

# A TÁMASZ ELMOZDULÁSÁNAK ÉS FORGÁSÁNAK HATÁSA GÖRBE RUDAK STABILITÁSÁRA

## THE EFFECT OF MOVEMENT AND ROTATION OF THE SUPPORT ON THE STABILITY OF ARCHES

Kiss László Péter\*

### ABSTRACT

The paper aims to find how a small imperfection in the support condition can affect the allowable load of circular arches to prevent buckling. The one-dimensional beam model is based on the single-layer Euler-Bernoulli theory. The static equilibrium equations are obtained from the principle of virtual work. Graphical representation of the result is provided.

### 1. BEVEZETÉS

Gyakori a görbült szerkezeti elemek alkalmazása mérnöki feladatok megoldásakor. Ennek legjelentősebb oka ezek kedvező mechanikai viselkedése a változatos terhelések során.

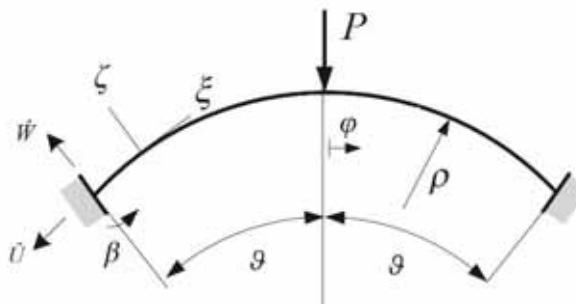
A különféle szerkezeti elemek stabilitásvizsgálata régóta foglalkoztatja a tudományos világot, és napjainkban is aktuális [1-4]. Ami a görbe rudak kihajlását illeti, elérhetők numerikus [5] és analitikus [6-9] megoldások is. Az idézett cikkek igen változatos témaköröket érintenek. Kitérnek többek között funkcionálisan gradiens anyagú, vagy éppen szakaszonként állandó keresztmetszetű rudakra, konstans és megoszló terhelésekre, különféle megtámasztási esetekre, valamint dinamikai vizsgálatokra is.

A jelen tanulmány körívalakú, állandó keresztmetszetű lapos görbe rudak síkbeli stabilitásvizsgálatával foglalkozik. Az anyag homogén, izotrop, lineárisan rugalmas, a terhelés pedig a tetőpontban működő koncentrált sugárirányú nyomóerő. A megtámasztás alapvetően befogás a végeken, ugyanakkor ezt a vázolt, minden szempontból tökéletesen szimmetrikus elrendezést a valóságban nem lehet elérni. Éppen ezért a cikk feltételezi, hogy az egyik támasz (például a nem megfelelő alapozás miatt) kismértékben el tud mozdulni, illetve fordulni. Ezeknek a jelenségeknek (megzavarásoknak) a terhelhetőségre gyakorolt hatását kívánja feltárni a kutatómunka.

### 2. MECHANIKAI MODELL

#### 2.1. Kinematikai és anyagi egyenletek

Az 1. ábrán látható középvonalhoz van kötve a koordináta-rendszer, melynek  $\xi$   $\zeta$  tengelypárja jelöli ki a középvonal síkját. Előbbi az érintőirányt, utóbbi a normálirányt azonosítja. A rúd körívalakú, kezdeti görbületi sugara  $\rho$ , nyílásszöge pedig  $\Theta = 2\vartheta$ . Terhelése egy koncentrált  $P$  nagyságú erő. Az ívkordinátát  $s$ , a szögkoordinátát pedig  $\varphi$  jelöli.



1. ábra Az egydimenziós rúdmodell

A kinematikai modell megalkotásához az Euler-Bernoulli hipotézist felhasználva [9] a fajlagos nyúlás és a keresztmetszetek szögelfordulása a középvonalon az

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + \frac{w}{\rho} + \frac{1}{2}\psi^2; \quad \psi = -\frac{dw}{ds} \quad (1)$$

módon fejezhetők ki. Itt  $u$  az érintőirányú elmozdulás,  $w$  a normálirányú elmozdulás. A modell tehát a forgásmezőn keresztül nemlineáris.

