

FORGATÓ CSAVARRUGÓ MODELLEZÉSE ÉS IGÉNYBEVÉTELEI

MODELING AND LOADS OF HELICAL TORSION SPRINGS

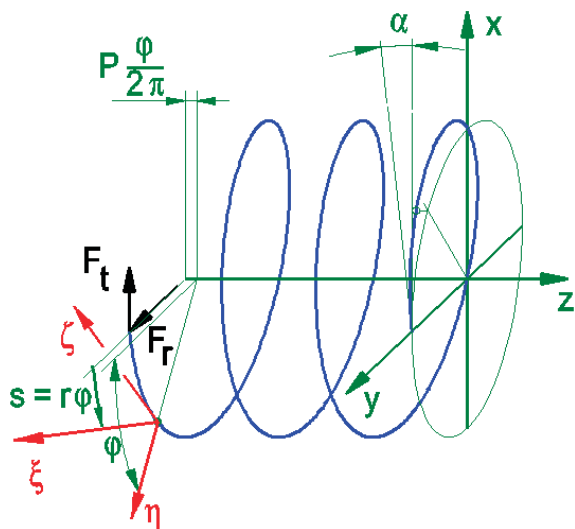
Németh Géza MSc, machng@uni-miskolc.hu

ABSTRACT

One of the essential conditions of the operation of epicyclic traction drives is the clamping force between the rolling elements. The author introduced a drive in some of his previous papers, containing helical torsion spring which integrate the functions of driving and clamping of the elements [1, 2]. The spring is in contact with the planet wheels. This paper try to make a model to calculate the loads of this flexible annual wheel.

1. BEVEZETÉS

Szándékunk szerint egy kb típusú dörzsbolygó-műnek a nyugvó, állványhoz rögzített gyűrűkerekét szeretnénk modellezni, mely jelen estben egy forgató csavarrugó. Helyezzük tehát a különleges terhelésű forgató csavarrugót az 1. ábrának megfelelő xyz derékszögű koordináta rendszerbe. A csavarvonal – mely a csavarrugó középvonala – egyik vége be van fogva, a befogási hely a $(0, r, 0)$ koordinátákkal írható le. A csavarvonal P emelkedésű, a menetek száma négy. Hason a csavarvonal szabad végétől φ szögtávolságra egy F_r sugár irányú és egy F_t érintő irányú erő, ahol $F_t \leq \mu_0 \cdot F_r$, és μ_0 a nyugvó súrlódás tényezője a csavarrugó és a vele belülről érintkező henger (bolygókerék) kent felületei között.



1. ábra Modellelés statikailag határozott térgörbe tartóként

Jelöljük az erőhatás helyét B -vel, a keresett igénybevétel (illetve a későbbiekben a sugárirányú alakváltozás) helyét pedig P -vel. Az

igénybevételek leírásához a következő szempontokat kell figyelnünk:

1. A csavarvonal egyenlete,
2. Koordináta transzformáció,
3. Több erő hatásának összegzése,

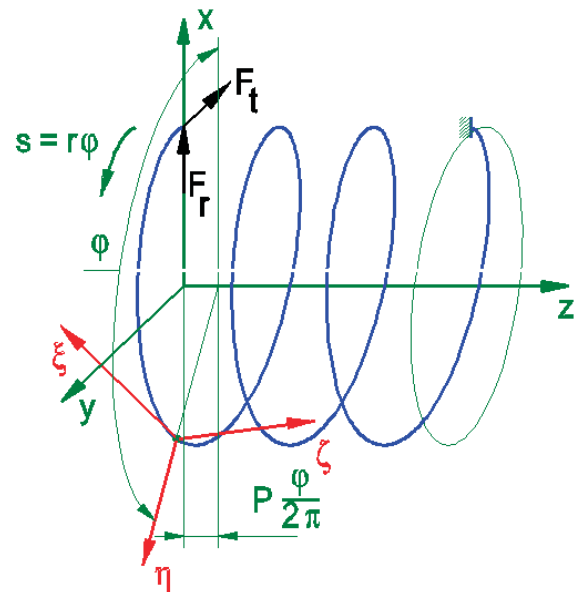
2. A CSAVARVONAL VIZSGÁLATA

A csavarvonal egyenletének jól ismert alakja a

$$\underline{P}^T(\varphi) = \{r \cos(\varphi); r \sin(\varphi); c\varphi\} \quad (1)$$

ahol a $c = r \operatorname{tg}(\alpha) = P/(2\pi)$ csavarparaméter az emelkedés függvénye.

