből származó részét:

$$C_{D,\tau} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \operatorname{Re}_x^{-\frac{n}{n+1}} |\gamma|^{n-1} \gamma,$$

a fal melletti nyírófeszültséget:

$$\tau_w(x) = \left[\rho^n K U_\infty^{3n} x^{-n} \right]^{\frac{1}{n+1}} |\gamma|^{n-1} \gamma$$

és a felületi súrlódási tényezőt.

3. TÖPFER-MÓDSZER

A peremérték feladatok analitikus és numerikus megoldása nehéz, a megoldások sok esetben nem is egyértelműek. Az $n=1$, $\lambda=0$ esetre ismertett Töpfer-módszer [9] általánosítható tetszőleges n folyási kitevőre. A (2), (3) peremérték feladat átalakítható a

$$\left(|g''|^{n-1} g'' \right)' + \frac{1}{n+1} g g'' = 0, \quad (4)$$

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 1 \quad (5)$$

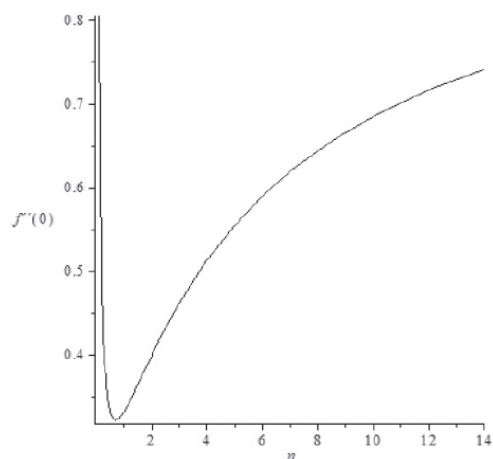
kezdetiérték feladattá, amely egyértelműen megoldható [2]. Innen

$$f(\eta) = \gamma^{(2n-1)/3} g(\gamma^{(2-n)/3} \eta),$$

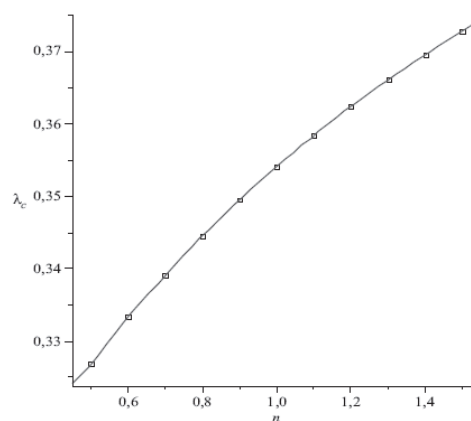
amely $n=1$ esetén megegyezik a Töpfer-féle transzformációval [9]. Az $f''(0) = \gamma$ fal melletti sebességgradiens a g megoldásból számítható:

$$\gamma = \lim_{\eta^* \rightarrow \infty} \left[g'(\eta^*) \right]^{\frac{n+1}{3}}.$$

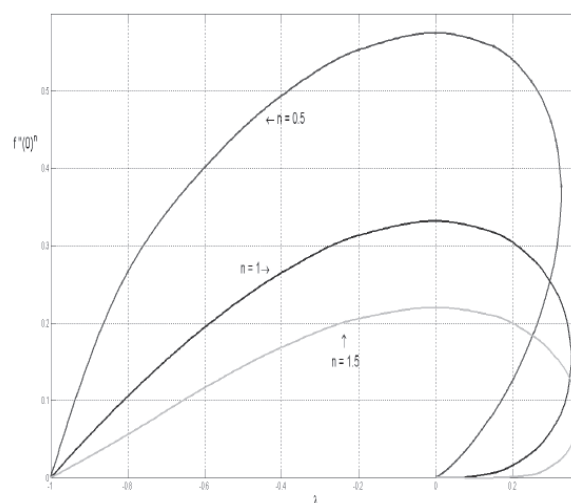
A (4)-(5) kezdetiérték feladat megoldásaiból kapjuk meg f -re a megoldásokat [2].



