

# SZERSZÁMPROFILOK ELŐÁLLÍTÁSA FELÜLETMETSZŐ MÓDSZERREL

## GENERATION OF TOOL PROFILES BY SURFACE INTERSECTION METHOD

Hegedűs György, egyetemi docens, Takács György, egyetemi docens  
Miskolci Egyetem, Szerszámgépek Tanszéke

### ABSTRACT

This paper presents a surface intersection method on the tool profiles generation. The intersection curves are generated by numerical algorithm, where the curves are solutions of an ordinary differential equation system. The initial value problem solved by 4<sup>th</sup> order *Runge-Kutta* numerical method. The final approximated tool profile is a piecewise interpolating cubic *Bezier* curves and an approximating ellipse-arc with appropriate connectivity condition.

### 1. BEVEZETÉS

A megmunkálási pontosság növelése, valamint a mellékidő csökkentése iránti igény fokozódásával párhuzamosan jelentek meg a golyós- illetve görgősorsók a szerszámgépek mellékajtműveiben. Kedvező tulajdonságai miatt a golyósorsók gyorsan terjedtek, miközben újabb és újabb változatok kerültek bevezetésre.

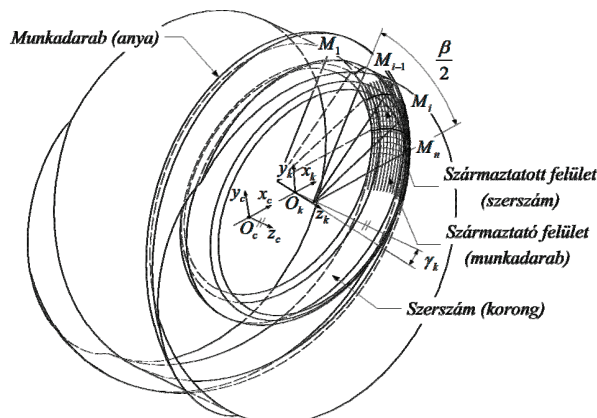
A precíziós golyósorsókat *CNC* vezérlésű soros és párhuzamos kinematikájú szerszámgépek mellékajtműveiben alkalmazzák. Minden mellékajtmű egy összetett rendszer, melyek eredő pontossága adódik az egyes gépelemek, szabályozóelemek, valamint a vezérlések pontosságának összegével. A szabályozás- és vezérléstechnika rohamos fejlődésével ezen elemek pontossága is folyamatosan javul. A mechanikus elemek gyártási pontossága nemcsak a helyes gyártástechnológia megválasztásától, hanem a munkadarab felületének előállításához szükséges pontos geometriát magán hordozó szerszámtól is függ. A forgácsolással előállított munkadarab felületét a szerszám származtató felületének eredményeként kapjuk meg, mely a szerszám burkolófelületeként jön létre annak mozgása során. Számos tanulmány foglalkozik a munkadarab felületének származtatásával koordinátatranszformációt és differenciálgeometriai megközelítést alkalmazva. Ezeket a matematikai módszereket fogas- és csigakerék-hajtásoknál számos kutató vizsgálta, ahol a fogfelülethez kapcsolódó felületpár matematikai

leírásának az előállítása volt a cél [1],[2],[6]. Az egyre szélesebb körű eredményeknek köszönhetően arra a következtetésre jutottak, hogy a bonyolult analitikus valamint numerikus számítások helyett a kapcsolódási viszonyokat kinematikai módszerrel vizsgálják, leegyszerűsítve a vizsgálatokat. A generáló felület meghatározására több módszert is kidolgoztak, az utóbbi években a számítógéppel segített modellezés eszközeinek alkalmazása is előtérbe került [5],[7].

Jelen cikkünkben a szerszámprofilok meghatározását felületek metszéseiével állítjuk elő numerikus matematikai módszereket alkalmazva.

### 2. A MATEMATIKAI MODELL ISMERTETÉSE

A modell megalkotásához ismernünk kell a kívánt geometriai pontosságú munkadarabot és a szabályozatlan szerszám kiinduló méreteit. A munkadarab és a szerszám egymáshoz viszonyított térbeli helyzete (fogásvétel, korongdöntési szög) ismert. Tegyük fel, hogy az 1. ábra koordinátarendszereinek  $x_c$  és  $x_k$  tengelyei egybeesnek, ahol  $x_c$  a munkadarabhoz,  $x_k$  a szerszámhoz rendelt koordinátarendszerek tengelyei.



