

# BURKOLÁSSAL ELŐÁLLÍTOTT DOMBORÍTOTT FOGFELÜLET GÖRBÜLETEINEK MEGHATÁROZÁSA

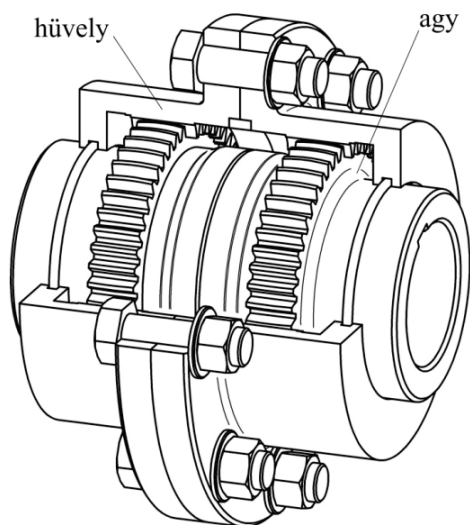
## DETERMINATION OF CURVATURES FOR CROWNED TOOTH SURFACE GENERATED BY ENVELOPING

*Kelemen László, PhD hallgató, Miskolci Egyetem  
Dr. Sente József, PhD, Miskolci Egyetem*

**ABSTRACT.** In this paper a method is presented to determine the principal curvatures and principal directions for crowned tooth surface of gear coupling. The crowned surface is generated by enveloping and the computation of curvatures is based on theory of enveloping and using the motion parameter instead of conventional ideas of differential geometry.

### 1. BEVEZETÉS

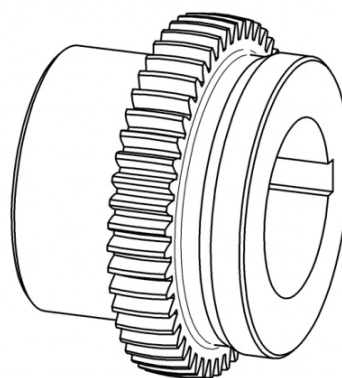
A vizsgálat tárgya a fogasgyűrűs tengelykapcsoló (1. ábra) legbonyolultabb eleme a domborított fogfelületekkel rendelkező agy (2. ábra).



1. ábra. Fogasgyűrűs tengelykapcsoló

A domborított fogfelületek előállítását általában lefejtőmarással történik. A gyártást figyelembe véve, az ideális fogfelületek leírására matematikai modellek készültek [1, 2, 3]. Az összekapcsolt tengelyek egytengelyűségi eltérése esetén a tengelykapcsoló fogfelületei elméletileg pontban érintkeznek. Az érintkezési pontok meghatározására [4] mutat be megoldásokat. A tengelykapcsoló teherbírásának vizsgálatához szükség van az érintkezési pontokban a

főgörbületek és a görbületi főirányok ismeretére, melyek segítségével az érintkezési feszültség kiszámítható.



2. ábra. Domborított fogfelületű agy

A főnormálgörbületek, vagy rövidebben főgörbületek meghatározásának hagyományos módszere a differenciálgeometriából ismert, az alábbi két egyenleten alapuló megoldás:

$$k_I \cdot k_{II} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (1)$$

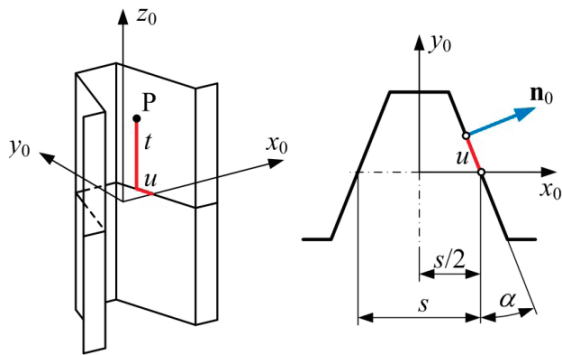
$$k_I + k_{II} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}. \quad (2)$$

(1) a Gauss-féle szorzatgörbület, (2) az összeggörbület, az egyenletekben  $E$ ,  $F$  és  $G$  az első alaplennységek,  $L$ ,  $M$  és  $N$  a második alaplennységek. Az alaplennységek előállításához szükség van a paraméterek szerinti első és második deriváltakra, ami bonyolultabb felületek esetén nehézséget okozhat. A fogaskerekek fogfelületeit legtöbbször lefejtéssel, az egymást kölcsönösen burkoló felületek elvén állítják elő. Ezek a felületek általában kellően bonyolultak ahhoz, hogy a differenciálgeometria módszereivel nehezen kezelhetők legyenek. A probléma megoldására Litvin és Fuentes

könyvében [5] hatékony megoldást találunk. A módszer lényege, hogy a szerszámfelület görbületi jellemzőinek (főgörbületek, görbületi főirányok) ismeretében, a mozgásparáméterek felhasználásával határozzuk meg a lefejtett fogfelület görbületi jellemzőit. Az eljárás gyakorlati alkalmazhatóságát [5] az ívelt fogú kúpkerékek esetében mutatja be.

