

# PÁRHUZAMOS OLDALÚ BORDÁSKÖTÉS GRAFO-ANALITIKUS OPTIMÁLÁSA

## GRAPHO-ANALYTIC OPTIMIZATION OF PARALLEL KEY SPLINED SHAFT

*Szabó Ferenc János, PhD, Associate Professor, University of Miskolc,  
Institute of Machine- and Product Design, Miskolc-Egyetemváros, Hungary, H3515*

**ABSTRACT** Splined shafts are used in many drives and rotating elements in engineering practice. Nowadays decreasing the dead-weight of the structures is more and more important (in vehicle industry, aircrafts, etc). This paper shows an optimization process for minimum weight design of parallel key splined shafts. For the solution of the optimization problem a 3D grapho-analytical optimization process is used, based on the Kuhn-Tucker optimality criterium. During the graphic part of the process, three dimensional diagrams show the behaviour of the objective function and of the design constraints, which makes easy to read the optimum solution from the diagram. The final optimum solution is given in a table numerically too.

### 1. BEVEZETÉS

A retesz- és bordáskötések a hajtástechnikában, autógyártásban, forgó elemek gyártásában jelentős helyet foglalnak el, fontos gépelemeknek számítanak és nagyon sok helyen alkalmazzák ezeket. Napjainkban igen fontos tendencia a különféle elemek, szerkezetek saját tömegének csökkentése, mely az autógyártásban, repülőgépgyártásban nagyon fontos cél. Gyakran a tömegcsökkentés többváltozós optimumszámítást igényel, ami sokszor idő- és számítás-igényes eljárás. Ebben a cikkben egy nagyon egyszerű, de mégis nagyon hasznosnak bizonyuló optimumkereső eljárást mutatunk be, a grafo-analitikus optimálás, mely a Kuhn-Tucker optimalitási kritériumra épül. A rajzos (grapho) és az egyenletrendezéssel történő (analitikus) megoldási mód mindig segíti egymást, ami könnyebbé, gyorsabbá, jobban áttekinthetővé teszi az optimumkeresési probléma szerkezetét. A kétváltozós eseteket (2D optimum) nagyon könnyű ábrázolni és az ábrázolt diagramokon nagyon könnyen leolvasható az optimális megoldás is. Ezek az esetek azonban a kis változószám miatt viszonylag egyszerűek, előbbutóbb felmerül az igény a bonyolultabb esetek kezelésére is. Így alakul ki a háromváltozós (3D optimum) eset, melynek ábrázolása már kissé

bonyolultabb, térbeli diagramok létrehozását igényli. Ha tovább akarjuk a változók számát növelni (pl. 4 vagy több változós optimum), akkor már nem lesz lehetőség az ábrázolásra, vagy nagyon nehézkesé válik, és az analitikus út felértékelődik. Az így definiált optimumkeresési feladatokat külön erre a célra kifejlesztett, többváltozós optimumkereső algoritmusokkal célszerű megoldani, mint pl. az e cikk szerzője által kifejlesztett RVA (Random Virus Algorithm), mely alkalmas nagyobb feladatok, sok változós esetek, multidiszciplináris optimálási feladatok kezelésére is.

A párhuzamos oldalú bordás kötések vizsgálata és optimálása nagyon hasonló a reteszkötés vizsgálatához és optimálásához [1], az eltérést a több, egyszerre működő borda jelenti, mivel figyelembe kell venni az esetleges nem egyenletes terhelés-eloszlást is. A végeeselemes vizsgálatok során ugyanolyan kontakt-törvényeket kell figyelni és betartani, mint a reteszkötések vizsgálata esetén [2]. A kontakt állapot figyelembe vétele a géptervezés több más területén is fontos [3]. A bordás kötések vizsgálatáról kiterjedt irodalom található. Barsoum és Kahn [4] a statikus csavarási szilárdságra végzett optimálást indukciós edzésű bordás tengelyre, geometria és anyag szempontjából. Pedersen [5] kimutatta, milyen nagy mértékben javítható a bordástengely kialakítása a benne fellépő maximális feszültség minimalizálása útján. A tengely fáradási élettartamát 25%-kal javította a maximális feszültségcsökkentésének eredményeként. Tanaka, Fujimoto és Yano [6] a Taguchi módszer alkalmazásával vizsgálta a bordástengely kialakítás optimálásának lehetőségét.