1. ábra. A profil meghatározásához alkalmazott modell

Az  $\overline{O_c O_k}$  szakasz hossza a szerszám átmérőjéből és a fogásvétel nagyságából meghatározható.

A  $\gamma_k$  korongdöntési szöget a  $z_c$  és  $z_k$  tengelyek között értelmezzük az  $y_k$ - $z_k$  síkban. Menetkösörüléskor a golyósanya teljes menetfelületének megmunkálásakor egy fogásvétel alatt ezek a paraméterek állandók. A szerszámprofil a munkadarab elméleti méreteiből és az előzetesen meghatározott korongdöntési szög alapján származtatjuk. Ha a valóságban így állítanánk elő a szerszámprofil, akkor a szerszám folyamatos forgó mozgást végezne és a kívánt profil a szerszám egy teljes körülfordulása alatt előállna minden tengelymetszetben. A szerszám és a munkadarab a  $\beta$  szöggel jellemezhető tartományban érintkezik, ezért ha a szerszám elfordulása ezt az értéket elérte, már található legalább egy olyan síkmetszet, amely a szerszámprofil tartalmazza. Jelen esetben a szerszám nem csak a forgástengelyére szimmetrikus, hanem az  $x_k$  és  $y_k$  tengelyekkel megadott szimmetriasíkra. Ezért a származtatott szerszámprofil szintén szimmetrikus lesz, így az már  $\beta/2$  szögtartomány alapján meghatározható. Mivel a származtatott felület (szerszám) forgásfelület ezért a szerszám helyettesíthető egy félsíkkal. A szerszámprofil származtatásához ennek a félsíknak és a származtatott felületnek a síkmetszeteit kell meghatároznunk. A származtatási eljárás során a profil meghatározásához  $n$  számú metszet előállítására van szükség. A szerszámprofil közelítő megoldását oly módon keressük, hogy a félsíkot elforgatjuk diszkrét lépésekben a  $\beta/2$  tartományban, és az így kapott síkmetszetekből állítjuk azt elő. A metszetek előállítása numerikus eljárással történik, azonban az eljárás elindítása előtt szükséges a  $\gamma_k$  korongdöntési szög és a  $\beta$  átfogási szög meghatározása is, ezek ismertetését jelen cikkben nem részletezzük.

### 3. A METSZETEK NUMERIKUS ELŐÁLLÍTÁSA

A numerikus kontinuitási módszerek az egyparaméteres, többváltozós egyenletrendszerek megoldását követik, ahol a paraméter folyamatosan vagy közel folyamatosan változik. Az ilyen egyenletrendszereket a  $\mathbf{H}(\mathbf{y}, \lambda) = 0$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alakban írhatjuk fel. Általában  $m = n$ , így az  $n$  egyenlet és  $n+1$  ismeretlen, valamint a célszerűen rögzített  $\lambda$  paraméterértéknél az egyenletrendszer négyzetessé és határozottá válik. Ahogy a  $\lambda$  paraméterérték változik, az egyenletrendszerek megoldásai egy megoldásgörbét írnak le az  $\mathbb{R}^n$  tartományban. Az  $m < n$  esetben az egyenletrendszer alulhatározottá, az  $m > n$  esetben túlhatározottá válik, ezért más eljárást kell alkalmazni, ilyen lehet a legkisebb négyzetek módszere Moore-Penrose pszeudo inverz használatával. A kontinuitási módszer alkalmazásakor a többváltozós  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n) = 0$  egyenletrendszer megoldásához

definiáljuk a  $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0$  egyenletrendszert úgy, hogy annak megoldását már ismerjük, vagy könnyen előállítható. A homotópiás egyenletrendszer a  $\mathbf{H}(\mathbf{y}, \lambda) = (1-\lambda) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{y}) + \lambda \cdot \mathbf{P}(\mathbf{y})$  alakban írható fel, ahol  $0 \leq \lambda \leq 1$ . A származtatott és származtatott felület közös részének meghatározásához a kontinuitási problémát egy közös egyenletrendszerrel megoldható kezdeti értékfeladatként állítjuk elő. Az ilyen módon előállított megoldáshoz szükséges feltétel, hogy  $m < n$ . Ebben az esetben a  $\lambda$  paraméter kizárható, így az  $n$  egyenletből és  $n+1$  ismeretlennel álló egyenletrendszert kapjuk. Geometriailag  $n$  számú hiperfelületet írunk le  $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben, ahol a megoldáshalmaz egy görbe  $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben. Az egyenletrendszer teljes differenciálásával az

