

VÉGESELEM KÖRNYEZETBEN DEFINIÁLT MOZGÓ HŐFORRÁS ANALITIKUS VALIDÁLÁSA

ANALYTICAL VALIDATION OF MOVING HEAT SOURCE DEFINED IN FINITE ELEMENT ENVIRONMENT

Döbrentei Sándor, PhD. hallgató

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gép- és Terméktervezés Tanszék, 1111 Bp. Műegyetem rkp. 3
e-mail: dobrentei.sandor@gt3.bme.hu; web: gt3.bme.hu

Dr. Váradi Károly, egyetemi tanár

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gép- és Terméktervezés Tanszék, 1111 Bp. Műegyetem rkp. 3
e-mail: varadik@eik.bme.hu web: gt3.bme.hu

ABSTRACT. This paper presents the analytical validation method of the flash temperature effect caused by a moving heat source in accordance with a railway wheel-rail interaction during slip. The solution of the analytical method and the convergence of the finite element model are also introduced, focusing on the effect of element size and stepping of moving heat source on the convergence.

1. BEVEZETÉS

Az adhéziós vasúti közlekedés hatékonysága abban rejlik, hogy a kerék-sín kapcsolatban létrejövő érintkezési felület a jármű-pályaméreteihez képest kicsi, így szinte tiszta gördülés jön létre, ami nagyon kis ellenállást jelent a szerelvények mozgatása során. Ugyanakkor fékezés és gyorsítás közben az egymáson legördülő alkatrészek (kerék és sín) eltérő sebességgel mozognak egymáshoz képest, ami különböző mértékű csúszva gördülést eredményez. A nagy felületi terhelésből adódóan már kis relatív sebesség esetén is igen nagy lesz a hőteljesítmény, ami az érintkezésben lévő alkatrészeket terheli. A súrlódásból származó hőteljesítmény a következő összefüggéssel számolható:

$$Q = \mu \cdot F \cdot v_r [W]. \quad (1.1)$$

A fenti egyenletben μ [1] a súrlódási tényező, F [N] a normálerő és v_r [m/s] a felületek közötti relatív sebesség (1. ábra). Az így keletkezett hőmennyiség az érintkezési felületen terheli az érintkezésben lévő testeket, és mindkét felülethez képest mozog. A kerékhez képest v_k kerületi sebességgel, míg a sínhez képest $v_k + v_r$ sebességgel. A hőteher eloszlását a kerék és a sín között az α dimenziótlan hőpartíciós tényezővel vehető figyelembe:

$$Q_k = \alpha \cdot Q, \quad (1.2a)$$

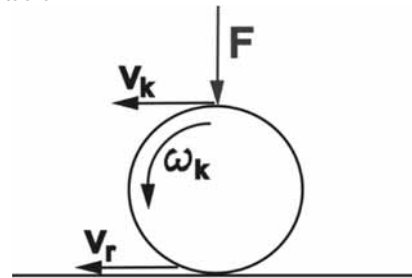
$$Q_s = (1 - \alpha) \cdot Q, \quad (1.2b)$$

ahol Q_k [W] a kerékre jutó hőteher, míg Q_s [W] a sínre jutó hőteher.

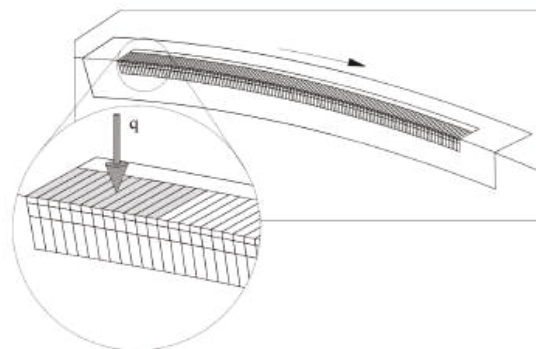
Az [1]-es irodalomban mozgó hőforrás végeeselemes modellezésének metódusa kerül bemutatásra. Itt a szerzők a mozgó hőforrást úgy definiálták, hogy a kerék futófelületén található elemek felületén definiálták a hőfluxust, amely az idő függvényében egyes részekben négyzögjelként rendre

aktiválódott majd deaktiválódott a hőforrás mozgási sebességének függvényében. Az alkalmazott modell a 2. ábrán látható. A modell validálása analitikus eljárás alapján meghatározható maximális hőmérséklet értéke alapján történt. A szakirodalomban meghálálható a hővezetés alapegyenletének megoldása közel végtelen kiterjedésű feltérré, amit Jaeger [2] vezetett le mozgó hőforrás esetére, majd Tian és Kennedy [3] vizsgálták tovább különböző érintkezési viszonyok és sebességek esetére.