Az egyszerűbb számítás kedvéért módosítsuk a koordináta rendszert a 2. ábrának megfelelően. Látható, hogy a P pontban egy $\xi\eta\zeta$ helyi koordináta rendszert vettünk fel.



2. ábra Modell a módosított koordináta rendszerekkel

A csavarparaméter kifejtése után az (1) egyenlet átírható a

$$[P(\varphi)]^T = r\{\cos(\varphi); \sin(\varphi); \operatorname{tg}(\alpha)\varphi\} \quad (2)$$

alakba, majd a kísérő háromél egységvektorainak képzéséhez először képezzük ennek differenciálját, azaz

$$[\underline{P}'(\varphi)]^T = r\{-\sin(\varphi); \cos(\varphi); \operatorname{tg}(\alpha)\}, \quad (3)$$

és ennek abszolút értéke

$$|\underline{P}'(\varphi)| = r\sqrt{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) + \operatorname{tg}^2(\alpha)}. \quad (4)$$

Az érintő irányú egységvektor

$$e_1^T = -\frac{[\underline{P}'(\varphi)]^T}{|\underline{P}'(\varphi)|} = \{\cos(\alpha) \sin(\varphi); -\cos(\alpha) \cos(\varphi); -\sin(\alpha)\}. \quad (5)$$

A P pontbeli keresztmetszet normálisa ez az érintő egységvektor lesz. A keresztmetszet egyik főiránya a csavarvonal tengelyvonalára, z -re merőleges, kifelé mutató, sugár irányú. Legyen ez e_2 , azaz

$$e_2^T = \{\cos(\varphi); \sin(\varphi); 0\}. \quad (6)$$

A keresztmetszet másik főiránya pedig legyen az előző két egységvektorra merőleges. A művelet elvégzése után

$$e_3^T = [e_1 \times e_2]^T = \{\sin(\alpha) \sin(\varphi); -\sin(\alpha) \cos(\varphi); \cos(\alpha)\}. \quad (7)$$

3. AZ IGÉNYBEVÉTELEK

A P pontbeli $\xi\eta\zeta$ helyi koordináták egy jobbsodrású koordináta rendszert alkotnak, és a koordináták irányába mutató egységvektorok rendre e_1, e_2, e_3 . Ebből a három egységvektorból képezhetünk egy A jelű átviteli mátrixot, és ennek segítségével a külső terheléseknek a P pontba redukálása után a P pontbeli igénybevételeket nyerhetjük. Az átviteli mátrix tehát

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \sin(\varphi) & -\cos(\alpha) \cos(\varphi) & -\sin(\alpha) \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\alpha) \sin(\varphi) & -\sin(\alpha) \cos(\varphi) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Az egy pontban ható külső terheléseknek a P -be redukált vektorkettőse az $[F(\varphi), M(\varphi)]_P$, melyből a helyi koordináta rendszerben az igénybevételeket a $v(\varphi)_P$ és $m(\varphi)_P$ vektorok tartalmazzák, azaz

$$[v(\varphi)_P]^T = \{n(\varphi); v_1(\varphi); v_2(\varphi)\}, \quad (9)$$

illetve

$$[m(\varphi)_P]^T = \{t(\varphi); m_1(\varphi); m_2(\varphi)\}. \quad (10)$$

Az igénybevételeket a

$$\begin{bmatrix} v(\varphi) \\ m(\varphi) \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(\varphi) \\ M(\varphi) \end{bmatrix}_P \quad (11)$$

egyenlet szolgáltatja, ahol a redukált vektorkettős koordinátái az xyz koordináta rendszerben

$$[F(\varphi)]^T = \{F_x(\varphi); F_y(\varphi); F_z(\varphi)\}, \quad (12)$$

és

$$[M(\varphi)]^T = \{M_x(\varphi); M_y(\varphi); M_z(\varphi)\}. \quad (13)$$

Mivel a (9), (10), (12) és (13) vektorok mindegyik összetevője φ függvénye, ezeket a (11) egyenletbe helyettesítjük, de a (8) mátrixot csak egyszerűsítve írjuk, azaz

$$\begin{bmatrix} n(\varphi) \\ v_1(\varphi) \\ v_2(\varphi) \\ t(\varphi) \\ m_1(\varphi) \\ m_2(\varphi) \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} & A & & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & 0 & & & A \\ & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \\ M_x(\varphi) \\ M_y(\varphi) \\ M_z(\varphi) \end{bmatrix}_P \quad (14)$$