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_{n+1}} dy_{n+1} = 0, \\ df_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial y_{n+1}} dy_{n+1} = 0, \\ &\vdots \\ df_n &= \frac{\partial f_n}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_{n+1}} dy_{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

differenciálegyenlet-rendszert kapjuk. A  $d\mathbf{y} = [dy_1, dy_2, \dots, dy_n]$ , valamint a  $f_i$  függvény gradiensét a  $\nabla f_i = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \frac{\partial f_i}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial y_{n+1}} \right]$  alakban felírva, majd behelyettesítve az (1) egyenletrendszerbe

$$\begin{aligned} df_1 &= \nabla f_1 \cdot d\mathbf{y} = 0, \\ &\vdots \\ df_i &= \nabla f_i \cdot d\mathbf{y} = 0, \\ &\vdots \\ df_n &= \nabla f_n \cdot d\mathbf{y} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

differenciálegyenlet-rendszert kapjuk. A fenti egyenletek geometriailag azt jelentik, hogy a  $d\mathbf{y}$  megoldás érintője ortogonális a  $\nabla f_i$  gradiensekre. Vagyis, ha található egy irányvektor, hogy az ortogonális minden gradiensre, akkor a megoldásgörbe felrajzolható követve ezt az irányvektort. Az irányvektor meghatározásakor ismert  $n$  független  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ , vektor az  $n+1$  dimenziós térben és egyértelműen meghatározható az  $n$  vektorokra ortogonális irány a

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_i & \dots & \mathbf{e}_{n+1} \\ & & v_1 & & \\ & & \vdots & & \\ & & v_i & & \\ & & \vdots & & \\ & & v_n & & \end{vmatrix} \quad (3)$$

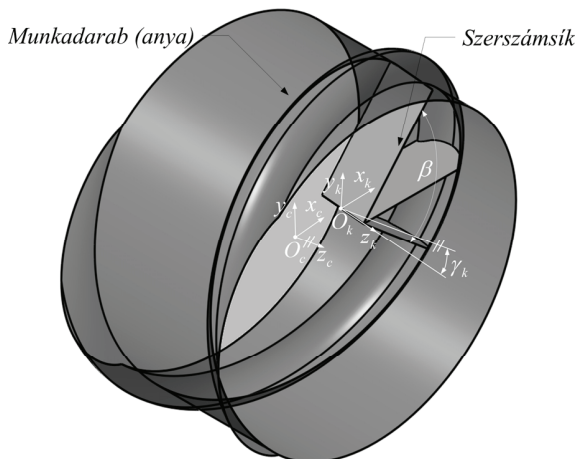
determináns meghatározásával. A fentiek figyelembevételével a  $d\mathbf{y}$  függvényt érintő megoldásgörbe irányvektora a gradiens bevezetésével a

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n) = \det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_i & \dots & \mathbf{e}_{n+1} \\ & & \nabla f_1 & & \\ & & \vdots & & \\ & & \nabla f_i & & \\ & & \vdots & & \\ & & \nabla f_n & & \end{vmatrix} \quad (4)$$

alakban állítható elő. Mivel ez az irányvektor  $d\mathbf{y} = \eta \cdot \mathbf{W}$  a megoldásgörbe pontbeli érintőjével párhuzamos, a kontinuitási feladat egyenértékű a

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \eta \cdot \mathbf{P}(\nabla f_1, \dots, \nabla f_i, \dots, \nabla f_n) \quad (5)$$

differenciálegyenlet-rendszer megoldásával, ahol  $\eta$  egy alkalmasan választott skalár. Alkalmazzuk a fent leírt kontinuitási módszert két felület metszésgörbéjének meghatározásához. A kezdeti érték feladat megoldásához szükségünk van a szerszámsík korongdöntés utáni egyenletére, valamint az anyaprofil leíró felületek egyenleteire. Az egyenleteket paraméteres (*implicit*) formában felírva három egyenletet kapunk, négy változóval.



