

A MÁGNESES TÉR HATÁSA VISZKÓZUS FERROFLUID ÁRAMLÁSÁBAN

THE EFFECT OF THE MAGNETIC POTENTIAL IN THE FLOW OF VISCOSE FERROFLUID

Hriczó Krisztián, PhD *

ABSTRACT

The flow of viscose fluids is very important in engineering practice due to several applications. The aim of this paper is to provide numerical results on the magneto-thermomechanical interaction between heated viscous incompressible ferrofluid and a cold wall in the presence of a spatially varying field. Numerical results are represented for the distributions of velocity and temperature.

1. BEVEZETÉS

Az elmúlt évtizedek egyik népszerű kutatási területe az ipari alkalmazások miatt a viszkózus folyadékok áramlása. Napjainkban kiemelet érdeklődésre tartanak számot a nanofolyadékok, amelyek egy alapfolyadék és valamely fémes vagy nem fémes nanorészecskék homogén keveréke. Azokat a nanofolyadékokat, amelyben a nanorészecskék mágnesezhetőek ferrofluidnak nevezik.

A ferrofluidokat az a tulajdonságuk teszi különlegessé, hogy egyszerre képesek folyadékként és mágneses anyagként is viselkedni, amelyet az ipar számos területén hasznosítanak, úgy, mint járművek vagy elektronikai eszközök hűtése, atomreaktorok üzemeltetés, hőcserélők alkalmazása. A mágnesezhető nanofolyadékok nagyon hasznosak a rákos megbetegedések kezelésénél, sebkezelésnél vagy az MRI felvételek készítésénél, stb [8].

Amikor egy H külső mágneses tér hatása alá helyezzük a mágnesezhető szuszpenziókat, akkor az anyagban levő dipólusok és vonaláramok indukálnak egy M mágneszettséget. Az ilyen közegben kialakuló magneto-hidrodinamikai (MHD) áramlási feladatokat számos esetben vizsgálták végtelennek tekintett síkfelület mentén (lásd [1], [2], [4-6], [9-12], [17]).

Az MHD folyadékok hidrodinamikai áramlásában az áramlásra merőleges irányú mágneses mezőt egyenletesnek tekintjük.

Vizsgálataiban Neuringer [16] nem egyenletes mágneses mező mellett végezte, ahol két különböző esetben vizsgálta az alkalmazott mágneses mező

ferrofluidok dinamikájára gyakorolt hatását és numerikus megoldásokat keresett. Első esetben egy fűtött ferrofluid hideg felület mentén történő kétdimenziós áramlásának stagnáló pontját vizsgálta, második esetben kétdimenziós párhuzamos áramlást feltételezett egy síkfelület mentén, ahol a felület hőmérsékletéről feltételezte, hogy az lineárisan csökken.

A jelen dolgozat célja, hogy az említett modellt alapul véve a ferrofluidok időben állandósult viselkedését vizsgáljuk mágneses térben a hasonlósági analízis alkalmazásával. A módszer alkalmazásának legfontosabb előnye, hogy a folyamatot leíró nemlineáris parciális differenciálegyenleteket visszavezetjük nemlineáris közönséges nemlineáris differenciálegyenletekre. Meghatározzuk az egyenletek numerikus megoldását, melyekből megkaphatjuk a nyírási feszültséget és a hőátadást a síkfelület mentén, továbbá a sebesség és hőmérséklet eloszlást a határterületben, amelyeket majd összehasonlítunk az irodalomból ismert korábbi eredményekkel [16]. Grafikusan szemléltetjük a modell paramétereinek a megoldásokra gyakorolt hatását, illetve rámutatunk arra, hogy több esetben létezik duális megoldás a matematikai modellhez.

2. AZ ÁRAMLÁS MEGHATÁROZÓ EGYENLETEI

Egy összenyomhatatlan, viszkózus és elektromosan nem vezető, ferromágneses folyadék kétdimenziós állandósult áramlását tekintjük vízszintes síkfelület mentén az 1. ábrán látható elhelyezéssel.

