

EGYIK VÉGÉN BEFOGOTT RÚD OPTIMÁLÁSA EXCENTRIKUS TERHELÉS ESETÉN

BEAM WITH FIXED SUPPORT AT ONE END OPTIMIZATION IN CASE OF ECCENTRIC LOAD

Erdős Antal *, Dr. Jármai Károly **

ABSTRACT

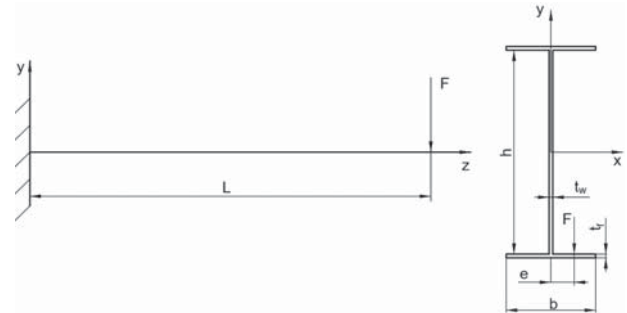
In this article one can read about the stress and deflection calculation and the optimization of a beam with opened cross section. This type of cross section is very sensitive to the eccentricity of the load, because of the effect of the warping torsion. This type of model could be used in case of machine tools, for example press or drill machines. Because the accuracy of the manufacturing procedure and the workpiece, the deflection of the beam must be minimal. On the other hand the lifetime of the machine should be maximal.

1. BEVEZETÉS

A mérnöki gyakorlatban sok helyen találkozhatunk tartószerkezetekkel például hidakkal, csapágyazott tengelyekkel, gerendákkal. Ezek a szerkezetek gyakran készülnek valamilyen nyitott keresztmetszettel, ilyen lehet például egy I-szelvény. Ebben a cikkben egyik végén befogott I-szelvényű gerenda vizsgálata kerül bemutatásra. Annak feszültségi, deformáció számítása, majd ennek alapján az optimalizálása kerül elvégzésre.

2. A mechanikai modell

Rudat csavaró igénybevételnek kitéve a peremfeltételektől függően két alapeset különböztethető meg, melyek a szabad csavarás és a gátolt csavarás. A két típus a hosszirányú alakváltozás megakadályozásában tér el egymástól. A szabad, vagy Saint-Venant-féle csavarás esetén a hosszirányú alakváltozás nincs meggátolva, míg gátolt csavarás esetén nincs hosszirányú elmozdulásra lehetőség. Mivel ezen okból kifolyólag csavarási normálfeszültség szabad csavarás során nem keletkezik és a mechanikai modellből adódóan sincs lehetőség axiális elmozdulásra így a számítások gátolt csavarás esetére kerülnek elvégzésre. A mechanikai modell az egyszerű I-szelvény keresztmetszetével látható a 1. ábrán.



1. ábra: Mechanikai modell és a szelvény keresztmetszete

3. A feszültségek meghatározása

Ebben az esetben az excentrikus erőátadás miatt a nyírás és a hajlítás mellett csavaró igénybevétel is keletkezik. A hosszirányú alakváltozás megakadályozása miatt a csavarásból a befogás helyén a csavarás torzító hatásából normálfeszültség fog keletkezni. Ennek elméleti alapja az [1, 2] irodalmakban található.

Felírva a gátolt csavarás alap-differenciál egyenletét:

$$G \cdot I_t \cdot \frac{d\varphi}{dz} - E \cdot I_\omega \frac{d^3\varphi}{dz^3} = M_t. \quad (1)$$

Átírva:

$$\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega} \cdot \frac{d\varphi}{dz} - \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{M_t}{E \cdot I_\omega}. \quad (2)$$

Az α^2 -et bevezetve a $\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}$ tört helyére az egyenlet a következő:

$$-\alpha^2 \cdot \frac{d\varphi}{dz} + \frac{d^3\varphi}{dz^3} = -\frac{M_t}{E \cdot I_\omega}. \quad (3)$$

Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása a következő alakban keresendő:

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 \cdot z + C_3 \cdot \sinh(\alpha z) + C_4 \cdot \cosh(\alpha z). \quad (4)$$

* doktorandusz, Miskolci Egyetem Vegyipari Gépek Intézeti Tanszék

** egyetemi tanár, Miskolci Egyetem Vegyipari Gépek Intézeti Tanszék

A C_2 konstans értéke:

$$C_2 = \frac{M_t}{G \cdot I_t}. \quad (5)$$

A megoldásban található többi konstans értékének meghatározása az adott feladatra érvényes peremfeltételektől függ. A befalazott tartóra érvényes feltétel rendszer látható az 1. táblázatban.