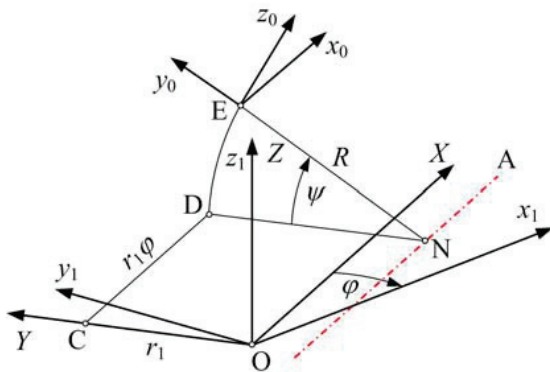
## 2. A SZERSZÁMFELÜLET ÉS AZ ÉRINTKEZÉSI PONTOK

A domborított fogfelület idealizált alakját [3]-ban kétparaméteres burkolással állítottuk elő. Szerszámfelületként az evolvens geometria alapprofiljából készült lökethasáb síkjait, mint lefejtő fogaslécet használtuk (3. ábra).



3. ábra. Lefejtő fogasléc

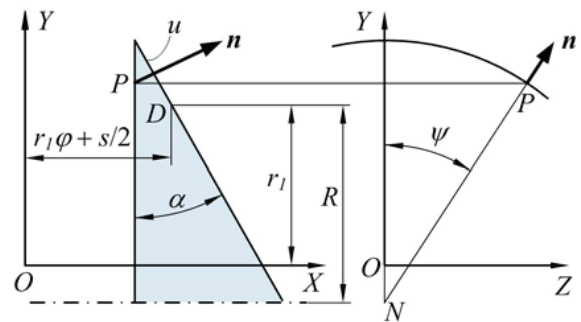
A tagok mozgását az  $S_F(O, X, Y, Z)$  álló koordináta-rendszerben vizsgáltuk (4. ábra). Az  $S_1(O, x_1, y_1, z_1)$  koordináta-rendszer origója azonos az  $S_F$  rendszerével,  $z_1$  tengelye pedig egybeesik a  $Z$  koordináta tengellyel.  $S_1$ -et a fogaskerékhez rögzítettük, azzal együtt forog állandó szögsebességgel a  $Z$  tengely körül. Pillanatnyi elfordulását a  $\varphi$  szög jelöli.



4. ábra. Koordináta-rendszerek és mozgások

Az  $S_0(E, x_0, y_0, z_0)$  koordináta-rendszer a lefejtő fogasléchez kapcsolódik. Azzal együtt forog az  $N$  ponton átmenő,  $X$  tengellyel párhuzamos  $A$  tengely körül, valamint haladó mozgást végez az  $X$  tengely mentén. Adott pillanatban a fogasléc elfordulását a  $\psi$  szög, elmozdulását az  $r_1\varphi$  távolság jellemzi. A 4. ábrán  $r_1$  a fogaskerék osztókör-sugara,  $R$  a domborítás paramétere.

[3]-ban elvégzett vizsgálatokból kiderül, hogy a kétparaméteres modellel egyenértékű megoldást ad egy olyan egyparáméteres modell, melynél a szerszámfelület a lefejtő fogasléc oldalsíkja által a forgó mozgás során sűrölt kúpfelület (5. ábra).



5. ábra. Kúpos szerszámfelület egyparáméteres burkolásnál

A mozgó kúp egyenlete és normálisa az álló  $S_F$  rendszerben a következő:

$$\left. \begin{aligned} X &= r_1 \varphi + s/2 - u \sin \alpha, \\ Y &= (R + u \cos \alpha) \cos \psi - R + r_1, \\ Z &= (R + u \cos \alpha) \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ill.

$$\left. \begin{aligned} n_X &= \cos \alpha, \\ n_Y &= \sin \alpha \cos \psi, \\ n_Z &= \sin \alpha \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Az egyenletekben  $u$  és  $\psi$  a szerszámfelület paramétere,  $s$  a domborított fogfelület fogvastagsága az osztókörön, a középsíkban mérve,  $\alpha$  az alapprofilszög. A további jelölések értelmezése a 5. ábrán látható.

(3) egyenletrendszerhez rendeljük hozzá a kapcsolódás egyenletét, mely

$$\mathbf{v}_{01} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5)$$

alakban állítható elő, és megoldásával összefüggést kapunk a felületparaméterek ( $u$  és  $\psi$ )

valamint a  $\varphi$  mozgásparaméter között, a (10) egyenletnek megfelelően. (5) összefüggésben  $v_{0I}$  a viszonylagos mozgás sebessége,  $\mathbf{n}$  a felület normálisa az érintkezési pontban.