Az igénybevételeket tartalmazó vektor a (14) egyenlet által kijelölt szorzás után

$$\begin{bmatrix} n(\varphi) \\ v_1(\varphi) \\ v_2(\varphi) \\ t(\varphi) \\ m_1(\varphi) \\ m_2(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \sin(\varphi) F_x(\varphi) & -\cos(\alpha) \cos(\varphi) F_y(\varphi) & -\sin(\alpha) F_z(\varphi) \\ \cos(\varphi) F_x(\varphi) & +\sin(\varphi) F_y(\varphi) & \\ \sin(\alpha) \sin(\varphi) F_x(\varphi) & -\sin(\alpha) \cos(\varphi) F_y(\varphi) & +\cos(\alpha) F_z(\varphi) \\ \cos(\alpha) \sin(\varphi) M_x(\varphi) & -\cos(\alpha) \cos(\varphi) M_y(\varphi) & -\sin(\alpha) M_z(\varphi) \\ \cos(\varphi) M_x(\varphi) & +\sin(\varphi) M_y(\varphi) & \\ \sin(\alpha) \sin(\varphi) M_x(\varphi) & -\sin(\alpha) \cos(\varphi) M_y(\varphi) & +\cos(\alpha) M_z(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

4. A REDUKÁLT VEKTORKETTŐS

A $[F(\varphi), M(\varphi)]_P$ redukált vektorkettősnek a (15) egyenletben szereplő összetevőit azonban még nem ismerjük. A csavarvonalra ható erőket és nyomatékokat először a P pontba kell redukálni (áthelyezni). Az összegzéskor azonban csak azokat a terheléseket kell figyelembe venni, amelyek koordinátáira a

$$\varphi_B \leq \varphi_P$$

egyenlőtlenség igaz, vagyis amely B pontban ható erők és nyomatékok közelebb vannak a szabad véghez, mint a P pont, ahol az igénybevételeket keressük. N bolygókerék és z menetszám esetén, a $t = 0$ időpillanatban a külső terhelések (jelen esetben sugár irányú és érintő irányú erők) helye szögkoordinátával kifejezve a 3. ábra szerint

$$\varphi_{B1} = 0; \varphi_{B2} = \frac{2\pi}{N}; \dots; \varphi_{Bi} = i \frac{2\pi}{N}; \dots; \varphi_{B(zN)} = z2\pi. \quad (16)$$

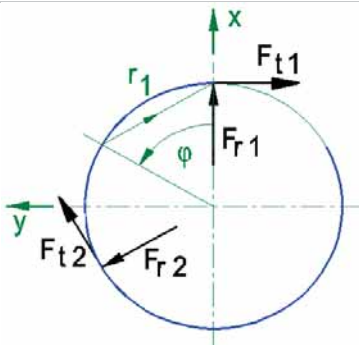
5. AZ ERŐK ÖSSZEGZÉSE

A P pontba redukált erő koordinátái tehát a 3. ábra szerint, a (12) egyenlet átírásával ($j = 2$ esetére)

$$[F(\varphi)] = \begin{bmatrix} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{r1} + F_{r2} \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1)\right] + F_{t2} \sin\left[\frac{2\pi}{N}(i-1)\right] \\ -F_{t1} + F_{r2} \sin\left[\frac{2\pi}{N}(i-1)\right] - F_{t2} \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1)\right] \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

általánosabban pedig

$$[F(\varphi)] = \begin{bmatrix} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^j \left\{ F_{ri} \cos\left[(i-1)\frac{2\pi}{N}\right] + F_{ti} \sin\left[(i-1)\frac{2\pi}{N}\right] \right\} \\ \sum_{i=1}^j \left\{ F_{ri} \sin\left[(i-1)\frac{2\pi}{N}\right] - F_{ti} \cos\left[(i-1)\frac{2\pi}{N}\right] \right\} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$