Jelen cikkben egy Altair Optistruct környezetben létrehozott, a mozgó hőforrás szimulációjára alkalmas végeeselem modell felépítése és analitikus módszerrel történő validálása kerül bemutatásra.



1. Ábra. Kerék-sín kapcsolat modellje.



2. Ábra. Mozgó hőforrás szimulációja végeeselem környezetben. [1]

2. ANALITIKUS MEGOLDÁS

Az analitikus megoldást a hővezetés differenciálegyenletének izotrop anyagokra érvényes változatának megoldásából kapjuk [4]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

ahol T [K] a hőmérséklet, x , y és z a helykoordináták [m], t [s] az idő, χ [m²/s] pedig a termikus diffúzióviszony:

$$\chi = \frac{k}{\rho \cdot C_p} \quad (2.2)$$

A fenti képletben k [W/mK] a hővezetési tényező, ρ [kg/m³] a sűrűség, C_p [J/kgK] a fajhő. A (2.1)-es egyenlet megoldása különböző alakú érintkezési felületek és különböző eloszlású hőforrások esetére megtalálható [2], [3]-as irodalomban. Végeselem módszer szempontjából megközelítve a problémát a legkézenfekvőbb, ha téglalap alakú hőforrást vizsgálunk egyenletes eloszlással, mert ezt a legkönnyebb modellezni, ha figyelembe vesszük a térbeli diszkrétizációt. A (2.1)-es egyenlet megoldása téglalap alakú hőforrás esetére, amennyiben az v sebességgel mozog a végtelen kiterjedésű féltér felületén, a következő alakban írható fel [2]:

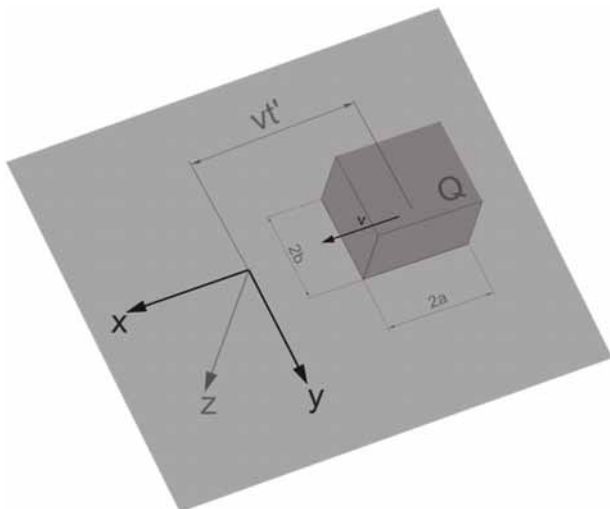
$$T(x, y, z) = \frac{\chi q}{2k v \sqrt{2\pi}} \int_0^v \frac{\text{Exp}\left[-\frac{Z^2}{2u}\right]}{\sqrt{u}} * \left\{ \text{erf}\left(\frac{Y+B}{\sqrt{2u}}\right) - \text{erf}\left(\frac{Y-B}{\sqrt{2u}}\right) \right\} * \left\{ \text{erf}\left(\frac{X+L+u}{\sqrt{2u}}\right) - \text{erf}\left(\frac{X-L-u}{\sqrt{2u}}\right) \right\} du. \quad (2.3)$$

Itt q [W/m²] a területegységre vonatkoztatott fajlagos hőteljesítmény, u pedig integrálási változó. Az erf kifejezés a statisztikából ismert hibafüggvényt definiálja:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \text{Exp}(-u^2) du.$$

A képletben található további mennyiségek a következők:

$$X = \frac{vx}{2\chi}, Y = \frac{vy}{2\chi}, Z = \frac{vz}{2\chi}, L = \frac{va}{2\chi}, B = \frac{vb}{2\chi}, V = \frac{v^2 t'}{2\chi}, \quad (2.4)$$



3. Ábra. Féltér felületén mozgó hőforrás szemléltetése.