Az optimumkeresés grafo-analitikus módszere a mérnöki gyakorlat számos területén lehet hasznos. Sedulchenko, Saruskis, Kukharets and Zabrodskiy [7] agráripári gépek hajtó kerekeit optimalta grafikus-analitikus optimalással. Hedengren [8] a Karusch-Kuhn-Tucker optimalitási feltételre épülő optimálási tutorialt készített. Postek, Zocca, Gromiko és

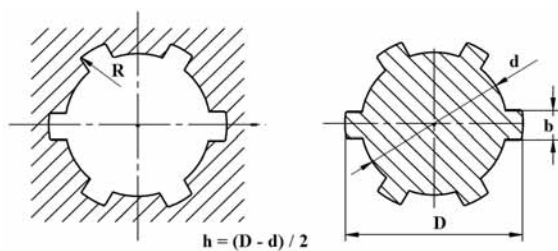
Kantor [9] optimalizációs példákat mutat be Python program-nyelvben. A Kuhn-Tucker optimalitási kritériumok részletesebb leírása Kuhn és Tucker [10], valamint Sundaram Rangarayan [11] cikkében található. A grafoanalitikus optimalizálás előnyeire, hasznára, egyszerűségére és hatékonyságára 2 dimenziós példákat mutat Szabó [12], [13], [14], [15].

Az optimális tervezés napjainkban egyre népszerűbb, hasznosabb és jelentősebb tudományá vált, Vajna [16] munkássága alapján elmondható, hogy ez a holisztikus termékfejlesztési folyamat fontos része.

Jelen cikk két-dimenziós ( $x_1$  és  $x_2$  tervezési változók) és három-dimenziós ( $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  változók) optimalizációs példát mutat be bordáskötés két-dimenziós és három-dimenziós grafo-analitikus optimalizálására. Többváltozós, bonyolultabb optimalizálásokhoz optimáló algoritmus szükséges, példaként a jelenmunka szerzője által kifejlesztett RVA (Random Virus Algoritmus) is említhető [17].

## 2. A VIZSGÁLANDÓ SZERKEZET

Bordáskötés optimalizálásához az optimalizáló szerkezet kialakítását az 1. ábra mutatja. A tervezési változók : két változós esetben  $h$  és  $b$ , azaz a borda keresztmetszetének méretei, három dimenziós esetben pedig a hossz ( $L$ ) lesz a harmadik változó. A célfüggvény a borda tömege, ennek minimumát keressük. A bordák számát konstansnak tekintjük, ám részletesebb vizsgálatokhoz célszerű lehet az optimalizált többféle bordaszám esetére is elvégezni, és az így adódó eredmények közül a legjobbat kiválasztani. A vizsgálatok során a tengelyátmérőt ( $d$ ) és a persely átmérőjét ( $D$ ) konstansnak tekintjük. Az átvindó terhelés a hajtónyomaték,  $T = 500$  Nm.



1. ábra. Bordáskötés alkatrészeinek sematikus képe

A jellemző méretek ezekkel az adatokkal már számolhatók:

$$D = d + 2h \quad , \quad r_m = \frac{d_m}{2} \quad , \quad d_m = \frac{D+d}{2} \quad ,(1)$$

A vizsgálathoz alkalmazott bordaszám számítása:

$$z = r_m \pi / b \quad (2)$$

A célfüggvény egy borda tömege, ami a következőképpen számolható:

$$M = hbL\rho \quad [\text{kg}] \quad (3)$$

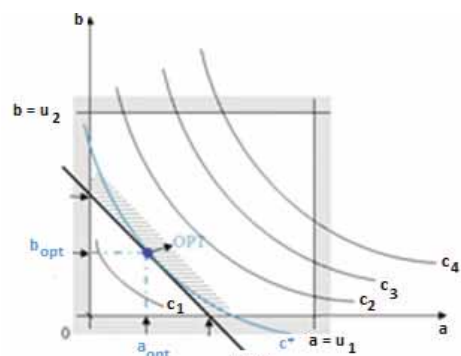
A borda anyagának sűrűségét  $\rho$  jelöli. A (3) egyenletben a háromdimenziós esetet láthatjuk, kétdimenziós esetben  $m = hb$  [kg/m], azaz a folyóméter-tömeg lesz az optimalizálás célfüggvénye.