A relatív sebesség:

$$\mathbf{v}_{0I} = \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\omega}_I \times \mathbf{R}_0, \quad (6)$$

ahol  $\mathbf{v}_0$  a szerszámfelület sebessége,  $\boldsymbol{\omega}_I$  az agy szögsebessége,  $\mathbf{R}_0$  az érintkezési pont helyvektora. Ezek meghatározására az alábbi egyenletek szolgálnak:

$$\mathbf{v}_0 = [r_1 \omega \quad 0 \quad 0]^T, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\omega}_I = [0 \quad 0 \quad -\omega]^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_0 = [X \quad Y \quad Z]^T. \quad (9)$$

Az (5) kapcsolódási egyenletet megoldva, a paraméterek között a következő összefüggés adódik:

$$\varphi = \frac{1}{r_1 \tan \alpha} \left( u \cos \alpha - R \frac{1 - \cos \psi}{\cos \psi} \right) - \frac{s/2 - u \sin \alpha}{r_1}. \quad (10)$$

Ez a függvénykapcsolat [3]-ból már ismert, mivel más megfontolással ugyan, de már ott is előállítottuk.

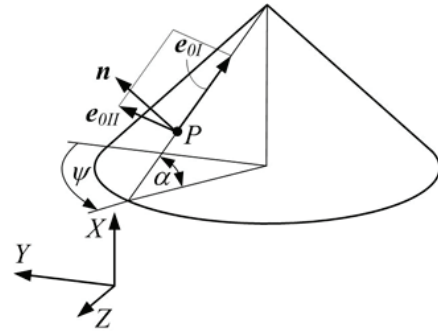
A szerszámfelület és a domborított fogfelület érintkezési pontjait, azaz a kapcsolófelületet az álló  $S_F$  koordinátarendszerben (3) és (10) egyenletek együtt határozzák meg.

A bemutatott megoldás a jobboldali fogfelületre érvényes, ugyanakkor a baloldali fogfelületre a szimmetria alapján könnyen átalakítható.

### 3. A SZERSZÁMFELÜLET GÖRBÜLETEI

Kúpos szerszámfelület esetén a főgörbületi irányok egyike a kúpalkotó mentén, a másik az érintősíkban, rá merőlegesen helyezkedik el. A három egységvektor ( $\mathbf{e}_{0I}$ ,  $\mathbf{e}_{0II}$ ,  $\mathbf{n}$ ) jobbsodrású rendszert alkot (6. ábra).

A főgörbületi irányok egységvektorait a 6. ábra alapján felírva, a következő egyenletek adódnak:



6. ábra. Görbületi főirányok a kúpfelületen

$$\mathbf{e}_{0I} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \cos \psi \\ -\cos \alpha \sin \psi \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_{0II} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \psi \\ -\cos \psi \end{bmatrix}. \quad (12)$$

A főgörbületek az alábbi összefüggésekkel számíthatók:

$$k_{0I} = 0, \quad (13)$$

ill.

$$k_{0II} = -\frac{\sin \alpha}{R + u \cos \alpha}. \quad (14)$$

### 4. A FOGFELÜLET GÖRBÜLETEI

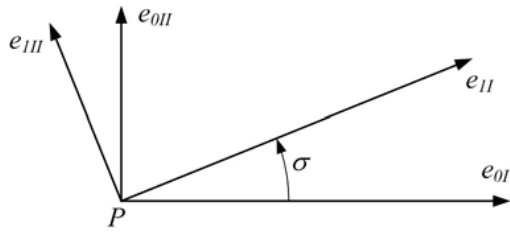
A szerszámfelület főgörbületeinek, valamint görbületi főirányainak ismeretében, továbbá a mozgásparaméterek felhasználásával [6] szerint az alábbi egyenletrendszer állítható elő:

$$\sigma = \frac{1}{2} \arctan \frac{-2c_1 c_2}{c_2^2 - c_1^2 - (k_{0I} - k_{0II}) c_3}, \quad (15)$$

$$k_{1II} = \frac{1}{2} \left( \frac{k_{0I} + k_{0II} + \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_3} + \frac{c_2^2 - c_1^2 - (k_{0I} - k_{0II}) c_3}{c_3 \cos 2\sigma} \right), \quad (16)$$

$$k_{1I} = k_{0I} + k_{0II} + \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_3} - k_{1II}. \quad (17)$$

(15) egyenlettel meghatározzuk a szerszámfelület  $\mathbf{e}_{0I}$  és a munkadarab fogfelületének  $\mathbf{e}_{II}$  első görbületi főirányai között lévő  $\sigma$  szöveget, melyet a 7. ábrának megfelelően értelmezünk.