Pozíció	φ értéke	φ' értéke	φ'' értéke
$z = 0$	0	0	nem 0
$z = L$	nem 0	nem 0	0

1. táblázat: Peremfeltétel rendszer

A peremfeltételek alkalmazásához szükség van az általános megoldás első, illetve második deriváltjára a z változó szerint. Az első derivált:

$$\varphi'(z) = C_2 + C_3 \cdot \alpha \cdot \cosh(\alpha z) + C_4 \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha z). \quad (6)$$

A második derivált:

$$\varphi''(z) = C_3 \cdot \alpha^2 \cdot \sinh(\alpha z) + C_4 \cdot \alpha^2 \cdot \cosh(\alpha z). \quad (7)$$

A C_2, C_3, C_4 konstansok meghatározásához a peremfeltételeket alkalmazva a megoldás megfelelő deriváltján, célszerűen arra, amely az adott pontban 0 értékkel rendelkezik. A konstansok értéke a levezetések után:

$$C_3 = -\frac{M_t}{G \cdot I_t \cdot \alpha}. \quad (8)$$

A második deriváltat felhasználva a $z = L$ helyen:

$$\varphi''(z) = C_3 \cdot \alpha^2 \cdot \sinh(\alpha z) + C_4 \cdot \alpha^2 \cdot \cosh(\alpha z), \quad (9)$$

$$0 = C_3 \cdot \alpha^2 \cdot \sinh(\alpha z) + C_4 \cdot \alpha^2 \cdot \cosh(\alpha z), \quad (10)$$

$$C_4 = \frac{M_t}{G \cdot I_t \cdot \alpha} \cdot \tanh(\alpha z). \quad (11)$$

$$C_1 = -\frac{M_t}{G \cdot I_t \cdot \alpha} \cdot \tanh(\alpha z). \quad (12)$$

A torzulási vagy binyomatékok, mely a normálfeszültséget okozza az alábbi összefüggés adja meg:

$$B_\omega = \int_A \sigma_\omega \cdot \omega_T dA = -E \cdot I_\omega \cdot \frac{d^2 \varphi}{dz^2}. \quad (13)$$

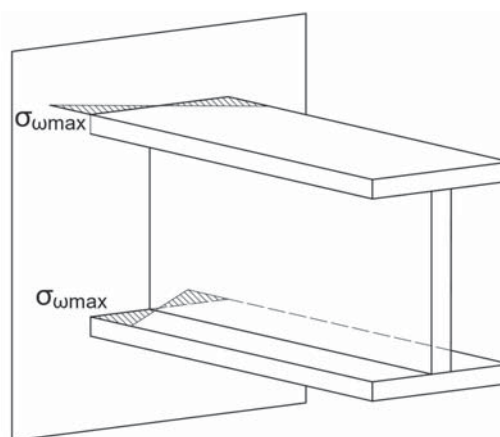
A maximális binyomaték a befalazásnál keletkezik a $z = 0$ helyen. Hogy a maximális binyomaték kerüljön meghatározásra a $z = 0$ helyen az általános megoldás második deriváltját kell behelyettesíteni.

$$B_{\omega max} = -\frac{M_t}{\alpha} \cdot \tanh(\alpha L). \quad (14)$$

A torzulási normálfeszültség kiszámítása:

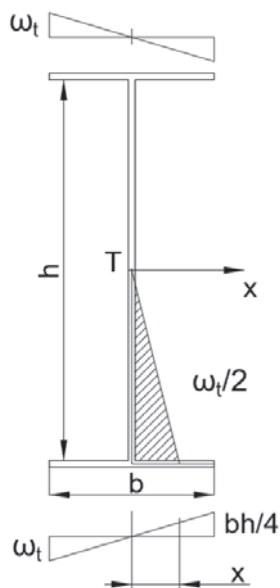
$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_t. \quad (15)$$

Amely összefüggésben az I_ω a torzulási inercia és az ω_t a szelvény torzulásának mértéke. A torzulási inercia a szelvény geometriájától, illetve annak fajtájától, miszerint a szelvény nyitott vagy zárt. Az I-szelvény nyitott szelvény a torzulási mérték az övlemezek sarokpontjában veszi fel a maximális értékét, ahogy az az alábbi ábrán is látható. A torzulási mérték szintén a szelvény geometriájának függvénye. A csavarási normálfeszültség eloszlása a szelvényen látható a 2. ábrán, valamint az torzulási mértéket szemlélteti a 3. ábra.