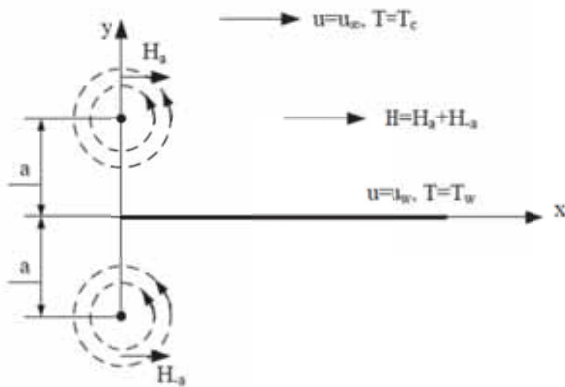
A feltételezésünk szerint az alkalmazott mágneses dipólusok egyenlő távolságra helyezkednek el a vezető élétől. A két elektromos vezető szál az áramlási irányra merőlegesen helyezkedik el, és az általuk keltett mágneses mező az áramlás síkjából kifelé irányított.

A ferro-hidrodinamikai kölcsönhatásokban nélkülözhetetlen a térben változó mezők létezése [13], az alábbiakban a következő feltevéseket tesszük:

- (i) a folyadékkelem mágnesezésének iránya mindig a helyi mágneses tér irányába mutat,
- (ii) a folyadék elektromosan nem vezető és

* egyetemi adjunktus, Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet

(iii) az elmozdulási áram elhanyagolható.



1. ábra Mágneses mezőbe helyezett síklappal párhuzamos áramlás

Az alkalmazott mágneses teret a $\mathbf{H} = -\nabla\phi$ egyenlettel, azaz a mágneses skalár potenciál negatív gradienseként vezetjük be, ahol a ϕ függvény az alábbi formulával fejezhető ki:

$$\phi(x, y) = -\frac{I_0}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{y+a}{x} + \tan^{-1} \frac{y-a}{x} \right),$$

ahol I_0 az egy hosszegységre jutó dipólus momentum és a az elektromos vezető szálak vezető éltől mért távolsága.

A határretegben, közel a falhoz, azonban jelentősen távol a vezetőszáltól (tehát ha $x \gg a$) a számításokat követően az alábbi formába írható a mágneses mező x szerinti deriváltja

$$[\nabla H]_x = -\frac{I_0}{\pi} \frac{1}{x^2},$$

amelyet modellünkben alkalmazunk.

Egy kétdimenziós, összenyomhatatlan áramlás határreteg egyenletei a folytonossági, mozgási és energia egyenleteken alapulnak.

Vizsgálataink az alábbi négy alapfeltevés esetén érvényesek:

(i) az alkalmazott mező elég erős ahhoz, hogy a határretegben mindenütt telítette tegye a ferrofluidot,

(ii) a folyadékra ható szélsőséges hőmérsékleteken belül a hőmérséklettől függő \mathbf{M} mágneszettség változását az $M = K(T_C - T)$ lineáris egyenlettel közelíthetjük, ahol K a piromágneses együttható és T_C a Curie-hőmérséklet [3], [16]

(iii) az indukált mágnesezésből adódó indukált mezőt elhanyagoljuk, így a hidrodinamikai és elektromágneses egyenletek szétválaszthatók,

(iv) a modellben az alkalmazott hőmérsékleti tartományban a c termikus hőkapacitás, a k hővezető képesség és a ν viszkozitási együttható független a hőmérséklettől.

A vizsgált áramlás az alábbi egyenletekkel írható le:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{I_0 \mu_0 k}{\pi \rho} (T_C - T) \frac{1}{x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$c \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4)$$

ahol az x és y a síkkal párhuzamos és arra merőleges koordinátatengelyek, u és v az x és y irányú sebesség komponensek, μ_0 a kinematikus viszkozitás, továbbá ρ jelöli a környező folyadék sűrűségét, amit állandónak tekintünk.

A (2)-(4) egyenletrendszerhez a felvett modell szerint az alábbi peremfeltételek járulnak:

- a síklap mentén ($y = 0$):

$$u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0, T(x, 0) = T_w \quad (5)$$

ahol $T_w = T_C - Ax^{m+1}$ (A és m konstans), és

- távol a síklaptól ($y \rightarrow \infty$):

$$u(x, y) \rightarrow u_\infty, T(x, y) \rightarrow T_\infty \quad (6)$$

ha y távol van a határretegtől ($y \rightarrow \infty$), itt a $T_\infty = T_C$ és $u_\infty = U_\infty x^m$, $U_\infty = \text{konstans}$ a külső áramlási sebesség, melyet állandónak feltételezünk vizsgálatunk során.