2. ábra. A koordinátarendszerek és paraméterek értelmezése

A szerszámsík paraméteres egyenlete az

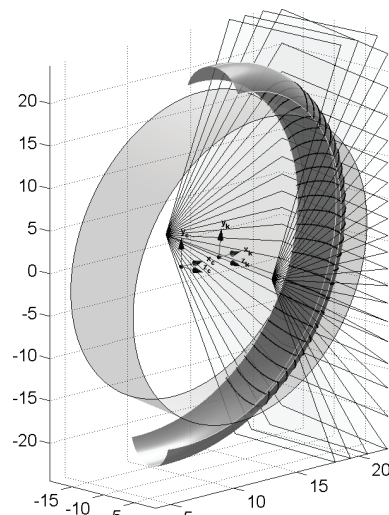
$$\mathbf{S}_k(q, t) = \mathbf{O}_k + q \cdot \mathbf{v}_k + t \cdot \mathbf{x}_c \quad (6)$$

alakban írható fel, ahol  $q$  és  $t$  a megfelelő paraméterek (2. ábra). A golyósánya csavarfelületeinek egyenletei

$$\mathbf{F}_{c,1}(u, v_1) = \mathbf{h}(u) + R_{pr} [\mathbf{b} \cdot \sin(v_1) - \mathbf{n} \cdot \cos(v_1)], \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_{c,2}(u, v_2) = \mathbf{h}(u) + R_{pr} [\mathbf{b} \cdot \sin(v_2) - \mathbf{n} \cdot \cos(v_2)]$$

alakban állnak elő, ahol  $v_1, v_2$  a csavarfelületek paraméterei,  $\mathbf{h}(u)$  az anyamenet csavarvonalának egyenlete,  $\mathbf{b}$  a binormális és  $\mathbf{n}$  a normális egységvektor. Felírva a korábban ismertetett differenciálegyenlet-rendszerből előállított kezdeti érték feladatot és felhasználva az ismert paramétereket a síkmetszetek előállíthatók.



3. ábra. A kezdeti érték feladat megoldásaiaként előállított metszetek

A felületek metszéseiével létrehozott síkgörbékét a 3. ábra szemlélteti.

#### 4. A PROFIL KÖZELÍTÉSE

A származtatás során előállított szerszámprofilok az ideálistól eltérő korongdöntési szög miatt alámetszéssel rendelkeznek. A szerszámprofil végleges közelítését ezért két külön szakaszon végezzük. Az alámetszéses tartományon szakaszonként interpoláló másodrendben folytonos görbék közül választhatunk. Egy ilyen lehetséges görbe a *Bezier* görbe, melynek parametrikus előállítását a

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) \cdot \mathbf{P}_i, \quad t \in [0, 1] \quad (8)$$

képlettel definiálhatjuk, ahol  $\mathbf{P}_i$  a görbe vezérlő-pontja. Az  $n$ -ed fokú  $b_{i,n}(t)$  *Bernstein* polinom az

$$b_{i,n}(t) = \mathbf{C}_{i,n} \cdot t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 1 \dots n, \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_{i,n} = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

összefüggés szerint számítható, ahol  $\mathbf{C}_{i,n}$  a binomiális együttható. Az alámetszés nélküli tartományon ismert pontokra illeszkedő ellipszisívvel közelítjük a profilt. A kúpszelet általános másodfokú polinommal leírható implicit egyenlete

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (10)$$

ahol  $a, b, c, d, e, f$  az egyenlet együtthatói  $x$  és  $y$  a kúpszelet pontjainak koordinátái. Ellipszisenél érvényes, hogy

$$b^2 - 4ac < 0. \quad (11)$$

Az ismert  $(x_i, y_i), i = 1 \dots n$  pontokra illeszkedő ellipszis egyenlete a pontok algebrai távolságának négyzetösszege minimalizálásával az együtthatóvektor alapján

$$\min \sum_{i=1}^n (F(\mathbf{x}_i))^2 = \min \sum_{i=1}^n (F(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{a}))^2 \quad (12)$$

módon áll elő [3]. Az  $\mathbf{a}$  együtthatóvektor skálázásával az egyenlőtlenség átírható

$$b^2 - 4ac = 1, \quad (13)$$

ekkor az érvényes approximációs feladat

$$\min \|\mathbf{X} \cdot \mathbf{a}\|^2, \quad (14)$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = 1$$

alakú, ahol  $\mathbf{X}^{n \times 6}$  az adatmátrix és  $\mathbf{C}^{6 \times 6}$  a kényszermátrix. A Lagrange multiplikátor alkalmazásával az  $\mathbf{a}$  optimális megoldásra a fenti feltételekkel