2. ábra:

A csavarási normálfeszültségeloszlás az I-szelvényben [1]



3. ábra:

Torzulási mérték alakulása I-szelvény esetén [1]

Az I-szelvény torzulási inerciája vagy gátolt csavarási tényezője:

$$I_\omega = 4 \cdot \int_0^{b/2} \omega_t^2 \cdot t_f dx = \frac{h^2 \cdot b^3 \cdot t_f}{24} \quad (16)$$

A számított értékeket tartalmazza a 2. táblázat, a szimuláció végeredménye látható a 4. ábrán.

A csavarási normál feszültségen kívül az igénybevételi ábrán látható, hogy a gátolt csavaráson kívül az adott rudat jelentős hajlító és csavarónyomaték is terheli. A modellen látható befalazott tartó esetén, melyet a végén egy koncentrált erő terhel, akkor a hajlítónyomaték értéke az ábrán látható módon a terhelő erő és a tartó hosszának a szorzata. A csavaró igénybevétel pedig az I-szelvény alsó övlemezén excentrikusan történő erőátadásból származik. Ez az excentricitás övlemez b szélességének maximálisan a hatod része lehet. Az I-szelvény esetén a csavarásból származó csúsztató feszültség:

$$\tau_t = \frac{M_t \cdot t}{I_t} \quad (17)$$

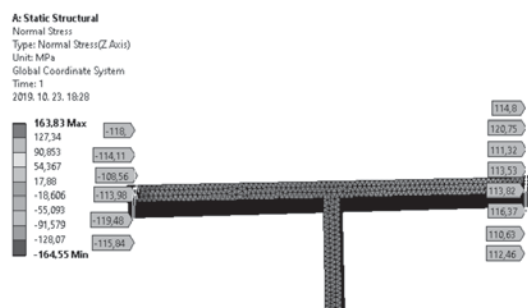
A számított mennyiség	I_ω a gátolt csavarási ellenállás	ω_t a torzulási mérték	$B_{\omega max}$ a binyomaték maximuma	I_t a csavarással szembeni ellenállás	M_t a csavarónyomaték	σ_ω a csavarási normál feszültség
Számítás eredménye	$6,51 \cdot 10^{12}$ mm ⁶	$6,25 \cdot 10^4$ mm ²	$1,181 \cdot 10^{10}$ Nmm ²	$7,5 \cdot 10^5$ mm ⁴	6,25 kNm	113,38 MPa

2. táblázat: A számított értékek csavarási normál feszültségre

Amely összefüggés megadja az adott M_t csavarónyomatékkal terhelt t vastagságú lemezben a csavarófeszültséget nyitott szelvény esetén. Ekkor a nyitott szelvény csavarási inerciája:

$$I_t = \eta_0 \cdot \alpha_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n b_i t_i^3 \quad (18)$$

Ahol η_0 a szelvény alakjától függő tényező értékét az alábbi 3. táblázat tartalmazza. Az α_0 pedig a gyártástól függő tényező, értéke hegesztett kötéssel létrehozott szelvény esetén 1,5, hengerléssel gyártott szelvényre 1,2. Az összefüggésben a b_i a lemez hossza függetlenül annak orientációjától, a t_i minden esetben az adott i -edik lemez vastagsága. A számítások elvégzése után a csavarásból származó nyírófeszültség értéke 63,613 MPa.