Lineárisan rugalmas, izotrop anyagi viselkedést feltételezve a rúderő, illetve a hajlítónyomaték

$$N = AE\varepsilon - \frac{IE}{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{du}{ds} - \frac{d^2w}{ds^2} \right), \quad (2)$$

$$M = -IE \left( \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{\rho^2} \right), \quad (3)$$

ahol  $A$  a keresztmetszet területe,  $I$  az  $\eta$  tengelyre vonatkozó másodrendű nyomaték,  $E$  pedig a

\* adjunktus, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet

rugalmassági modulusz. A fentiekből következik, hogy a középvonal nyúlásához mindkét igénybevétel hozzájárul, hiszen

$$N + \frac{M}{\rho} = AE\varepsilon. \quad (4)$$

## 2.2. Egyensúlyi egyenletek

A virtuális munka elv segítségével az alábbi egyensúlyi egyenletek vezethetők le:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{dM}{ds} - \left( N + \frac{M}{\rho} \right) \psi \right] &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left[ \frac{dM}{ds} - \left( N + \frac{M}{\rho} \right) \psi \right] - \frac{N}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Utóbbi összefüggések átalakíthatók a tömörebb

$$\varepsilon' = 0, \quad W'''' + (\chi^2 + 1)W'' + \chi^2 W = \chi^2 - 1 \quad (6)$$

formába, ahol

$$\frac{d(\cdot)}{ds} = (\cdot)'; \quad W = \frac{w}{\rho}; \quad \chi^2 = 1 - \mu\varepsilon; \quad \mu = \frac{A\rho^2}{I}. \quad (7)$$

## 3. AZ EGYENSÚLYI EGYENLETEK MEGOLDÁSA

A (6)<sub>2</sub> egyenlet zárt alakban megoldható:

$$\begin{aligned} W(\varphi) = \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2} + B_1 \cos \varphi + B_2 \sin \varphi - \\ - \frac{B_3}{\chi^2} \cos \chi\varphi - \frac{B_4}{\chi^2} \sin \chi\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Ezt az elmozdulásra vonatkozó megoldást külön keressük a rúd bal- és jobb oldalán, mivel a külső terhelés miatt nem minden mező folytonos. Emiatt a négy-négy, összesen tehát nyolc integrációs állandó kifejezéséhez ugyanennyi perem- és illesztési feltétel előírása szükséges. A jobb oldali, ideális befogásnál zérus az elmozdulás és a forgás, míg a bal oldali támasznál megengedettek ezek a jellemzők, vagyis ott

$$W(-\vartheta) = \dot{W}; \quad U(-\vartheta) = \dot{U}; \quad \psi(-\vartheta) = \dot{\psi}. \quad (9)$$

Megjegyzendő, hogy az érintő- és normálirányú mozgások alkalmas lineáris kombinációjaként megadható tetszőleges irányú elmozdulás. Az elmozdulás nagyságát  $d$ , irányát pedig a  $\beta$  szög azonosítja a továbbiakban. Utóbbi függőlegesen lefelé

történő elmozdulásnál zérus, értéke pedig az óramutató járásával ellentétes irányban nő.

A további feltételek az erő támadáspontjára vonatkoznak, ahol folytonosak az elmozdulások, a forgások és a nyomaték, viszont