ahol a és b a hőforrás fél oldalszélességét jelölik, t' pedig az az időtartam, ami alatt a hőforrás a vizsgált pontba ér. A jelölések értelmezésére a 3. ábra szolgál. Mivel a valóságban az érintkezési felület többszörösen görbült felületek esetén ellipszis vagy kör alakú, így a modellezés során meg kell határozni egy egyenértékű téglalap méreteit a területek egyenlősége alapján [5]. A vizsgált érintkezés paraméterei egy vasúti kerék és sín pár érintkezése, ahol a felületeket összeszorító erő $F=63\,750$ N nagyságú. Ez a terhelés megfelel egy Siemens Viaggio Classic kocsik kerékterhelésének [6]. Ebben az esetben az érintkezési ellipszis fél-tengelyeinek méretei $a=6,3$ mm és $b=5$ mm nagyságúak. Ezzel közel egyenlő téglalap területet kapunk, ha az oldalak hosszát 12 mm-re és 8,25 mm-re választjuk [1]. (2.3)-as összefüggés zárt alakban nem oldható meg, csak numerikus integrálással. Abban az esetben, ha az x -tengely menti hőmérsékleteloszlásra vagyunk kíváncsiak az $y=z=0$ helyen, úgy a (2.4) alatti összefüggésekbe y és z helyére zérust helyettesítve, majd (2.3)-as összefüggést u -szerint numerikusan integrálva a vizsgált x -tengely menti tartomány bizonyos pontjaiban, megkapjuk a keresett hőmérsékleteloszlást. Az integrálás kívánt pontossága a felosztás sűrűségének növelésével érhető el, konvergenciavizsgálatot alkalmazva.

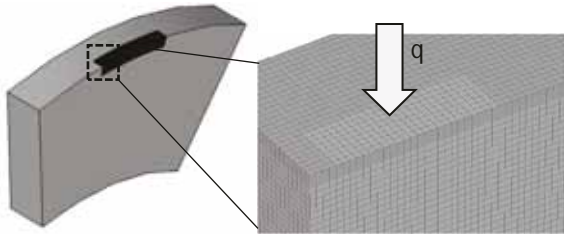
3. A VÉGESELEM MODELL

Mivel az eddigi vizsgálatok csak a termikus modell validálására terjedtek ki, így a végeelem modellben csak a kerék futófelületének egy 40°-os szegmense került vizsgálatra, ugyanis a gyorsan mozgó hőforrás a vizsgált időtartamon belül csak egy szűk környezetben fejti ki hatását. Az (1.2a) összefüggés alapján a vizsgált üzemiállapotban $\mu=0,15$ súrlódási tényezőt és $v_r=15$ km/h relatív sebességet feltételezve az előző fejezetben említett terhelő erővel és $\alpha=0,5$ -ös hőpartíciós tényezővel számolva a kerékre jutó hőmennyiség:

$$Q_k = 0,5 * 0,15 * 63.750 * 4,1667 = 19.922 \text{ W}.$$

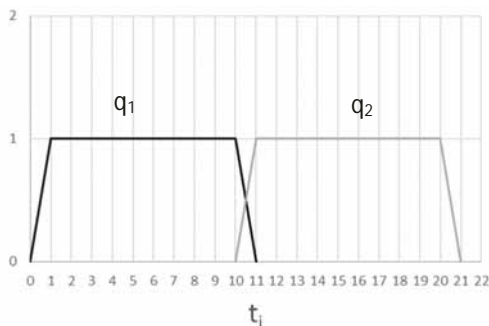
Ez a hőmennyiség egyenletesen oszlik el az $A=12*8,25=99$ mm² területű téglalappal modellezett érintkezési felületen. A számítás során használt termikus anyagjellemzők: $k=54$ W/mK, $\rho=7850$ kg/m³, $C_p=465$ J/kgK, a kiindulási hőmérséklet: $T_{ref}=22^\circ\text{C}$. A vasúti kerék karimáját figyelmen kívül hagyva, a kerék geometriája szimmetrikusnak tekinthető, így a középsíkban szimmetriasíkot feltételezve a modell mérete csökkenthető. Ilyenkor termikus vizsgálatnál a szimmetriafeltétel, hogy erre a síkra merőlegesen a hőáram zérus, ami természetes peremfeltétel, így nem kell külön definiálni. A vizsgálatnak ebben a szakaszában a felületi hőátadás és hősugárzás a környezet felé elhanyagolásra került. A modellezés során a kerék felületének íves része is sík felülettel lett figyelembe véve. A szegmens belső sugara 300 mm, a külső 460 mm, szélessége 20 mm a szimmetriafeltétel alkalmazása után. A használt elemméret a futófelületen 0,5 mm, melynek vastagság irányú mérete a felülettől 1 mm távolságon belül 0,1 mm volt. Az alkalmazott elem típus 20 csomópontos hexaéder elem volt. Az elemméret megválasztásánál kiindulási alapot