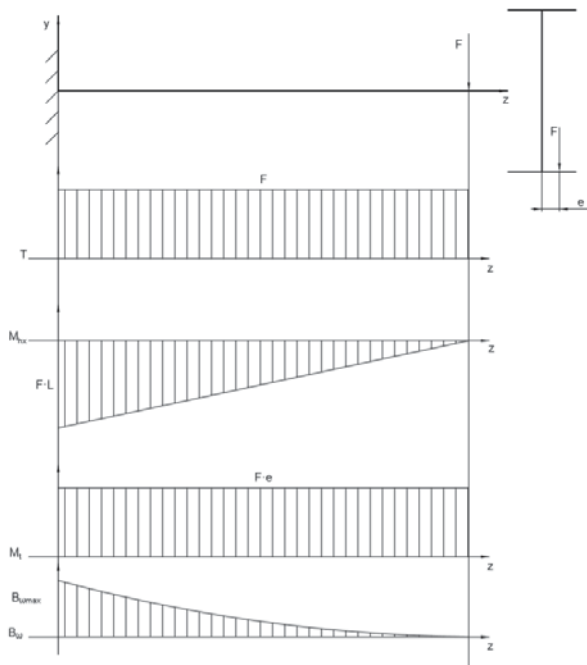
4. ábra:

Csavarási normál feszültség szimulációval segítségével meghatározott értéke

A szelvény alakja	L	T	Z	+	C	I
A tényező értéke	0,99	1,15	1,15	1,17	1,2	1,31

3. táblázat: Az η_0 alaktényező [3]

Az ily módon méretezett szelvény ellenőrzéséhez szükséges a választott acél folyáshatárának és az eddig bemutatott feszültség komponensekből adódó redukált feszültség összevetése. Az igénybevételi ábrája látható az alábbi 5. ábrán.



5. ábra: A tartó igénybevétele

Az I-tartó méretei a számítások kezdetén:

- h a gerinclemez magassága 1000 mm
- b az övlemezek szélessége 250 mm
- t_f az övlemezek vastagsága 10 mm
- t_w a gerinclemez vastagsága 10 mm

A választott acélminőség a számításokhoz az S235-ös szerkezeti acél, melynek folyáshatára $f_y = 235 \text{ MPa}$, a rugalmassági modulusza $E = 200 \text{ GPa}$, valamint a csúsztató rugalmassági modulusza $G = 76,923 \text{ GPa}$.

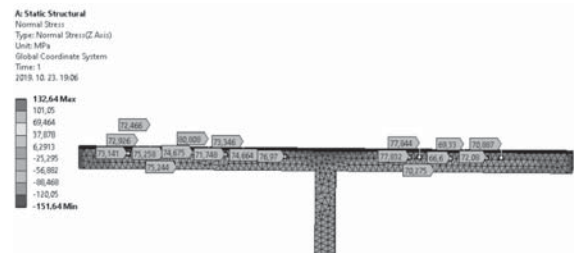
Az Ansys program segítségével meghatározott csavarási normál feszültség „Fixed Support” típusú peremfeltétellel és a tartó másik végére terhelésként megadott M_t csavarónyomatékkal a befogás helyén a z irányú normál feszültség a szinguláris helyeken kívül végezve a kiértékelést. Az ábrán látszik a vizsgált pontokban a feszültség értéke közel azonos

A számított mennyiség	I_x a csavarással szembeni ellenállás	M_h a csavarónyomaték	σ_h nyírófeszültség csavarásból
Számítás eredménye	$2108,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$	$300 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$	71,852 MPa

4. táblázat: Hajlításból származó feszültség értéke

A csavaró igénybevételből származó csúsztató feszültség is jelentős részt képez a szerkezetre ható

a számított értékkel, valamint a feszültségeloszlás is megfelel az elméleti feszültségeloszlásnak. Ez látható a 6. ábrán.



6. ábra: Hajlításból származó normál feszültség

A gerenda másik meghatározó igénybevétele melyből jelentős feszültség ébred, a hajlítás. Ekkor a maximális hajlítónyomaték és az abból ébredő feszültség a maximális értékét szintén a befalazásnál éri el, ahol a reakciónyomaték értéke $F \cdot L$. Ekkor a feszültség értéke:

$$\sigma_h = \frac{M_h}{I_x} \cdot y_{max} \quad (19)$$

Az I-szelvény x tengelyre vett másodrendű nyomatéka a Steiner-tétel segítségével:

$$I_x = \frac{h^3 \cdot t_w}{12} + 2 \cdot \left(\frac{t_f^3 \cdot b}{12} + t_f \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{t_f}{2} \right)^2 \right) \quad (20)$$