Az m paraméter a hatványkitevőben szerepel. Az $m = 0$ paraméter érték utal a lineáris hőmérséklet profilra és a konstans áramlási sebességre. Abban az esetben, ha $m = 1$ a hőmérséklet négyzetes és a sebesség lineáris változása. Az $m = -1$ érték kifejezi, hogy nincs hőmérsékletváltozás a felületen.

Bevezetjük a ψ áramfüggvényt az $u = \partial\psi / \partial y$ és $v = -\partial\psi / \partial x$ formulával, amellyel a (2) folytonossági egyenlet automatikusan teljesül. A (3)-(4) egyenletekbe behelyettesítve az áramfüggvényt az alábbiak adódnak:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial yx} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} - \frac{I_0 \mu_0 K}{\pi \rho} (T_C - T), \quad (7)$$

$$c \left[\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (8)$$

A peremfeltételek a következő formában adhatóak meg az áramfüggvényre vonatkozóan:

$$\psi'_y(x, 0) = 0, \psi'_x(x, 0) = 0, T(x, 0) = T_C - Ax^{m+1}, \quad (9)$$

$$\psi'_y(x, y) \rightarrow U_\infty x^m, T(x, y) = T_C \text{ as } y \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Így két egyváltozós függvényre két parciális differenciálegyenletet kaptunk. A (7)-(10) peremérték feladat lehetővé teszi, hogy a ψ és T megoldásainak egy speciális változatát, az ún. hasonlósági megoldásait határozzuk meg az alábbi formában [7]:

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, y) &= C_1 x^b f(\eta), \\ T &= T_c + Ax^{m+1} \theta(\eta), \\ \eta &= C_2 x^d y \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ahol b és d kielégíti a $b + d = m$ skálázási feltételt, továbbá a C_1 és C_2 együtthatókra igaz a $C_1 / C_2 = \nu$ összefüggést. Valós számok esetén $b - d = 1$ és $C_1 C_2 = U_\infty$, így

$$b = \frac{m+1}{2}, \quad d = \frac{m-1}{2}$$

$$C_1 = \sqrt{\nu U_\infty}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}$$

Alkalmazva a (11) hasonlósági transzformációt a (7)-(10) peremérték feladatra az eredeti parciális differenciálegyenlet-rendszerünket visszavezetjük a következő, csatolt, nemlineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszer peremérték feladatára:

$$f''' - mf'^2 + \frac{m+1}{2} ff' - \beta \theta = 0 \quad (12)$$

$$\theta'' + (m+1)Pr \left(\frac{1}{2} f \theta' - \theta f' \right) = 0 \quad (13)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \theta(0) = 1 \quad (14)$$

$$f'(\eta) = 1, \theta(\eta) = 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty \quad (15)$$

ahol $Pr = cv / k$ a Prandtl szám és $\beta = I_0 \mu_0 KA / \pi \rho U_\infty^2$.

A megoldásokból kifejezhetőek a $\vec{v} = (u, v, 0)$ dimenziómentes sebességkomponensei:

$$u = U_\infty x^m f'(\eta),$$

$$v = -\sqrt{\nu U_\infty} x^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m+1}{2} f(\eta) + \frac{m-1}{2} f'(\eta) \eta \right).$$

Továbbá az $f''(0)$ ellenállás-tényezővel és $\theta'(0)$ hőátadási együtthatóval kifejezhető a felület menti nyírási feszültség és hőátvitel.

Ismereteink szerint az $m = 0$ esethez tartozó kapcsolt határréteg egyenleteket elsőként Neuringer vizsgálta [16].

Megjegyezzük, hogy ha $m = 0$ és $\beta = 0$, akkor a (12) egyenlet megegyezik a jól ismert Blasius egyenlettel

$$f''' + \frac{1}{2} f f' = 0, \quad (16)$$

amely a newtoni folyadékok lamináris határréteg feladatainak vizsgálatánál fordul elő [2], [10].

