

INHOMOGÉN ÉS ANIZOTROP PIEZOELEKTROMOS RÚD EGY STATIKAI FELADATA

A STATIC PROBLEM OF AN INHOMOGENEOUS AND ANISOTROPIC PIEZOELECTRIC BEAM

Ecsedi István¹, Baksa Attila², Lengyel Ákos József³, Gönczi Dávid⁴

ABSTRACT

The authors of present paper published several works concerning with inhomogeneous and/or anisotropic structural elements in last years. The definition and the solution of these problems there was the main point that we used the special theory of mathematical linear elasticity which takes into account the material non-homogeneity and anisotropy. This work describes an analytical solution for a Saint-Venant torsion problem of an inhomogeneous, orthotropic, piezoelectric beam with elliptical cross section.

Kulcsszavak: anizotropia, orthotropia, csavarás, inhomogenitás, piezoelektromos

1. BEVEZETÉS

E tanulmány szerzői számos cikket publikáltak az utóbbi években a különböző inhomogén anyagú és anizotrop szerkezeti elemekkel kapcsolatban [1-14]. Az irodalmi jegyzék nem tartalmazza valamennyi publikált cikket és konferencia közleményt. Az ott alkalmazott matematikai és mechanikai módszerek szemléltetésére jelent tanulmányban inhomogén, orthotrop piezoelektromos ellipszis keresztmetszetű rúd Saint-Venant csavarási feladatának megoldását használjuk. E tanulmány az [1] és [2] publikációk általánosításának tekinthető, orthotrop piezoelektromos ellipszis keresztmetszetű rúdra.

2. ALAPEGYENLETEK, CSAVARÁSI FELADAT MEGOLDÁSA

Az orthotrop piezoelektromos rúd keresztmetszetét és az keresztmetszet határgörbáját az alábbi előírások definiálják:

$$A = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}, \quad (1)$$
$$\partial A = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

A piezoelektromos orthotrop anyag kapcsolt mechanikai-elektromos anyagtörvényét (2)-(3) egyenletek írják le

$$\tau_{xz} = \vartheta f(\rho^2) \left(a_{55} \gamma_{xz} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \vartheta f(\rho^2) \left(a_{44} \gamma_{yz} + e_{24} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$D_x = \vartheta f(\rho^2) \left(e_{15} \gamma_{xz} + \kappa_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad D_y = \vartheta f(\rho^2) \left(e_{24} \gamma_{yz} + \kappa_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad (3)$$

ahol a τ_{xz} és τ_{yz} csúsztató-feszültségeket, D_x és D_y a villamos eltolási vektor komponenseit, ϑ a fajlagos elcsavarodást jelöli, továbbá

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x} - y, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + x, \quad (4)$$

míg $\varphi = \varphi(x, y)$ az egységnyi ϑ elcsavarodáshoz tartozó villamos potenciál, $\omega = \omega(x, y)$ a csavarási függvény, $f = f(\rho^2) > 0$ az anyagi inhomogenitást leíró függvény, dimenziótlan mennyiség pozitív értékű függvény és esetünkben $\rho^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Az ellipszis határgörbe normális vektorának n_x és n_y komponenseit az alábbi egyenletekből nyerjük:

$$n_x = \frac{x}{a^2}, \quad n_y = \frac{y}{b^2}. \quad (5)$$

A mechanikai egyensúly egyenletei a jelen feladatban az alábbiak:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in A, \quad (6)$$
$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \quad (x, y) \in \partial A.$$

A Gauss egyenlet és villamos peremfeltétel, ha a ∂A határgörbén a rúd palástja töltés mentes a következő formába írható:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in A, \quad (7)$$
$$D_x n_x + D_y n_y = 0 \quad (x, y) \in \partial A.$$

Az alkalmazott csavarónyomaték T és belső erőrendszer kapcsolatát a (8) egyenlet adja meg

$$T = \int_A (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dA = \vartheta S_{\tau}, \quad (8)$$

ahol S_{τ} a rúd csavarási merevsége. A (2) mechanikai egyensúlyi egyenletből az következik, hogy

^{1, 2, 3, 4} Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet, mechecs@uni-miskolc.hu

$$f(\rho^2) \left[a_{55} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + a_{44} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + e_{24} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] + 2f'(\rho^2) \frac{x}{a^2} \left[a_{55} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + 2f'(\rho^2) \frac{y}{b^2} \left[a_{44} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) + e_{24} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0 \quad (x, y) \in A, \quad (9)$$

$$\frac{x}{a^2} \left[a_{55} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{y}{b^2} \left[a_{44} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) + e_{24} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0 \quad (x, y) \in \partial A. \quad (10)$$