A semleges és a szélső szál távolsága szimmetrikus I-szelvényre:

$$y_{max} = \frac{h}{2} + t_f \quad (21)$$

A számítást az Ansys program segítségével ellenőrizve, melyben az előző esettel ellentétben a terhelésnél ekkor nem z , hanem x irányú nyomaték megadása szükséges. Ebben az esetben is a z -irányú normál feszültséget kell vizsgálni a csavarási normál feszültséghez hasonlóan, hiszen a szelvény síkjából kifelé a gerenda hossz tengelyével párhuzamos feszültségeloszlást kell kapni. A számított eredmények táblázatos formában a 4. táblázatban láthatók.

teljes igénybevételből. A vékonyfalú tartóban ébredő csavarófeszültség az alábbi összefüggéssel határozható meg:

$$\tau_t = \frac{M_t \cdot t}{I_t} \quad (22)$$

Amely összefüggés megadja az adott t vastagságú lemezben ébredő nyírófeszültséget. A számítási eredmények láthatók az alábbi 5. táblázatban, valamint végeelem-módszerrel meghatározott eredmény látható a 7. ábrán.



7. ábra: Nyírófeszültség szimulációval

A számított mennyiség	I_t a csavarással szembe-ellenállás	M_t a csavarónyomaték	τ_t nyírófeszültség csavarásból
Számítás eredménye	$9,825 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$	6,25 kNm	1132,38 MPa

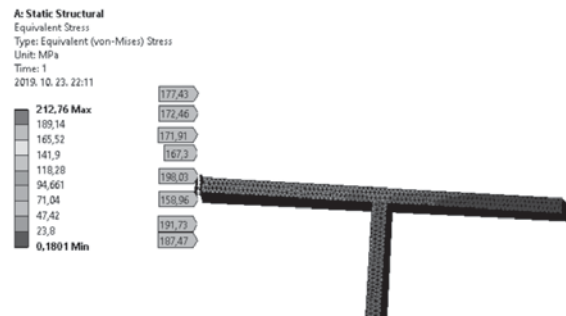
5. táblázat: Nyírófeszültség értéke

A bemutatott feszültségekből a redukált feszültség meghatározható a von-Mises szerinti összefüggéssel, melyet összehasonlítva a szerkezet anyagának választott acél folyáshatárából meghatározott megengedett feszültséggel lehet eldönteni, hogy az adott szerkezet elviseli-e az adott igénybevételt vagy nem.

Ezen összefüggés tovább egyszerűsödik annak ismeretében, hogy a normál feszültségnek csak a rúd hossz tengelyével párhuzamos irányban van nullától eltérő komponense, hasonlóan a nyírófeszültségnek is egyetlen komponense nem nulla. Így:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \quad (23)$$

A számítások elvégzése után a redukált feszültség értéke 215,503 MPa, mely látható az alábbi 8. ábrán. Az S235-ös acél megengedett feszültsége 196 MPa. 1.2-es biztonsági tényező mellett. Látható tehát, hogy a szerkezet nem felel meg adott igénybevétel esetén. A megfelelése biztosítható a tartó geometriájának optimalizálásával, vagy egy magasabb folyáshatárú acél választásával. A redukált feszültség szimulációval meghatározott értéke látható a 8. ábrán.



8. ábra: A redukált feszültség

4. Az alakváltozások meghatározása

A terhelésből adódó feszültség komponensekhez hasonlóan a tartó lehajlásának is három forrása van: a gátolt csavarási normál feszültségből, a hajlításból, valamint a nyíró igénybevételből. A hajlításból származó komponens:

$$v_1 = \frac{M_h \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I_x} \quad (24)$$

A gátolt csavarásból adódó alakváltozás számítása során fel kell használni, miszerint az elmozdulás megegyezik a gátolt csavarás differenciálegyenletének általános megoldásának első deriváltjával, mely lehetővé teszi az elmozdulás számítását egy adott z pontban. A maximális lehajlás a $z=L$ helyen mérhető. Ahhoz, hogy a lehajlást megkapjuk a deformáció értékét meg kell szorozni a torzulási mértékkel [5,6].

$$v_2 = \varphi'(z=L) \cdot \omega_t \quad (25)$$

A nyírófeszültségből származó lehajlás meghatározására az alábbi összefüggés használható:

$$v_3 = \frac{F \cdot L \cdot \rho_q}{8 \cdot G \cdot A_1} \cdot (2 - c_1) \quad (26)$$