7. ábra. A főgörbületi irányok kapcsolata

(16) és (17) egyenletek a fogfelület keregett főgörbületi. A számításokhoz az alábbi segédváltozókat használjuk:

$$c_1 = -k_{0I}v_I + (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}_{0I})\mathbf{e}_{0I}, \quad (18)$$

$$c_2 = -k_{0II}v_{II} + (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}_{0I})\mathbf{e}_{0II}, \quad (19)$$

$$c_3 = -k_{0I}(v_I)^2 - k_{0II}(v_{II})^2 + (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}_{0I})\mathbf{v}_{0I} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\omega}_{0I} \times \mathbf{v}_{0I}). \quad (20)$$

Ezekben a kifejezésekben  $v_I$  és  $v_{II}$  a relatív sebesség összetevői a szerszámfelület görbületi főirányainak megfelelő felbontással,  $\boldsymbol{\omega}_{0I}$  a relatív szögsebesség vektor. Meghatározásukra az alábbi kifejezések szolgálnak:

$$v_I = \mathbf{v}_{0I}\mathbf{e}_{0I}, \quad (21)$$

$$v_{II} = \mathbf{v}_{0I}\mathbf{e}_{0II}. \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{0I} = -\boldsymbol{\omega}_1 = [0 \quad 0 \quad \omega]^T. \quad (23)$$

A fogfelület főgörbületi irányait kijelölő egységvektorok a 7. ábra alapján a következők:

$$\mathbf{e}_{1I} = \mathbf{e}_{0I} \cos \sigma + \mathbf{e}_{0II} \sin \sigma, \quad (24)$$

$$\mathbf{e}_{1II} = -\mathbf{e}_{0I} \sin \sigma + \mathbf{e}_{0II} \cos \sigma. \quad (25)$$

Tekintettel arra, hogy ezek a vektorok az álló  $S_F$  koordinárendszerben vannak meghatározva, még át kell térni az agy saját  $S_1$  koordinárendszerébe. A transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{M}_{1F} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

A transzformációt követően a szerszámfelület főirányai módosulnak, azonban a fogfe-

ület főirányaihoz képest viszonylagos helyzetük nem változik meg. Ennek megfelelően az  $S_1$  rendszerben az egyes főirányok egységvektorai:

$$\mathbf{e}_{0I}^{(1)} = \mathbf{M}_{1F}\mathbf{e}_{0I}, \quad (27)$$

$$\mathbf{e}_{0II}^{(1)} = \mathbf{M}_{1F}\mathbf{e}_{0II}, \quad (28)$$

$$\mathbf{e}_{1I}^{(1)} = \mathbf{e}_{0I}^{(1)} \cos \sigma + \mathbf{e}_{0II}^{(1)} \sin \sigma, \quad (29)$$

$$\mathbf{e}_{1II}^{(1)} = -\mathbf{e}_{0I}^{(1)} \sin \sigma + \mathbf{e}_{0II}^{(1)} \cos \sigma. \quad (30)$$

## 5. AZ EREDMÉNYEK ÖSSZEGZÉSE

Az egymást kölcsönösen burkoló felületek között fennálló összefüggések alapján meghatároztuk a fogasgyűrűs tengelykapcsoló domborított fogfelülettel rendelkező agyának főgörbületi és görbületi főirányait. A módszer tesztelésére Mathcad programmal számításokat végeztünk, melyek igazolták az elmélet helyességét. Az eredmények hasznosíthatók az érintkezési feszültségek számítása során.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A cikkben ismertetett kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 projekt eredményeire alapozva a TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0002 jelű "Járműipari felsőoktatási és kutatási együttműködés" projekt részeként – az Új Széchenyi Terv keretében – a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

## IRODALOM

- [1] Szente J.; Kelemen L.: Mathematical models for tooth surfaces of gear coupling. Design of Machines and Structures. Vol. 2. No 1. (2012). Miskolc. p. 73-82.
- [2] Szente J.; Kelemen L.: Domborított fogazat matematikai modellezése fogasgyűrűs tengelykapcsolókhöz. Gép. LXII. évf. 9-10. szám (2011). p. 47-50.
- [3] Kelemen L.; Szente J.: Domborított fogfelület előállítás kétparaméteres burkolással. Gép. LXIII. évf. 12. szám (2012). p. 57-60.
- [4] Kelemen L.; Szente J.: Analysis of gear meshing for gear coupling. Advanced Engineering. Vol. 6. No. 2 (2012). p. 171-182.
- [5] Litvin F. L.; Fuentes, A.: Gear geometry and applied theory. 2nd Edition. Cambridge University Press, New York. 2004.