A mágneses térbe helyezett mágnesezhető nanofolyadék hőátadási dinamikáját numerikusan vizsgáljuk matematikai megközelítésben, ahol a folyadék elektromosan nem vezető és a megoldások kereséséhez feltételeztük az $x \gg a$ geometriai feltétel érvényességét.

3. NUMERIKUS MEGOLDÁSOK

Számos numerikus módszer ismert olyan erősen nemlineáris peremérték feladatok megoldására, mint a (12)-(15) feladat.

Egyik ilyen eljárás az ún. HDM (higher derivative method, azaz „magasabb rendű deriváltak módszere”), melynek elve az A-stabil Implicit Runge-Kutta módszerek stabilitási függvényéből származik [14]. A metódust Chen és szerzőtársai implementálták Maple-ben, majd ezt nyílt forráskódúként közzétették [11]. A (12)-(15) peremérték feladat numerikus megoldásainak meghatározására ennek módosítását alkalmazzuk.

A (12)-(13) csatolt, harmadrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszert átírva elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre meg tudjuk adni, majd beállítva a peremfeltételeket és paramétereket futtatjuk a programot és elemezzük a kapott numerikus megoldásokat.

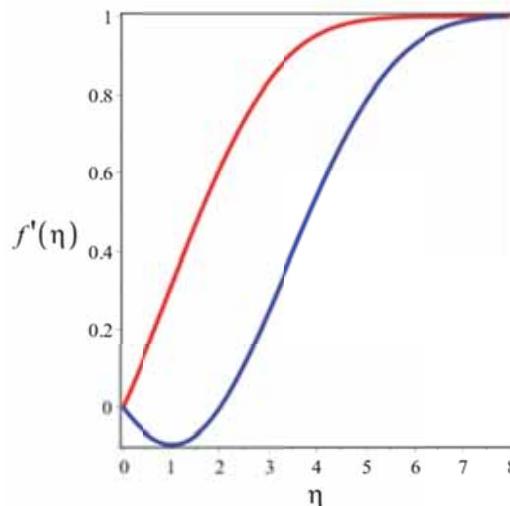
4. EREDMÉNYEK ÉS KÖVETKEZTETÉSEK

Mágneses térbe helyezett ferrofluid áramlását vizsgáltuk síklap mentén.

Az MHD áramlás kapcsolt, nemlineáris parciális differenciálegyenlet-rendszerét visszavezettük csatolt, nemlineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszerre a hasonlósági analízis alkalmazásával.

Ezt követően Maple-ben meghatároztuk a peremérték feladat numerikus megoldásait a HDM módszer alkalmazásával.

Numerikus számításaink során duális megoldást kaptunk, ahol a dimenziómentes sebességprofilra, rögzített paraméterek esetén ún. alsó és felső megoldást szemléltet a 2. ábra. Fontos megjegyeznünk, hogy a felső megoldás nagyon jó egyezést mutat Neuringer [16] által közölt megoldással.

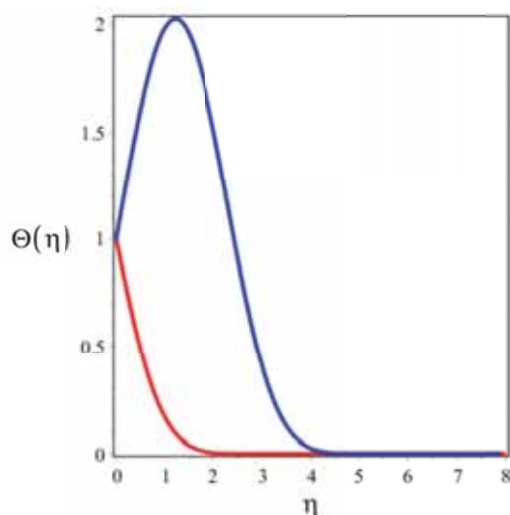


2. ábra Duális megoldás a sebességprofilra ($m = 0, \beta = 0.1, Pr = 10$)

A 3. ábrán mutatjuk be ugyanezen paraméterekhez tartozó hőmérséklet eloszlásokat, ahol szintén két

megoldást kaptunk, azonban ebben az esetben az alsó megoldás tartozik a felső sebességprofilhoz és ez itt is jó egyezést ad Neuringer eredményeivel.