$$-W'''(-0) + W'''(+0) = -2Q/\vartheta \quad (10)$$

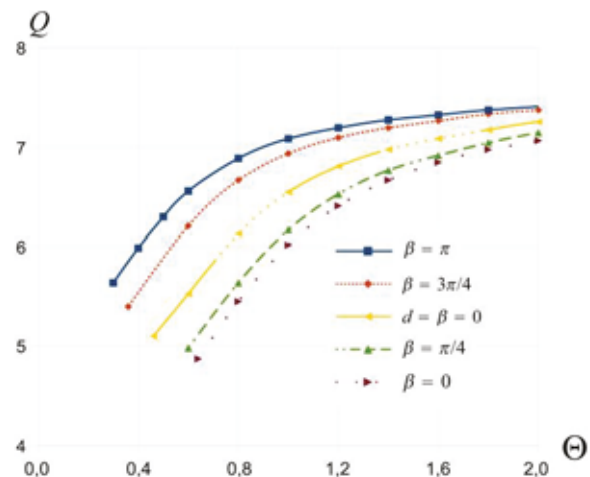
nagyságú szakadás következik be a nyíróerőben, ami az elmozdulásmező harmadik deriváltjával arányos. A képletben  $Q = P\rho^2\vartheta/2IE$  a dimenziótlán terhelés.

A fentiek ismeretében, s mivel (6)<sub>1</sub> szerint a középvonalon állandó a fajlagos nyúlás, írhatjuk, hogy

$$\varepsilon = \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \varepsilon(\varphi) d\varphi = C_0 + C_1 Q + C_2 Q^2. \quad (11)$$

A  $C_i$  állandók zárt alakban felírhatók a kinematikai egyenletek segítségével. A (11) összefüggés valójában a nemlineáris kapcsolat a terhelés és az alakváltozás között. Ennek analitikus, vagy numerikus kiértékelése után közvetlenül megkereshetők a rúd elsődleges egyensúlyi útjának határpontjai, vagyis kideríthető, hogy várhatóan mikor, milyen terhelésnél következik be a stabilitásvesztés.

## 4. SZÁMÍTÁSI EREDMÉNYEK



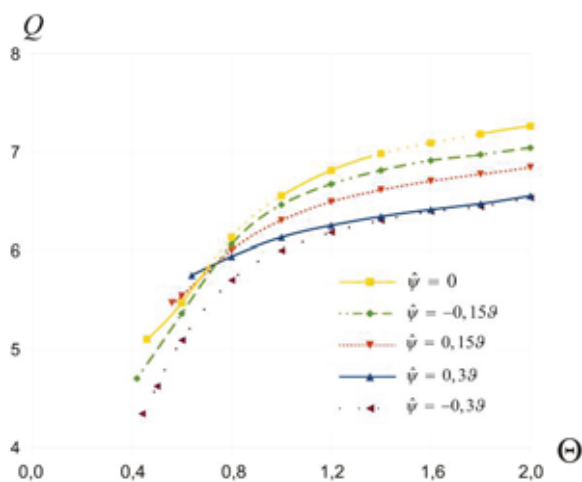
2. ábra A kritikus erő a rúd nyílásszögének függvényében különböző irányú elmozdulásokra

Arra keressük a választ, hogyan befolyásolja a megengedhető (kritikus) terhelést az egyik támasz kismértékű elmozdulása/forgása. Mivel a modell lapos rudakra lett kitalálva, ez a nyílásszögre ad egy alkalmazhatósági korlátot. Feltételezzük, hogy a továbbiakban  $S/r=100$  – ez a középvonal hosszának és a keresztmetszet inerciasugarának viszonyszáma.

A 2. ábra görbéinél a támasz  $d$  elmozdulása a rúd hosszának 250-ed része (kivéve persze a befalazás esetét),

amikor  $d=0$ ). Megfigyelhető, hogy az elmozdulásnak lehet előnyös és hátrányos hatása is a befogáshoz képest. Kisebb nyílásszögek esetében ezek a tulajdonságok jelentősebbek. Az is észrevehető, hogy az elmozdulás irányának függvényében változik a kihajlás alsó geometriai határa is, azaz a görbék kezdőpontja. Összességében megállapítható, hogy terhelhetőség szempontjából nem a befalazás a legkedvezőbb.