2. ábra A fal melletti $f''(0) = \gamma$ sebességgradiens paraméter n -től függően



3. ábra λ_c változása n -nel



4. ábra Az ellenállás tényező paraméterének változása λ -val különböző n -ekre

4. A HATÁRRÉTEG VIZSGÁLATA MOZGÓ FELÜLETEN

Áramló közegben mozgó felületen kialakuló határréteg jelensége több gyártási folyamatnál előfordul, pl. kenésmélemben, polimer filmek, vagy lemezek hűtése esetén. 1968-ban Steinheuer [8] vizsgálta mozgó síkfelületen newtoni közegben kialakuló határréteg áramlás hasonlósági modelljét, ha a lap mozgásának iránya és az áramlás iránya megegyező, vagy ellentétes; bár az irodalomban többnyire Klemp és Acrivos [5] 1972-ben megjelent cikkét említik. A numerikus eredmények alapján mindkét cikkben megállapították, hogy newtoni közegben ellentétes irányú mozgáskor hasonlósági megoldás csak a két sebesség hányadosának egy bizonyos értékéig létezik. Blasius-féle problémához a megoldások nem egyértelműek, ha a felület állandó U_w sebességgel a síklemezzel párhuzamos U_∞ sebességű áramlással ellentétes irányban mozog. Pozitív $\lambda = U_w/U_\infty$ hányados esetén két megoldás létezik mindaddig amíg λ kisebb, mint egy kritikus érték ($\lambda_c = 0,3541$), ettől nagyobb értékre hasonlósági megoldás nincs.

Nem-newtoni hatványközegre a jelenség hasonlósági megoldásainak vizsgálata [3]-ben megtalálható. A numerikus számítások nem-newtoni esetre is azt mutatják, hogy minden n hatványkitevőhöz megadható egy λ_c kritikus érték, továbbá hasonlósági megoldás csak akkor van, ha $\lambda < \lambda_c$. Ha $\lambda > \lambda_c$ az áramlás leválik, a határrétegbeli közelítések tovább már nem alkalmazhatóak.

A (2), (3) peremértékfeladat megoldására kidolgozott iteratív eljárással meghatározható az $f''(0)$ értékeket n és λ paraméterekhez. Megmutatható, hogy λ_c értéke nő, ha n növekszik (3. ábra). Numerikus számítások alapján bemutatható, hogy $[f''(0)]^n$ hogyan változik λ -tól különböző n -ekre (4. ábra) [4]. A nyírófeszültségben szereplő $f''(\eta)$ grafikonjainak változását különböző λ értékekre ábrázolva megállapítható, hogy f'' negatív λ esetén szigorúan monoton csökken, míg pozitív λ esetén maximumát a határrétegből veszi fel. A λ_c értékekre adott felsőbecslések eredményét összegzi [3].

5. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A cikkben/előadásban/tanulmányban ismertetett kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 projekt eredményeire alapozva a TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0002 jelű "Járműipari felsőoktatási és kutatási együttműködés" projekt részeként – az Új Széchenyi Terv keretében – a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

6. IRODALOM

- [1] Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N.: *Transport Phenomena*, John Wiley, 1960.
- [2] Bognár G.: Similarity solutions of boundary layer flow for non-Newtonian fluids, *Int. J. Nonlinear Sci. Numerical Simulations*, 10 (2009), 1555-1566.
- [3] Bognár G.: On similarity solutions to boundary layer problems with upstream moving wall in non-Newtonian power-law fluids, *IMA J. Applied Mathematics*, (2011) 1-17.
- [4] Bognár G., Csáti Z.: Iterative transformation method for the generalized Blasius equation, XXVI microCAD International Scientific Conference, Miskolc, 29-30 March 2012, E10
- [5] Klemp, J.B., Acrivos, A.A.: A method for integrating the boundary-layer equations through a region of reverse flow, *J. Fluid Mech.*, 53 (1972), 177-199.
- [6] Schlichting H., Gersten K.: *Boundary Layer Theory*, 8th revised and enlarged ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2000.
- [7] Shukla J. B.: Theory for the squeeze film for power law lubricants, *ASME Paper* 64-Lub-4, 1964.
- [8] Steinheuer J.: Die Lösungen der Blasiuschen Grenzsichtdifferentialgleichung, *Abhandlg. der Braunschweigischen Wiss. Ges.*, 20 (1968), 96-125.
- [9] Töpfer K.: Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius: Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Z. Math. Phys.*, 60 (1912), 397-398.