A tengely és a bordák anyaga szerkezeti acél, melynek sűrűsége  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, folyáshatára:  $R_{eH} = 800$  MPa.

## 3. A GRAFO-ANALITIKUS OPTIMALIZÁLÁS BEMUTATÁSA

Jelen cikkben bordáskötés grafo-analitikus optimalizálását mutatja be, kétváltozós és háromváltozós esetben a grafo-analitikus optimalizálás a Kuhn-Tucker-féle optimalitási kritériumra épül, ami azt mondja ki, hogy az optimális megoldás helyén a célfüggvény szintvonala „érinti” a megfelelőségi tartományt.

A célfüggvény szintvonalait úgy lehet ábrázolni, hogy konstanssal tesszük egyenlővé a célfüggvény egyenletét:  $f(x_1, x_2) = c$ , így a térképészetben alkalmazott szintvonalakhoz hasonlóan, előállnak a célfüggvény szintvonalai, melyeket a változók alkotta koordináta rendszerben ábrázolhatunk. Ha ábrázoljuk a feltételek egyenleteit is, akkor a feltételekben az egyenlőség a határvonal egyenletét adja, és ehhez képest a feltételnek megfelelően a nagyobb, vagy kisebb értékek a megfelelőek. Azon pontok mértani helye, amelyek az összes (explicit és implicit) optimalizációs feltételt kielégítik, a megfelelőségi tartomány (2. ábra).



2. ábra. A megfelelőségi tartomány és a célfüggvény szintvonalai

A 2. ábrán a célfüggvény maximumát keressük, szintvonalait  $c$ -vel jelöljük, többféle konstans esetére látható, hogy mikor adódik az érintés a megfelelőségi tartománnyal ( $c^*$ ). Az ábrán láthatóak az  $a$  és  $b$  változókra vonatkozó explicit és implicit feltételek határvonalai:

$[u_1, u_2, g(a,b)]$  is, melyek a megfelelőségi tartomány határvonalai. Az érintés szót idézőjelbe tettük, jelezve, hogy a tartomány és a célfüggvény szintvonala közötti érintés többféleképpen is megvalósulhat: lehetséges, hogy a célfüggvény szintvonala a tartomány egyik határvonalát érinti, de lehetséges az is, hogy az érintési pont a tartománynak egyik sarokpontja.

Ha az egyes optimalizációs változókra külön-külön alsó és felső határt írunk elő, akkor ezek lesznek az explicit feltételek:  $l_i \leq x_i \leq u_i$ , ahol  $l_i$  és  $u_i$  az alsó és felső határ,  $i = 1, 2, \dots, n$  és  $n$  az optimalizációs változók száma.

Ha az optimalizációs változókra értelmezett függvényre  $g(x_1, x_2)$  írunk elő alsó és felső határokat, amelyből nem lehet kifejezni az egyes változókat, akkor ez implicit feltétel lesz:

$$l_{gj} \leq g(x_1, x_2) \leq u_{gj}, \quad (4)$$

ahol  $l_g$  és  $u_g$  lesznek a  $g$  függvény alsó és felső megengedhető határai,  $j = 1, 2, \dots, m$ , ahol  $m$  az implicit feltételek száma. Az  $f$  és a  $g$  függvény tetszőleges, nemlineáris függvénye lehet a tervezési változóknak.

### 3.1. Kétváltozós grafoanalitikus optimalizálás

Kétváltozós esetben az optimumkeresés célfüggvénye a borda folyómétersúlya, azaz  $m = hb$  [kg/m], az explicit feltételek a  $h$  és  $b$  változókra 0 mm alsó határ és 60 mm felső határ, implicit feltételek pedig a megengedhető legnagyobb felületi nyomás (100 MPa) és a megengedhető maximális nyírófeszültség (75 MPa). A fellépő értékek ezeknél:

$$\text{Felületi feszültség: } p = \frac{F}{Lh/2} \quad [\text{MPa}] \quad (5)$$

$$\text{Nyírás: } \tau = \frac{F}{Lb} \quad [\text{MPa}] \quad (6)$$

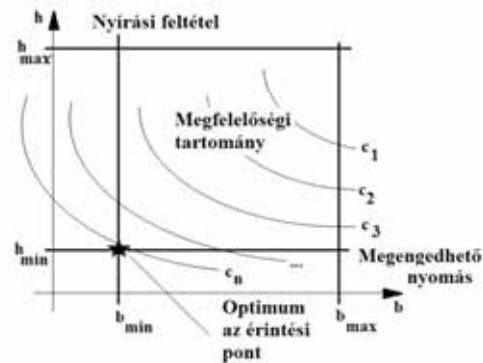
Az (5) és (6) képletekben az  $F$  az egy bordára jutó terhelő erőt jelenti, mely a következőképpen számolható:

$$F = \frac{T}{r_m z \theta}, \quad (7)$$

ahol  $\theta$  a dinamikus hatásokat és az egyenetlen tehereloszlást figyelembe vevő tényező. További implicit feltételt jelent, hogy a fellépő terhelés legyen kisebb, vagy egyenlő a megengedhető maximális terheléssel, ami a felületi nyomásra jelent majd feltételt:

$$T \leq T_{max}, \quad T_{max} = \theta b L r_m z p_{adm} \quad (8)$$

A feltételeket és a célfüggvény szintvonalait a 3. ábrán láthatjuk. A nyírási és a maximális terhelési feltétel a  $b$  változóra jelent alsó határt, ezért csak a szigorúbbik lesz aktív.

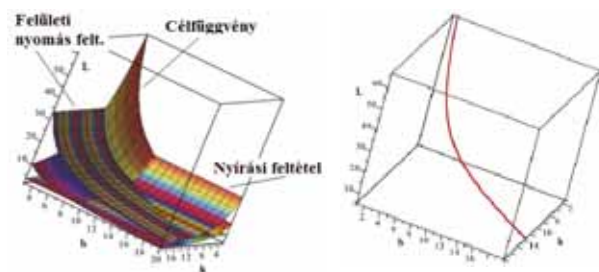


3. ábra. A megfelelőségi tartomány és a célfüggvény szintvonalai (kétdimenziós eset)

### 3.2. Háromváltozós grafoanalitikus optimalizálás

A háromváltozós esetben a borda méretei mellett a hossz lesz a harmadik változó. Ekkor már nem elegendő két dimenziós ábrázolással bemutatni a feltételeket és a célfüggvény szintvonalait, hanem ezek háromdimenziós felületek lesznek.

A 3. ábrán \*-gal jelölt optimális pont helyett egy térgörbe fogja mutatni az optimális megoldást, a különböző hossz értékekre. A 4. ábra mutatja a felületek és a megoldás térgörbéjének három dimenziós ábrázolását. Az optimalizálás numerikus eredményei az 1. táblázatban találhatóak.



4. ábra. A felületek és a megoldás térgörbéjének 3D képe

1. táblázat. Az optimumkeresés számszerű eredményei

h [mm]	b [mm]	L [mm]	M [g]
4	2.667	50	4.19
6.667	4.445	30	6.97
10	6.667	20	10.47

Habár a megtakarítható anyagmennyiség jelentéktelennek látszik, az optimumszámítás eredményeinek alkalmazása a reteszkötés kialakításának megtervezésében akár oda is vezethet, hogy a vonatkozó szabványok, tervezési ajánlások újragondolása, „finomhangolása” is lehetségessé válhat.

#### 4. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen cikk kétváltozós és három változós grafo-analitikus optimalizálást mutat be, bordáskötések optimalizálásához.

Kétváltozós esetben az optimalizálás célfüggvénye és a feltételek (implicit és explicit feltételek) könnyen ábrázolhatók kétdimenziós ábrákra és az optimális megoldás egyértelműen leolvasható az érintési pont koordinátái alapján.

Háromváltozós esetben azonban a feltételek és a célfüggvény háromdimenziós felületek, melyeket háromdimenziós koordináta-rendszerben kell ábrázolni. A kétdimenziós eset könnyen leolvasható optimális megoldási pontja helyett a háromdimenziós esetben az optimális megoldás egy térgörbéként adódik, melynek minden egyes pontja egy kétváltozós optimum, a harmadik változó különböző értékeihez tartozóan.