A 3. ábra esetében a bal oldali támasznál csak a forgások voltak megengedve, a legnagyobb vizsgált érték a félnyílásszög 30%-a. Jól látszik, hogy az egyes eredmények közötti eltérések annál nagyobbak, minél nagyobb a rúd nyílásszöge. Az is szembetűnő, hogy az ideális, befogott megtámasztás a legelőnyösebb, amennyiben  $\Theta > 0.7$ . Ezen határ alatt viszont akkor a legkedvezőbb egy adott geometriájú rúd viselkedése, ha  $\psi = 0.3\vartheta$ , hiszen egy kis szögtartományban ide tartozik a legnagyobb terhelhetőség, ez alatt pedig nem várható stabilitásvesztés. A teljes vizsgálati intervallumban a legkedvezőtlenebb eredmények a  $\psi = -0.3\vartheta$  értéknél tapasztalhatók.



3. ábra A kritikus erő a nyílásszög függvényében különböző forgások esetén

## 5. ÖSSZEFOGLALÁS

Ismertettem egy új, geometriailag nemlineáris egydimenziós rúdmodell, amelynek segítségével elvégezhető körívalakú lapos rudak síkbeli statikus stabilitásvizsgálata. A terhelés koncentrált erő, az egyik megtámasztás ideális befogás, a másikon pedig a valós körülmények modellezése érdekében előfordulhatnak elmozdulások és forgások. Az eredmények tanúsága szerint ezeknek a hatásoknak külön-külön is jelentős befolyása van a megengedhető terhelésre. Adott esetben a teherbíró képességre számottevően pozitív hatással is lehetnek.

## 6. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutatómunka a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projekt támogatásával valósult meg

## 7. IRODALOM

- [1] ZHANG J., ZHANG M., TANG W., WANG W., WANG M.: Buckling of spherical shells subjected to external pressure: A comparison of experimental and theoretical data, *Thin-Walled Structures*, Vol. 111, (2017), pp. 58-64, doi:10.1016/j.tws.2016.11.012
- [2] PLAUT R. H.: Snap-through of arches and buckled beams under unilateral displacement control, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 63, (2015), pp. 109-113, doi:10.1016/j.ijsolstr.2015.02.044
- [3] LALIN V., DMITRIEV A., DIAKOV S.: Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches, *Magazine of Civil Engineering*, Vol. 89, No. 4, (2019), pp. 39-51, doi:10.18720/MCE.89.4
- [4] GÖNCZI D.: Finite element investigation in the forming process of aluminium aerosol cans, *Acta Technica Corviniensis – Bulletin of Engineering*, Vol. 13, No. 4, (2020), pp. 19-22
- [5] BABAEI H., KIANI Y., ESLAMI M. R.: Thermomechanical nonlinear in-plane analysis of fix-ended FGM shallow arches on nonlinear elastic foundation using two-step perturbation technique. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 15, No. 2, (2019), pp. 225-244, doi:10.1007/s10999-018-9420-y
- [6] YAN S.-t., SHEN X., CHEN Z., JIN Z.: On collapse of non-uniform shallow arch under uniform radial pressure. *Engineering Structures*, Vol. 160, (2018), pp. 419-438, doi:10.1016/j.engstruct.2018.01.027
- [7] BATENI M. ESLAMI M. R.: Non-linear in-plane stability analysis of FG circular shallow arches under uniform radial pressure. *Thin-Walled Structures*, Vol. 94, (2015), pp. 302-313, doi:10.1016/j.tws.2015.04.019
- [8] PI Y.-L., BRADFORD M. A.: Dynamic buckling of shallow pin ended arches under a sudden central concentrated load. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 317, (2008), pp. 898-917, doi:10.1016/j.jsv.2008.03.037
- [9] LU H., LIU L., PI Y.-L., BRADFORD M. A. HUANG Y.: Effects of movement and rotation of supports on nonlinear instability of fixed shallow arches, *Thin-Walled Structures*, Vol. 155, (2020), doi:10.1016/j.tws.2020.106909
- [10] KISS L. P.: Stability of fixed-fixed shallow arches under arbitrary radial and vertical forces. *Magazine of Civil Engineering*, Vol. 95, No. 3, (2020), pp. 31-41, doi:10.18720/MCE.95.3