Amely összefüggésben A_1 a nyírt keresztmetszet, c_1 a megoszló terheléstől függő tényező, értéke a számítások során 1, ρ_q a nyírófeszültség eloszlási tényező, kiszámítása:

$$\rho_q = \frac{A}{I_x^2} \int_A \left(\frac{S_x^2}{t} \right) dA \quad (27)$$

A kifejezésben S_x a keresztmetszet statikai nyomatéka. A teljes y -irányú lehajlás a három összege, a meghatározott számértékek valamint a végeelem segítségével meghatározott alakváltozás látható az alábbi 6. táblázatban, valamint a 9. ábrán.

t_w a gerinclemez vastagsága. A több célfüggvény kezelése több módon is megoldható, például a súlyozásos módszer, a globális kritérium módszere vagy a min-max eljárás is alkalmas lehet a probléma kezelésére. Jelen feladat megoldására a normált súlyozás módszere lett felhasználva, melynek matematikai képletei a következők [1, 4]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^r \frac{w_i \cdot f_i(x)}{f_i^0}, \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^r w_i = 1, \quad (33)$$

$$f_i^0 \neq 0 \text{ és } w_i \geq 0. \quad (34)$$

Ez a módszer tehát kiküszöböli a célfüggvényértékek közötti nagyságrendbeli eltéréseket, valamint lehetőséget ad az egyes változók fontosságának kezelésére is a w_i súlyozó tényező segítségével. Így a többcélű függvényes probléma skaláris, egycélű függvényes problémává alakítható. A további feltételek, melyek korlátozzák

a változók értékeit, egy része geometriai méretekre vonatkozik a vizsgált tartomány csökkentése céljából, míg vannak a horpadási feltételből következő előírások a geometriára [1, 4].

$$\frac{h}{t_w} \leq 69\varepsilon, \quad (35)$$

$$\frac{b}{t_f} \leq 28\varepsilon. \quad (36)$$

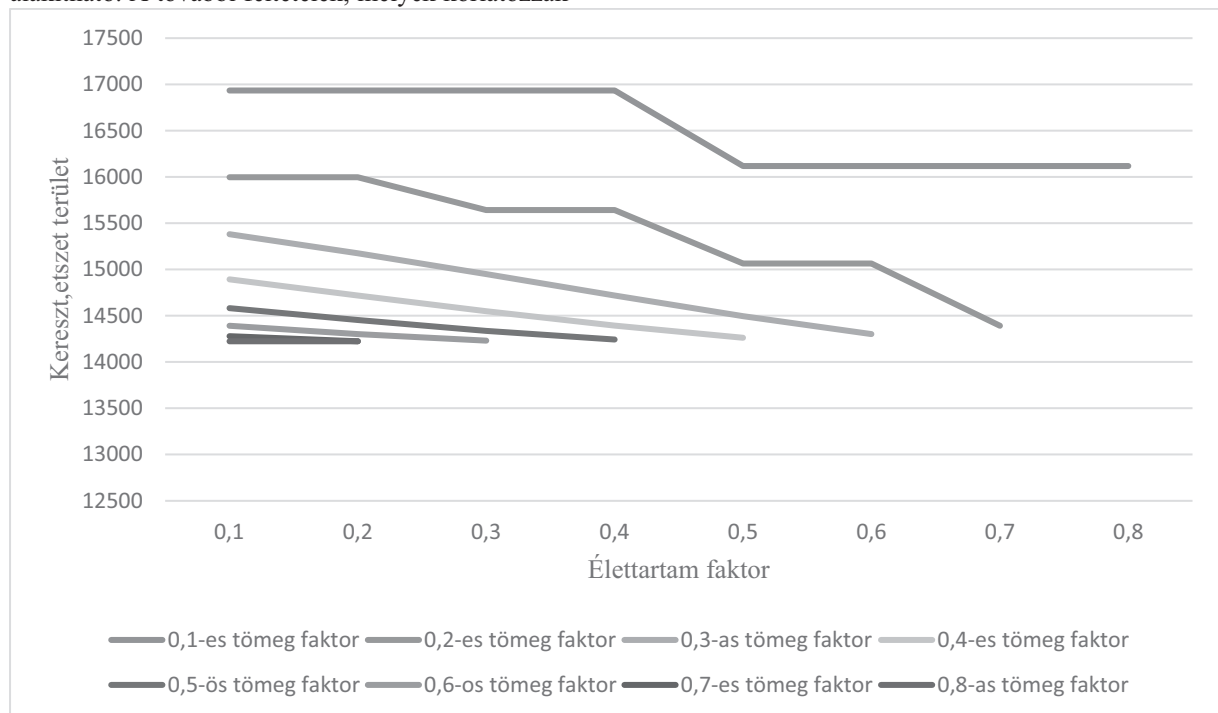
Ahol ε :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235 \text{ MPa}}{f_y}}. \quad (37)$$