Tehát az alkalmazott numerikus szimulációval duális megoldásokat tudunk meghatározni a határretegben mind a sebesség, mind a hőmérséklet eloszlásra, ahol az egyik új megoldásnak számít, a másik pedig jó egyezőséget mutat az irodalomból ismert korábbi eredményekkel.



3. ábra Duális megoldás a hőmérsékletprofilra ($m = 0, \beta = 0.1, Pr = 10$)

5. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

„A 129257 számú projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a K_18 pályázati program finanszírozásában valósult meg.”

6. IRODALOM

- [1] M. S. ABEL, N. MAHESHA, Heat transfer in MHD viscoelastic fluid flow over stretching sheet with variable thermal conductivity, non-uniform heat source and radiation, *Applied Mathematical Modelling* 32(2008), 1965–1983.
- [2] Ö. B. ADIGÜZEL, K. ATALIK, Magnetic field effects on Newtonian and non-Newtonian ferrofluid flow past a circular cylinder, *Appl. Math. Modelling* 42(2017), 161–174.
- [3] Y. AMIRAT, K. HAMDACHE, Heat Transfer in Incompressible Magnetic Fluid, *J. Math. Fluid Mech.* 14 (2012), 217–247.
- [4] H. I. ANDERSSON, O. A. VALNES, Flow of a heated Ferrofluid over a stretching sheet in the presence of a magnetic dipole, *Acta Mechanica* 128 (1988), 39–47.
- [5] H. I. ANDERSSON, MHD flow of a viscoelastic fluid past a stretching surface, *Acta Mechanica* 95 (1992), 227–230.
- [6] H. A. ATTIA, N. A. KOTB, MHD flow between two parallel plates with heat transfer, *Acta Mechanica* 117 (1996), 215–220.
- [7] G. I. BARENBLATT, Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotic, Cambridge Text in *Applied Mathematics*, Vol. 14, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [8] M. M. BHATTI, T. ABBAS, M. M. RASHIDI, Numerical Study of Entropy Generation with Nonlinear Thermal Radiation on Magnetohydrodynamics non-Newtonian Nanofluid Through a Porous Shrinking Sheet, *J. Magnetics* 21 (2016), 468–475.
- [9] G. BOGNÁR, On similarity solutions of MHD flow over a nonlinear stretching surface in non-Newtonian power-law fluid, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2016, 1–12.
- [10] G. BOGNÁR, Magnetohydrodynamic Flow of a Power-Law Fluid over a Stretching Sheet with a Power-Law Velocity, in: *Differential and Difference Equations with Applications* (Springer Proceedings in Mathematics and Statistics; 164. ICDDEA, Amadora, Portugal, 2015), Springer, Bazel, 2016, 131–139.
- [11] G. BOGNÁR, Numerical and analytic investigation of some nonlinear problems in fluid mechanics, *Computers and Simulation in Modern Science. Vol. II.: Selected papers from WSEAS Conferences.* Athens:WSEAS Press, 2008. 172–180.
- [12] G. BOGNÁR, Analytic Solutions to a Boundary Layer Problem for Non-Newtonian Fluid Flow Driven by Power Law Velocity Profile WSEAS Trans. on Fluid Mech. 6 (2011)22-31.
- [13] J. CHEN, D. SONAWANE, K. MITRA. V. R. SUBRAMANIAN, Yet another code for Boundary Value Problems- Higher Derivative Method, manuscript
- [14] W. E. MILNE, Numerical Solution of Differential Equations, Jhon Wiley & Sons, 1953.
- [15] J. L. NEURINGER, R. E. ROSENSWEIG, Ferrohydrodynamics *Phys. Fluids* 7 (1964), 1927-1937.
- [16] J. L. NEURINGER, Some viscous flows of a saturated ferrofluid under the combined influence of thermal and magnetic field gradients *J. Non-linear Mech.* 1 (1966), 123–127.
- [17] P. G. SIDDHESHWAR, U. S. MAHABALESHWAR, Effect of radiation and heat source on MHD flow of a viscoelastic liquid and heat transfer over a stretching sheet *Int. J. Non-Linear Mech.* 40 (2005), 807–820.