3. ábra A külső erők helyzete a $t = 0$ időpontban

A (18) egyenletben az összegzés kiemelhető, így

$$[F(\varphi)] = \begin{bmatrix} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^j \begin{bmatrix} F_{ri} \cos\left[(i-1)\frac{2\pi}{N}\right] + F_{ti} \sin\left[(i-1)\frac{2\pi}{N}\right] \\ F_{ri} \sin\left[(i-1)\frac{2\pi}{N}\right] - F_{ti} \cos\left[(i-1)\frac{2\pi}{N}\right] \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

illetve

$$[F(\varphi)] = \begin{bmatrix} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^j \begin{bmatrix} \cos[(i-1)2\pi/N] & \sin[(i-1)2\pi/N] & 0 \\ \sin[(i-1)2\pi/N] & -\cos[(i-1)2\pi/N] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{ri} \\ F_{ti} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

ahol

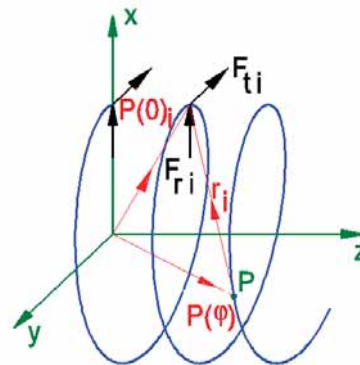
$$j = \text{ent}\left(\frac{\varphi}{2\pi/N}\right), \quad (21)$$

és ent() egészrész függvény. Azt mondja meg, hány erő hat a kiválasztott P ponttól a szabad vég felé, i pedig a kiválasztott P ponttól a szabad vég felé eső terhelési helyek sorszáma.

A (19) egyenlet egyszerűbben is írható, ha az egyenlet jobb oldalán álló mátrixot (forgató tenzort) R_i -vel, a szorzó külső erők vektorát pedig, mely az i -edik pontban hat, F_i -vel jelöljük, azaz

$$[F(\varphi)] = \begin{bmatrix} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^j (R_i \cdot F_i). \quad (22)$$

A redukált vektorkettősben a nyomatékok számításakor megállapíthatjuk, hogy az 1. ábra szerinti modellben koncentrált nyomaték nem hat, így csak a külső erők nyomatékával kell számolni. A számításhoz a 4. ábra nyújt némi magyarázatot.



4. ábra Az $M(\varphi)$ nyomatékok számítása

Az ábrán $P(0)_i$ jelöli az i -edik erőátadási pont helyvektorát az xyz koordináta rendszerben, $P(\varphi)$ pedig annak a pontnak a helyvektorát, ahol az igénybevételt (és később az alakváltozást) keresem. A két pont közötti $r_i = P(0)_i - P(\varphi)$ vektor az erőhatás helyének (16) szögkoordinátáival leírt helyének illetve a csavarvonal (1)-beli egyenletének ismeretében

$$[r_i(\varphi)] = r \cdot \begin{bmatrix} \cos(i2\pi/N) - \cos(\varphi) \\ \sin(i2\pi/N) - \sin(\varphi) \\ \text{tg}(\varphi) (\varphi - i2\pi/N) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Az i -edik pontban ható erő nyomatéka pedig

$$[M(\varphi)] = \begin{bmatrix} M_x(\varphi) \\ M_y(\varphi) \\ M_z(\varphi) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^j (r_i \times F_i) . \quad (24)$$

A vektoriális szorzás elvégzésével az

$$[M(\varphi)] = r \cdot \sum_{i=1}^j (S_i \cdot F_i) \quad (25)$$

alakhoz juthatunk, ahol az S_i mátrix

$$S_i = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{tg}(\alpha) (\varphi - i2\pi/N) & 0 \\ \operatorname{tg}(\alpha) (\varphi - i2\pi/N) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) - \sin(i2\pi/N) & \cos(i2\pi/N) - \cos(\varphi) & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Ezek után a (11) összefüggésbe behelyettesíthetjük a (22) és (25) kifejezéseket, így számíthatjuk az igénybevételeket, azaz

$$\begin{bmatrix} v(\varphi) \\ m(\varphi)_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(\varphi) \\ M(\varphi)_p \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^j \begin{bmatrix} AR_i \\ r \cdot AS_i \end{bmatrix} F_i . \quad (27)$$