A változókra vonatkozó tartomány látható az alábbi 7. táblázatban.

$h \leq 1000$ mm	$250 \text{ mm} \leq b$	$5 \text{ mm} \leq t_f \leq 60$ mm	$5 \text{ mm} \leq t_w \leq 60$ mm
---------------------	-------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

7. táblázat: a változók vizsgált tartománya



13. ábra: A súlyozó tényező hatása az optimumra

A súlyozó tényezők, ezen módszer esetén jelentős hatással bírnak az optimum értékét illetően. Ezen az ábrán az az eset látható, amikor a szerkezet tömegére vonatkozó súlyozó faktor értéke 0,1-ről indul és ez egy adott esetben állandó, ahol minden esethez tartozik két további tényező, melyek az élettartamra

és a tartó lehajlására vonatkoznak. A számítások során az élettartamra vonatkozó faktor léptetése történt 0,1-es értékkel, így a harmadik tényező minden esetben kiadódott a (34)-es egyenletnek megfelelően. Ezzel a módszerrel a vizsgált esetek száma összesen 35. A keresztmetszet területre

gyakorolt hatást mutatja az alábbi 13. ábra. A feltüntetett értékek mindegyike optimum, de mind más és más súlyozás esetén. Azt, hogy az adott szerkezetnél a tömeg, az élettartam vagy a deformáció bír kiemelt fontossággal megadni a tervező feladata [1, 6].

7. Összefoglalás

A cikkben egy a gyakorlat számára is jelentős probléma került tárgyalásra, név szerint a gátolt csavarás jelensége, mely gyakori jelenség a mindennapokban. Elvégzésre került a fellépő feszültségek és az ezek miatt adódó alakváltozások meghatározása mind analitikus úton, mind ezen eredményeket alátámasztva végeselem módszer segítségével is ANSYS 2019 R1-es szoftverben. A fáradási számítások során a cél a fáradásos tönkremenetelig elért ciklusszámok meghatározása volt. Az optimálás több célfüggvény alapján lett elvégezve, melynek kezelésére a normált súlyozás lett felhasználva. Végeredményben különböző súlyozó tényezőkkel előállított optimumok kerültek meghatározásra.

8. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

„A bemutatott kutatómunka az EFOP-3.6.1-15-2016-00011 jelű "Fiatalodó és Megújuló Egyetem - Innovatív Tudásváros - a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi

fejlesztése" projekt részeként - a Széchenyi 2020 keretében - az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg."

9. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] Farkas József, Jármái Károly: Fémszerkezetek innovatív tervezése, Gazdász-Elasztik Kiadó és Nyomda, Miskolc, 2015.
- [2] I. Baláz, M. Kováč, T. Živner, Y. Koleková, "Resistances of I-Section to Internal Forces Interactions," Key Engineering Materials, vol. 710, pp.309-314, 2016, 2019, Vol. 471, Session 4, Paper No.052091. (<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KE M.710.309>)
- [3] Muttnyánszky Á. Szerkezetek szilárdságtana, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981,
- [4] J. Farkas: Optimum design of metal structures, Ellis Horwood Publisher, Chichester, 1984.
- [5] EN 1993-1-9, Eurocode 3, Design of steel structures-Part 1-9: Fatigue, 2005.
- [6] K., Jármái ; M., Petrik: Minimum mass design of compressed I-section columns with different design rules. In: Peter, Platko; Mohamad, Al Ali (szerk.) Advances and Trends in Engineering Sciences and Technologies III. London, Egyesült Királyság / Anglia : CRC Press - Taylor and Francis Group, (2019) pp. 119-124. , 6 p.