nyújtott az analitikus eljárás során kapott eredményekből számolható hőmérséklet gradiens. A vastagság mentén az elemek oldalhosszának értéke az itt tapasztalható nagyobb hőmérséklet gradiens miatt az 1/5-re lett redukálva. Az első futtatás során alkalmazott háló a 4. ábrán látható. Az ábrán jelölve van a hőforrás definiálása is, a futófelületen található elemek felső felületén. A hőforrás mozgása az első



4. Ábra. A vizsgált szegmens és az alkalmazott háló.

számításnál 1 mm-es lépésközökben került léptetésre. Ez Optistruct-ban úgy érhető el, hogy a 4. ábrán látható hőforrást 1 mm-es eltolásokkal definiáljuk, és minden hőteher a hőforrás mozgásának megfelelően aktiválódik. A hőforrás mozgási sebességét a kerékhez képest $v_k=85 \text{ km/h}=23.6 \text{ m/s}$ sebességgel kell figyelembe venni, ami azt eredményezi, hogy a hőteher minden egyes pozícióban $4,2373 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ -ig tartózkodik. Ez az intervallum további tíz időlépésre lett felosztva, és a hőteher mozgása 60 mm-es szakaszon lett vizsgálva a kerület mentén. Ez 600 darab $\Delta t=4,2373 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ nagyságú időlépést jelent összesen. A hőfluxus időbeli diskretizációjának értelmezésére az 5. ábra szolgál. Az ábrán jól látható, hogy mivel a számítás bemeneti adatainak definiálása során egy időlépésnyi időintervallumra van szükségünk a hőáram be- illetve kikapcsolására, így bekapcsolt állapotban csak 9 időlépést tölthet, így elkerülhető a felesleges hőbevitel. Annak érdekében, hogy a bemenő adatok definiálása során kiküszöbölhető legyen a hosszadalmas munka és a nagy hibázási lehetőség, ami a 60 időlépés manuális definiálásából ered, az adatokat egy FORTRAN nyelven megírt kód generálta az Optistruct által beolvasható formátumnak megfelelően. Ez nagyban egyszerűsíti a későbbiekben a módosítást is, amennyiben finomításra lenne szükség. Fentiek ismeretében 60 lépést vizsgálva a szimuláció ideje összesen $t=2,5424 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ -nyi időtartamra terjedt ki.

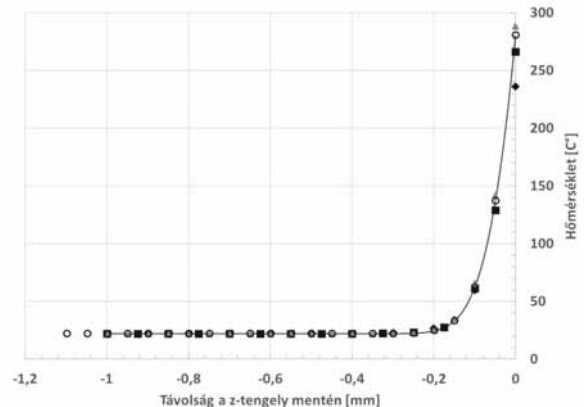
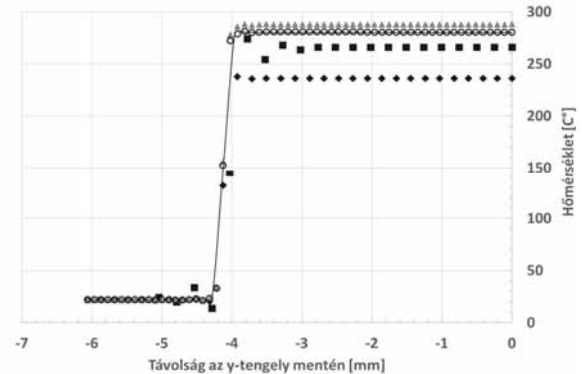
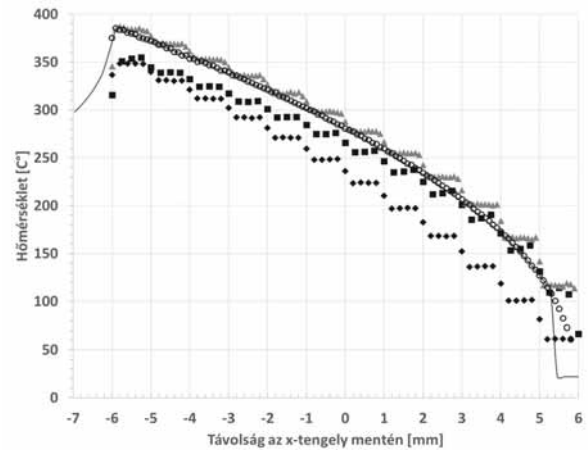