A (7)_{1,2} egyenlet részletes kifejtése adja a (10), (11) egyenleteket:

$$f(\rho^2) \left[e_{15} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + e_{24} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \kappa_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \kappa_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] + 2f'(\rho^2) \frac{x}{a^2} \left[e_{15} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) - \kappa_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + 2f'(\rho^2) \frac{y}{b^2} \left[e_{24} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) - \kappa_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0 \quad (x, y) \in A, \quad (11)$$

$$\frac{x}{a^2} \left[e_{15} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) - \kappa_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{y}{b^2} \left[e_{24} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) - \kappa_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0 \quad (x, y) \in \partial A. \quad (12)$$

A (9) és (11) egyenletekben alkalmaztuk az $f'(t) = \frac{df}{dt}$ jelölést. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapcsolt (9)-(12) Neumann peremértékfeladat megoldása

$$\omega(x, y) = C_\omega xy, \quad \varphi(x, y) = C_\varphi xy \quad (x, y) \in A \cup \partial A, \quad (13)$$

ahol

$$C_\omega = \frac{(a_{55}b^2 - a_{44}a^2)(\kappa_{11}b^2 + \kappa_{22}a^2) + (e_{15}b^2 - e_{24}a^2)(e_{15}b^2 + e_{24}a^2)}{(a_{55}b^2 + a_{44}a^2)(\kappa_{11}b^2 + \kappa_{22}a^2) + (e_{15}b^2 + e_{24}a^2)^2}, \quad (14)$$

$$C_\varphi = \frac{(a_{55}b^2 - a_{44}a^2)(e_{15}b^2 + e_{24}a^2) - (e_{15}b^2 - e_{24}a^2)(a_{55}b^2 + a_{44}a^2)}{(a_{55}b^2 + a_{44}a^2)(\kappa_{11}b^2 + \kappa_{22}a^2) + (e_{15}b^2 + e_{24}a^2)^2}. \quad (15)$$

A csúsztató feszültségek számítása a (2) és (14), (15) egyenletek alapján az alábbi módon történik:

$$\tau_{xz} = \vartheta f(\rho^2) [a_{55}(C_\omega - 1) + e_{15}C_\varphi]y, \quad \tau_{yz} = \vartheta f(\rho^2) [a_{44}(C_\omega + 1) + e_{24}C_\varphi]x. \quad (16)$$

A villamos eltolási vektor D_x és D_y koordinátáit a (3) és a (14), (15) egyenletek felhasználásával kapjuk,

$$D_x = \vartheta f(\rho^2) [e_{15}(C_\omega - 1) - \kappa_{11}C_\varphi]y, \quad D_y = \vartheta f(\rho^2) [e_{24}(C_\omega + 1) - \kappa_{22}C_\varphi]x. \quad (17)$$

A (8) és (16) egyenletek kombinálásával jutunk az S_τ csavarási merevség képletére

$$S_\tau = abF\pi C_\omega (a^2 a_{44} - b^2 a_{55}) + C_\varphi (a^2 e_{24} - b^2 e_{15}) + a^2 a_{44} - b^2 a_{55} \quad (18)$$

ahol

$$F = \int_0^1 f(\rho^2) \rho^3 d\rho. \quad (19)$$

A vonatkozó szakirodalom használja a „villamos csavarási merevséget” is, amelynek értelmezését az alábbi egyenlet adja meg

$$S_D = \frac{1}{\vartheta} \int_A (xD_y - yD_x) dA. \quad (20)$$

Egyszerű számolással, a (17) képletek felhasználásával kapjuk az alábbi eredményt

$$S_D = abF\pi C_\omega (b^2 e_{24} - a^2 e_{15}) - C_\varphi (b^2 \kappa_{22} - a^2 \kappa_{11}) + b^2 e_{24} - a^2 e_{15}. \quad (21)$$