Ez a tény nagyon izgalmassá teszi a további, jövőbeli vizsgálatok eredményeinek becslhetőségét, hiszen a négyváltozós eset megoldása egy felület lehet. Az eredményeket ábrákra és egy táblázatban mutatjuk be.

#### 5 IRODALOM

- [1] M. K. Sahu, Pardeep, Optimization of the Keyway Design with Consideration of Effect of Stress Concentration on Different Materials, *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, Vol. 3, n. 5, ISSN 2278-0181, May 2014.
- [2] K. Váradi, D. M. Verghese, Contact State and Stress Analysis in a Key Joint by FEM, *Periodica Polytechnica Ser. Mech. Eng.*, Vol. 36, n. 1, pp. 45-60, 1992.
- [3] F. Sarka, Examination of Bolt Connection with Finite Elements. *Lecture Notes in Mechanical Engineering, Vehicle and Automotive Engineering*, 4 pp. 212-222. , 11 p. 2022
- [4] I. Barsoum, F. Khan, Strength Optimization of Induction Hardened Splined Shaft – Material and Geometric Aspects, *International Journal of Mechanical and Aerospace Engineering*, 6, 2012 January, 4 p.
- [5] L. N. Pedersen, Optimization of Straight-Sided Spline Design, *Archives of Applied Mechanics*, 81 (10) pp 1393 – 1407, DOI : 10.1007/s00419-010-0493-9
- [6] T. Tanaka, R. Fujimoto, H. Yano, Optimization of Shaft Spline Projection Design, *Journal of Engineering Society*, 2002, Vol 10, issue 3, pp 80-84. [https://doi.org/10.18890/qes.10.3\\_80](https://doi.org/10.18890/qes.10.3_80)
- [7] B. Seludchenko, E. Saruskis, S. Kukharets, A. Zabrodskyi, Graphic Analytical Optimization of Design and Operating Parameters of Tires for Drive Wheels of Agricultural Machinery, *Soil and Tillage Research*, Vol 215, January 2022, 105227 <https://doi.org/10.1016/j.still.2021.105227>
- [8] J. Hedengren, Design-Optimization using Karush-Kuhn-Tucker Conditions, <https://apmonitor.com/me575/index.php/Main/KuhnTucker>
- [9] K. Postek, A. Zocca, J. Gromiko, J. Kantor, *Data- Driven Mathematical Optimization in Python*, 2023. <https://mobook.github.io/MObook/intro.html>
- [10] H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Nonlinear Programming, in: *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Berkeley Symposium, Berkeley*, University of California Press, pp. 481-492. MR 0047303.
- [11] Sundaram, K. Rangarajan, Inequality Constraints and the Theorem of Kuhn and Tucker, *A First Course in Optimization Theory*. New York, Cambridge University Press, pp. 145- 171. ISBN 0-521-49770-1
- [12] J. F. Szabó, Multidisciplinary Optimization During Gear Design, In J. Herskovits, S. Matorche, A. Canlas (Ed.), *6<sup>th</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, (WCSMO-6)*, 4 Reston VA, USA, International Society of Structural and Multidisciplinary Optimization (ISSMO), pp 74-85, 2005.
- [13] J. F. Szabó, Grapho-analytical Optimization of Cylindrical Spring (in Hungarian), *GÉP*, Vol. 68, n. 4, pp 69-72, 2017.
- [14] J. F. Szabó, Optimization of Springs Applied in Vehicle Suspension Structure, *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2018, pp. 85-596., 12 p.
- [15] J. F. Szabó, Optimization Possibilities of Shaft-Bearing Systems, Part II: Optimization for Minimum Mass, (in Hungarian), *GÉP*, Vol. 70, n. 3, pp. 66-79, 2019.
- [16] S. Vajna, (editor): *Integrated Design Engineering. Interdisciplinary and holistic product development*. Ist edition, Springer Nature, Switzerland. 2020.
- [17] J. F. Szabó, Multidisciplinary Optimization of Journal Bearings, using an RVA Evolutionary Type Optimization Algorithm. *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 13, No 7., pp 181-195, 15 p. 2016, ISSN 17858860. [http://acta.uni-obuda.hu/Szabo\\_71.pdf](http://acta.uni-obuda.hu/Szabo_71.pdf)