5. Ábra. A hőfluxus aktiválása ugrásfüggvény segítségével.

4. AZ EREDMÉNYEK ÉRTÉKELÉSE

Ebben a fejezetben az analitikus eljárással és a szimulációval kapott eredmények kerülnek összehasonlításra. A kapott hőmérséklet eloszlásokat a

6. ábra szemlélteti. Az ábrán folytonos vonal szemlélteti az analitikus, a különböző jelölők pedig a szimulációs eredményeket. A vízszintes tengely origója mindhárom esetben a 3. ábrának megfelelő, annyi különbséggel, hogy itt már a hőforrás középpontja az origóban helyezkedik el. Amennyiben a szimuláció előtt rendelkezésre állnak az analitikus eredmények, úgy előzetesen képet kapunk az alkalmazandó elemméretről. A görbéket megvizsgálva megállapítható, hogy az x-tengely mentén a hőforrás hátsó részén számíthatunk nagy hőmérséklet gradiensre, ami jelen esetben egy közel $100 \text{ }^\circ\text{C}$ -os hőmérsékletesés 1 mm-en belül. Ugyanez a helyzet az



- Analitikus
- Durva CHEXA20 háló
- ◆ Finom CHEXA8 háló
- ▲ Finom CHEXA20 háló
- Finom CHEXA20 háló és finomított mozgás

6. Ábra. Analitikus és szimulációs eredmények.

y-tengely mentén, ahol szintén az érintkezési felület szélén jelentkezik jelentős hőmérséklet gradiens, számszerűsítve 260°C-os csökkenés figyelhető meg egy szűk 0,4 mm-es szakaszon. A futófelülettől befelé haladva ugyanakkora hőmérsékletcsökkenés tapasztalható, megközelítőleg 0,2 mm-es tartományban. Ez indokolta az elemméret drasztikus csökkentését vastagság irányban, a futófelülettől távolodva. A finom elemméret mellett az első futtatásnál már magasabb fokszámú elemek kerültek kiválasztásra a gradiensek pontosabb reprodukálhatósága érdekében. Az analitikus eredmények alapján a vizsgálandó tartomány is szűkíthető, mivel jelen esetben a vizsgálatok csak a termikus tranziensek lefutására és a modell validálására terjedtek ki. Ebből kifolyólag a 6. ábra alapján y-irányban egy 6 mm-es, míg z-irányban egy 1 mm-es tartomány lett modellezve. A 6. ábrán négyszöggel vannak jelölve az első futtatásnál kapott eredmények. Látható, hogy x-irányban a nagy hőmérsékletek tartományában a végelem módszerrel kapott eredmények jelentősen eltérnek az analitikus eredményektől, míg a kisebb hőmérsékletek felé haladva a hiba értéke csökken. Megfigyelhető továbbá az eredmények „lépcsőzetes” jellege, melyet a szakaszosan léptetett hőforrás eredményez. Az y-irányú eredményeket tanulmányozva hasonló tendencia figyelhető meg, itt is alsó becslést kapunk a hőmérséklet értékekre. Z-irányban vizsgálva a hőmérsékleteloszlást az eredmények jól közelítik az analitikus görbét.

Az eredmények nagy hibája az elemméret további csökkentését tette szükségessé, számszerűen x- és y-irányban 0,5 mm-ről 0,2 mm-re, z-irányban maradt az eredeti diszkrétizáció. Elemtípusnak első körben 8 csomópontos hexaéder elem került kiválasztásra. Ezzel a modellel kapott eredményeket szemlélteti a csúcsára állított négyzög a 6. ábrán. Látható, hogy az elsőrendű elemekkel kapott eredmények még nagyobb hibával adnak egy alsó becslést a hőmérséklet-eloszlásra mindhárom görbe esetében. Az x-irányú lépcsőzetesség továbbra is megfigyelhető. Ugyanezen a modellel másodrendű elemeket alkalmazva az eredmények pontossága növelhető, ebben az esetben már egy felső becslést fogunk kapni a hőmérsékletmezőre mindhárom esetben. Az így kapott eredményeket szürke háromszög jelöli a 6. ábrán.