3. SZÁMPÉLDA

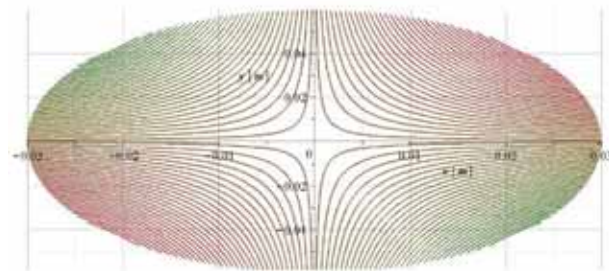
A felírt képletek alkalmazhatóságát az alábbi számpélda szemlélteti:

$$a = 0,06m, b = 0,03m, \vartheta = 0,5 \times 10^{-2} m^{-1}, f(\rho^2) = \exp(\alpha \rho^2), \alpha = 0,5 m^{-2}, a_{44} = 6,27 \times 10^{10} Pa, a_{55} = 5,13 \times 10^{10} Pa, e_{15} = 17 Cm^{-2}, e_{24} = 9 Cm^{-2}, \kappa_{11} = 2,0797 \times 10^{-9} Cm^{-1} V^{-1}, \kappa_{22} = 2,186 \times 10^{-9} Cm^{-1} V^{-1}.$$

A dolgozat 2. fejezetében levezetett képletek felhasználásával az alábbi eredményeket kapjuk:

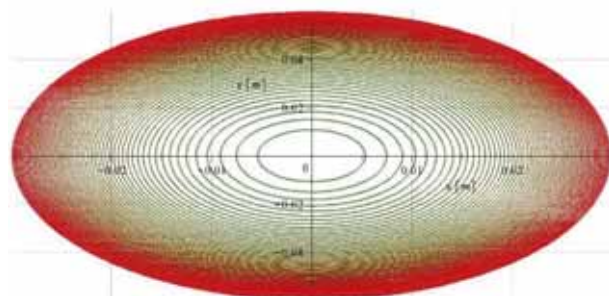
$$C_\omega = -0,5208770539, \quad C_\varphi = -7,9517366 \times 10^8 \frac{V}{m}, S_\tau = 4,296108668 Nm^2, \quad S_D = 0,00008653349 Cm^2$$

Az 1. ábra szemlélteti a csavarási függvény kontúr-görbéjét. Hasonló képet mutat a villamos potenciál kontúr-görbéje, tekintettel a (13) egyenltre.



1. ábra: Az $\omega = \omega(x, y)$ csavarási függvény szintgörbéi

A Prandtl féle csavarási feszültség függvény kontúr-görbéit a 2. ábrában vázoltuk.

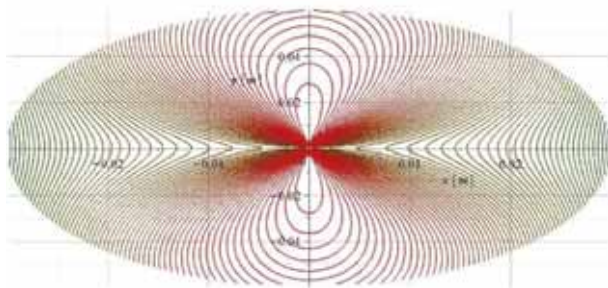


2. ábra: Az $U = U(x, y)$ feszültségfüggvény szintgörbéi

A nyírófeszültség, azaz a

$$\tau(x, y) = \sqrt{\tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y)}$$

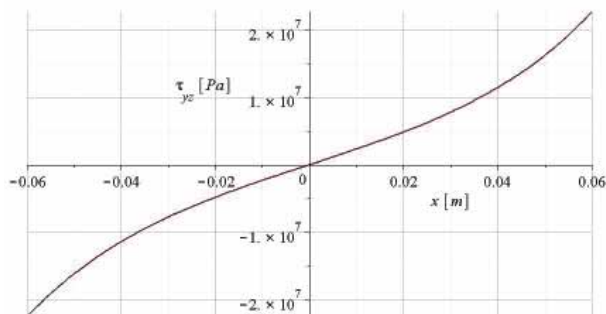
függvény kontúr-görbéjét a 3. ábra mutatja be.



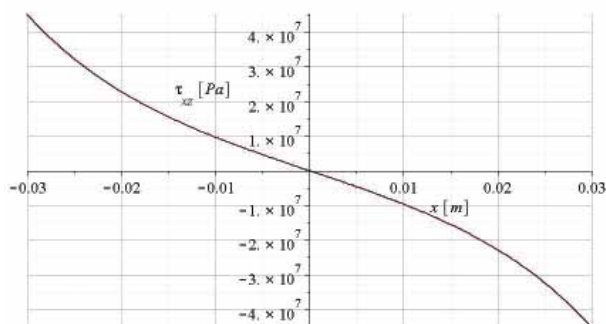
3. ábra: A $\tau(x, y)$ csúsztató feszültség szintgörbéi

A $\tau_{yz}(x, 0)|x| \leq a$ és a $\tau_{xz}(0, y)|y| \leq b$ függvények görbéit a 4a és a 4b ábrák szemléltetik. A maximális csúsztató feszültség τ_0 értékét a képletből nyerjük

$$\tau_0 = |\tau_{xz}(0, b)| = 45,27647 \text{ MPa.}$$



4a. ábra: A $\tau_{yz}(x, 0)$ csúsztató feszültségfüggvény görbéje $|x| \leq a$.