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}, \quad (15)$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = 1,$$

ahol  $\mathbf{S}^{6 \times 6}$  az eloszlási mátrix. A (15) sajátértékfeladatot megoldva a legjobb közelítést a legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektor szolgáltatja az együtthatóvektorra nézve. A fentebb bemutatott megoldás egyik hátránya, hogy a numerikus eljárás instabillá válhat, ezért további átalakítások szükségesek [4]. Ezeket alkalmazva a sajátértékfeladat megoldását előállító egyenletrendszer

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_1 = \lambda \cdot \mathbf{a}_1, \quad (16)$$

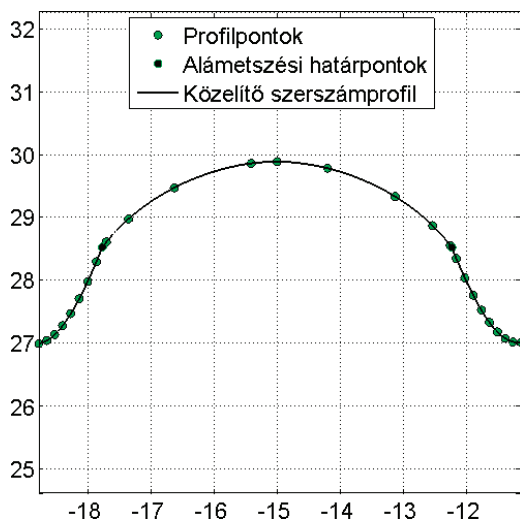
$$\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1,$$

$$\mathbf{a}_2 = -\mathbf{S}_3^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{a}_1$$

alakban írható fel, ahol  $\mathbf{M}^{3 \times 3} = \mathbf{C}_1^{-1} \cdot (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T)$  csökkentett eloszlási mátrix. A numerikusan stabil megoldást a (16) egyenletrendszer  $\mathbf{M}$  mátrixának  $\mathbf{a}_1$  sajátvektorához tartozó  $\lambda$  sajátérték szolgáltatja.

## 5. EREDMÉNYEK

Az előző fejezetben ismertetett képleteket és a származtatott pontokat felhasználva az adott méretű munkadarab forgácsolásához szükséges közelítő szerszámprofil előállítható.



4. ábra. A származtatott közelítő szerszámprofil

A 4. ábra a származtatott szerszámprofil ábrázolja egy  $50 \times 30$  méretű golyósanyánál. Az eredményből határozottan látható a korongdöntési szög ideális értéktől való eltérése miatti alámetszés.

## 6. KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

## 7. SUMMARY

A surface intersection method was presented on the generation of tool profile for ball nut internal grinding. The method applies different numerical methods and algorithms. This novel tool profile determination method is suitable not only for ball nuts but other gear or worm surfaces as well. The future work is to determine and compare the different solutions.

## 8. IRODALOM

- [1] Dudás I.: The Theory and Practice of Worm Gear Drives, Butterworth-Heinemann, 2004, ISBN 978-1-903996-61-4. p.320.
- [2] Dudás L.: New way for the innovation of gear types, Engineering the Future, Chapt. 6. Sciyo, Croatia, 2010, ISBN 978-953-307-210-4 pp.111-140.
- [3] W. Gander, G. H. Golub, R. Strelbel: Least-squares fitting of circles and ellipses, BIT Numerical Mathematics, 1994, Volume 34, Number 4, 558–578
- [4] R. Hal, J. Flusser: Numerically stable direct least squares fitting of ellipses, The 6th International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization, 21 (5), 1998, pp.59-108.
- [5] S. Kaldor, A.M. Rafael, D. Messenger: On the CAD of profiles for cutters and helical flutes—geometrical aspects, Annals of the CIRP 37 (1) (1988) 53–56
- [6] F. L. Litvin, A. Fuentes: Gear Geometry and Applied Theory – Second Edition, Cambridge University Press, 2004, ISBN 978-052-181-517-8, p.801
- [7] D.S. Sheth, S. Malkin: CAD/CAM for geometry and process analysis of helical groove machining, Annals of the CIRP 39 (1) (1990) 129–132