Ahhoz, hogy a hőmérsékleteloszlásban jelentkező lépcsőzetességet ki tudjuk küszöbölni, a hőforrást finomabban kell léptetni. Mivel az utóbbi két esetben alkalmazott modellel az elemméret x-irányban 0,2 mm volt, így lehetőség nyílik arra, hogy a hőforrást is 0,2 mm-es lépésekben léptessük. Ennek megfelelően x-irányban ugyanakkora tartomány vizsgálatára 60 lépés helyett 300-at kell definiálni, továbbá az időlépést is aktualizálni kell. 23,6 m/s kerületi sebesség esetén a 0,2 mm-es távolság megtételére $8,4746 \cdot 10^{-6}$ s-nyi időre van szükség, tehát ennyit tartózkodik a hőforrás egy lépésben. Ennél a számításnál a hőforrás minden egyes lépése csak négy időlépésre lett felosztva. Ezzel a teljes számítás 1200 darab $\Delta t = 2,1186 \cdot 10^{-6}$ s nagyságú időlépésből állt. Ezzel a modellel kapott eredményeket a 6. ábrán üres körök jelzik. Látható, hogy az eredmények tökéletesen

fedik az analitikus eredményeket, és a korábbi modelleknél megfigyelhető lépcsőzetesség is megszűnt. Az is észrevehető továbbá, hogy x-irányban az 5-6 mm közötti tartományban az analitikus eljárás egy hirtelen csökkenő hőmérsékletmezőt ad, míg végelem környezetben ez a hirtelen ugrás nem figyelhető meg, itt gyakorlatilag a görbe meghosszabbításaként egy folyamatos csökkenés tapasztalható. A különböző modellekre vonatkozó hiba értékét foglalja össze az 1. táblázat. A hiba az egyes modellekkel kapott maximális hőmérséklet értékére vonatkozik. A sorszámok a 6. ábrán alkalmazott jelmagyarázat alapján jelölik rendre a szimulációs modelleket (1 – Durva CHEX20 háló és így tovább). Látható, hogy a finomított, magasabb rendű elemekkel készített háló pontossága is már elfogadható hibahatáron belül van, de a hőforrás léptetésének finomítása tovább növeli az eredmények pontosságát és megszünteti a nagy lépésköz okozta „lépcsőzetes” jellegét.

1. Táblázat. Hiba értéke az egyes modellek esetében, a maximális hőmérsékletre vonatkozóan.

Modell #	Hiba [%]		
	x	y	z
1	-7,8	-2,1	-5,4
2	-9,4	-14,7	-15,7
3	0,5	2,8	2,9
4	0,2	0,5	0,3

Az eredmények ismeretében megállapítható, hogy mozgó hőforrás modellezése esetén az elemméret csökkentése és a fokszám növelése mellett a hőforrás mozgásának diszkrétizációja is jelentősen befolyásolja a kapott hőmérsékleteloszlás pontosságát. További vizsgálat tárgyát képezi, hogy mennyiben térünk el négyzög alakú, egyenletes eloszlású hőforrást feltételezve a valóságot jobban közelítő, elliptikus érintkezési felületen fellépő, parabolikus eloszlású hőforrás okozta hőmérséklet-eloszlástól.

5. IRODALOM

- [1] P. T. Zwierczyk and K. Váradi, "Thermal stress analysis of a railway wheel in sliding-rolling motion," *J Tribol*, vol. 136, no. 3, 2014, doi: 10.1115/1.4027544.
- [2] J. C. Jaeger, "Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts," *Journal and proceedings of the Royal Society of New South Wales*, vol. 76, no. 3, pp. 203–224, May 1943, doi: 10.5962/p.360338.
- [3] X. Tian and F. E. Kennedy, "Maximum and Average Flash Temperatures in Sliding Contacts," 1994.
- [4] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, "Conduction of Heat in Solids," Oxford University Press, 1959.
- [5] Zwierczyk Péter Tamás, "Thermal and stress analysis of a railway wheel-rail rolling-sliding contact, PhD Thesis," 2015.
- [6] "Viaggio Classic-emotion@rail," 2013.