A mátrix és vektorszorzások elvégzése után az igénybevételeket a következő egyszerűsítő jelölésekkel hozhatjuk kezelhető alakra.

$$\begin{aligned} c &\rightarrow \cos; s \rightarrow \sin; t \rightarrow \operatorname{tg}; \\ f(i) &\rightarrow (i-1)2\pi/N; g(i) \rightarrow i2\pi/N \end{aligned} \quad (28)$$

A számítások eredménye tehát

$$n = c(\alpha) \sum_{i=1}^j \{ \{ c[f(i)]s(\varphi) - s[f(i)]c(\varphi) \} + \{ s[f(i)]s(\varphi) + c[f(i)]c(\varphi) \} F_{ti} \} \quad (29)$$

$$v_1 = \sum_{i=1}^j \{ \{ c[f(i)]c(\varphi) - s[f(i)]s(\varphi) \} F_{ri} + \{ s[f(i)]c(\varphi) - c[f(i)]s(\varphi) \} F_{ti} \} \quad (30)$$

$$v_2 = s(\alpha) \sum_{i=1}^j \{ \{ c[f(i)]s(\varphi) - s[f(i)]c(\varphi) \} F_{ri} + \{ s[f(i)]s(\varphi) - c[f(i)]c(\varphi) \} F_{ti} \} \quad (31)$$

$$t = r \cdot s(\alpha) \sum_{i=1}^j \{ \{ s[g(i)] - s(\varphi) + [g(i) - \varphi]c(\varphi) \} F_{ri} - \{ c[g(i)] - c(\varphi) + [\varphi - g(i)]s(\varphi) \} F_{ti} \} \quad (32)$$

$$m_1 = r \cdot t(\alpha) \sum_{i=1}^j \{ \{ [\varphi - g(i)]s(\varphi) \} F_{ri} - \{ [\varphi - g(i)]c(\varphi) \} F_{ti} \} \quad (33)$$

$$m_2 = r \cdot \sum_{i=1}^j \{ \{ s(\alpha)t(\alpha)[g(i) - \varphi]c(\varphi) + c(\alpha)[s(\varphi) - s[g(i)](\varphi)] F_{ri} + \{ s(\alpha)t(\alpha)[g(i) - \varphi]s(\varphi) + c(\alpha)[c[g(i)] - c(\varphi)] F_{ti} \} \} \quad (34)$$

6. AZ EREDMÉNYEK ÖSSZEGZÉSE

Ezzel megkaptuk a tetszőleges φ szöghöz tartozó P pontban az igénybevételeket, melyek közül várhatóan m_2 a legnagyobb.

7. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

"A cikkben/előadásban/tanulmányban ismertetett kutató munka az EFOP-3.6.1-16-2016-00011 jelű „Fiatalodó és Megújuló Egyetem – Innovatív Tudásváros – a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi fejlesztése” projekt részeként – a Széchenyi 2020 keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg”

"The described article/presentation/study was carried out as part of the EFOP-3.6.1-16-2016-00011 "Younger and Renewing University – Innovative Knowledge City – institutional development of the University of Miskolc aiming at intelligent specialisation" project implemented in the framework of the Széchenyi 2020 program. The realization of this project is supported by the European Union, co-financed by the European Social Fund."

8. IRODALOM

- [1] Németh Géza, Németh Nándor, Péter József, Dörzsbolygómű hajlékony elemeinek szilárdsági számítása, In: Bodzás Sándor (szerk.), Műszaki Tudomány az Észak - Kelet Magyarországi Régióban 2015 Konferencia előadásai, Debreceni Akadémiai Bizottság Műszaki Szakbizottsága, ISBN 978-963-7064-32-6, 2015. pp.213-219.
- [2] Németh Géza, Péter József, Németh Nándor, A new type of epicyclic traction drive, Advances in Mechanical Engineering, 1:(1) pp. 137-142. (2013), 1st International Scientific Conference on Advances in Mechanical Engineering. Debrecen, Magyarország: 2013.10.10 -2013.10.11. (ISBN 978-963-473-623-3).