4b. ábra: A $\tau_{xz}(0, y)$ csúsztató feszültségfüggvény görbéje $|y| \leq b$.

4. KÖVETKEZTETÉSEK

A tanulmány keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező orthotrop ellipszis keresztmetszetű piezoelektromos rúd Saint-Venant csavarási feladatának a megoldásával foglalkozik. Bizonyítja, hogy a csavarási függvény és a villamos potenciál független a keresztmetszeti inhomogenitástól. A levezetett megoldásból az $e_{15} = e_{24} = 0$ helyettesítéssel az [1] tanulmányban vizsgált orthotrop rugalmas rúdra vonatkozó eredményeket kapjuk meg. Továbbá az $a = b$ helyettesítéssel e tanulmányban levezetett képletek a [2] tanulmány egyenleteire vezetnek, amelyek az orthotrop kör kereszt-

metszetű radiálisan inhomogén piezoelektromos rúd Saint-Venant csavarási feladatának megoldását adják meg.

5. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutató munka a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projekt támogatásával valósult meg, amelyért a szerzők köszönetüket fejezik ki.

6. IRODALOM

- [1] Ecsedi I., Baksa A.: Inhomogén, anizotrop ellipszis keresztmetszetű rudak Saint-Venant csavarása, *GÉP*, LXIX, 2018/3, pp.12-15.
- [2] Ecsedi I., Baksa A.: Saint-Venant torsion of non-homogeneous orthotropic circular cylinder. *Arch. Appl. Mech.*, 2019. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-019-0164-o-y>
- [3] Ecsedi I., Baksa A.: Anizotrop anyagú prizmatikus rudak Saint-Venant csavarási feladata, *GÉP*,
- [4] Ecsedi I., Baksa A.: Saint-Venant torsion of cylindrical orthotropic elliptical cross-section. *Mech. Res. Communications*, **99**, 2019, pp.42-46.
- [5] Ecsedi I., Lengyel Á.J., Baksa A.: Torsion of cylindrically orthotropic composite bar with cross section of a sector of solid circle. *microCAD 2019*.
- [6] Ecsedi I., Baksa A.: A theory for the longitudinal vibrations of anisotropic elastic bars based on the Rayleigh-Bishop model, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, **14**(1-2), 2019, pp.25-39.
- [7] Lengyel Á.J., Ecsedi I.: Second order analysis of composite beams with interlayer slip. *Multiscience XXXII. microCAD Scientific Conference*, Paper ID: 15, Miskolc-Egyetemváros, 2018.
- [8] Lengyel Á.J., Ecsedi I.: Torsional deformation of compound circular bar. *Multiscience XXXII. microCAD Scientific Conference*, Paper ID: 16, Miskolc-Egyetemváros, 2018.
- [9] Ecsedi I., Baksa A.: Inhomogén anyagú rugalmas kúpok vizsgálata. *GÉP*, **68**(3), pp.48-53, 2017.
- [10] Gönczi D., Ecsedi I.: Thermoelastic analysis of functionally graded hollow circular disk. *Archiwum Budowy Maszyn*, **62**(1), pp.5-18, 2015.
- [11] Ecsedi I., Gönczi D.: Thermoelastic stresses in nonhomogeneous prismatic bars. *Annals of Faculty of Engineering Hunedoara – International Journal of Engineering*, **13**(2), pp.49-52, 2015.
- [12] Ecsedi I., Lengyel Á.J., Baksa A.: Neutral inhomogeneity in circular cylinder subjected to axial load on its lateral boundary. *International Journal of Engineering and Management Sciences*, **5**(2), pp.35-42, 2020.
- [13] Ecsedi I.: Non-uniform torsion of functionally graded anisotropic bar of an elliptical cross section. *Acta Mechanica*, **231**(7), pp.2947-2953, 2020.
- [14] Ecsedi I., Lengyel Á.J., Gönczi D.: Bounds for the thermal conductance of body of rotation. *International Review on Modelling and Simulations*, **13**(3), pp.185-193, 2020.