

## Rácsok és csoportok 2.

Egy olimpiai versenyfeladat ürügyén

### 4. Vandermonde-mátrixok

Most rátérünk az olimpiai feladatban szereplő rács vizsgálatára. Rögzítsünk  $(a_i, b_i)$  egész számpárokat  $(1 \leq i \leq k)$ , ahol  $a_i$  és  $b_i$  relatív prímek. Adott  $n > 0$  esetén legyen  $M_n$  az az egész elemű,  $k$  sorból és  $n + 1$  oszlopból álló mátrix, amelyben az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme  $a_i^{n-j+1}b_i^{j-1}$  és  $A_n$  az  $M_n$  oszlopai által generált csoport.

**4.1. Az  $M_n$  determinánsosztóinak meghatározása.** Fölhasználjuk az egész együtthatós többváltozós polinomok számelméletét. Az alábbiak a [3] könyv második és harmadik fejezetéből megérthetők, különös tekintettel a 3.4. szakaszra.

**4.1. tétel.** *A  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  polinomjai között igaz a számelmélet alaptétele, azaz minden nullától és egységtől különböző polinom sorrendtől és egységszerestől eltekintve egyértelműen bontható irreducibilisek szorzatára. A prím és irreducibilis polinomok ugyanazok, és csak  $\pm 1$  egység. A  $\mathbb{Z}$ -beli prímszámok prímek  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ -ben is.*

Egy polinom akkor *primitív*, ha együtthatóinak közös osztója csak egység lehet. Egy elsőfokú polinom nem feltétlenül irreducibilis, például  $\mathbb{Z}[x]$ -ben  $2x$  nem az, hiszen a  $2 \cdot x$  fölbontásban egyik tényező sem egység. Ha azonban primitív is, akkor már irreducibilis lesz, és egyben prímtulajdonságú. Ez akkor is igaz, ha az együtthatói nem egész számok, hanem egész együtthatós, akár többváltozós polinomok.

**4.2. következmény.** *A  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ -beli  $x_i x_j - x_k x_\ell$  polinom irreducibilis abban az esetben, ha  $i, j, k, \ell$  páronként különböző. Két ilyen polinom különböző négyelemű indexhalmazok esetében biztosan nem egymás egységszerese.*

**4.3. lemma.** *Legyen a  $k \times k$ -as  $K$  mátrixban az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme  $x_i^{k-j} y_i^{j-1}$ . Ekkor  $\det(K) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_i y_j - y_i x_j)$ .*

**Bizonyítás.** Képzeljük először azt, hogy  $x_i$  és  $y_i$  változók, így a determináns elemei  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k]$ -beli polinomok. Emeljük ki a determináns  $i$ -edik sorából  $x_i^{k-1}$ -et mindegyik  $i$ -re (ez megtehető, mert  $x_i \neq 0$ ). Az eredmény egy Vandermonde-determináns lesz az  $y_i/x_i$  generátorokkal, melynek értéke  $\prod_{1 \leq i < j \leq k} ((y_j/x_j) - (y_i/x_i))$ . A nevezőkkel szorozva az állítást kapjuk.

Így azonosságot kaptunk. Ha az  $x_i$  és  $y_i$  helyébe bármilyen számokat (sőt polinomokat, akár mod  $p$  maradékosztályokat) helyettesítünk, az egyenlőség e helyettesítés után is érvényben fog maradni. (Még akkor is, ha valamelyik  $x_i$  helyébe nullát írunk.)  $\square$

**4.4. állítás.** Ha  $n + 1 \geq k$ , akkor az  $M_n$  mátrix  $k$ -adik determinánsosztója

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (a_i b_j - b_i a_j) = \det(M_{k-1}),$$

az  $n$  értékétől függetlenül. (Ha  $k = 1$ , akkor  $\Delta = 1$ , mint üres szorzat).

**Bizonyítás.** Legyen  $\Delta_k$  az  $M_n$  mátrix  $k$ -adik determinánsosztója. Azt fogjuk megmutatni, hogy a  $\Delta$  és  $\Delta_k$  számok egymás osztói.

A  $\Delta_k \mid \Delta$  bizonyításához legyenek  $x_i$  és  $y_i$  változók ( $1 \leq i \leq n - k + 1$ ). Egészítjük ki az  $M_n$  mátrixot úgy, hogy az utolsó  $k$  sora maradjon az, ami eredetileg volt, az első  $n - k + 1$  sorában pedig az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme legyen  $x_i^{n-j+1} y_j^{j-1}$ . A kapott négyzetes mátrix determinánsát a 4.3. lemma segítségével számíthatjuk ki. Az így adódó szorzatot bontsuk három részre:  $P_1 P_2 P_3$ , ahol

$$(1) \quad P_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq n-k+1} (x_i y_j - y_i x_j).$$

$$(2) \quad P_2 = \prod (x_i b_j - y_i a_j), \quad \text{ahol } 1 \leq i \leq n - k + 1 \text{ és } 1 \leq j \leq k.$$

$$(3) \quad P_3 = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (a_i b_j - b_i a_j) = \Delta.$$

A Laplace-kifejtés (2.1. tétel) miatt a determináns  $P_1 P_2 P_3$  értéke fölírható az  $M_n$  mátrix  $k \times k$ -as aldeterminánsainak olyan lineáris kombinációjaként, amelyek együtthatói  $R = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{n-k+1}, y_1, \dots, y_{n-k+1}]$ -ből valók. Ezért  $R$ -ben a  $\Delta_k$  szám osztója a  $P_1 P_2 P_3 = P_1 P_2 \Delta$  szorzatnak.

Tegyük föl indirekt, hogy van olyan  $p$  prímszám, melynek  $\Delta_k$ -beli kitevője nagyobb, mint a  $\Delta$ -beli kitevője. Mivel  $R$ -ben igaz a számelmélet alaptétele, és  $p$  ebben is prímszám (4.1. tétel), ezért  $p \mid P_1 P_2$ . Tehát vagy  $p \mid x_i y_j - y_i x_j$ , vagy  $p \mid x_i b_j - y_i a_j$  alkalmas  $i, j$ -re. Ez azonban lehetetlen, mert  $a_j$  és  $b_j$  relatív prímek, és így mindkét polinom primitív. Tehát tényleg  $\Delta_k \mid \Delta$ .

A fordított oszthatósághoz azt kell igazolnunk, hogy  $\Delta$  osztója  $\det(K)$ -nak, ha  $K$  az  $M_n$  egy tetszőleges  $k \times k$ -as részmatrice. Vegyünk föl  $u_i, v_i$  változókat ( $1 \leq i \leq k$ ), és írjuk föl az  $M_n$  mátrixot, valamint a  $\Delta$  és  $\det(K)$  számokat is  $a_i$  helyett  $u_i$ -vel és  $b_i$  helyett  $v_i$ -vel (azaz képzeljünk az  $a_i$  és  $b_i$  számok helyébe változókat). Nyilván elegendő az oszthatóságot ebben az esetben igazolni.

Rögzített  $i < j$  mellett legyen  $d = u_i v_j - v_i u_j$ , és írjuk föl  $\det(K)$  Laplace-kifejtését (2.1. tétel) arra az esetre, amikor a soroknak a kételemű  $\{i, j\}$  indexhalmozását vesszük. Azt kapjuk, hogy  $\det(K)$  előáll az  $i$ -edik és  $j$ -edik sorból képzett kétszer kettes aldeterminánsok lineáris kombinációjaként. Ezek a kétszer kettes aldeterminánsok mind oszthatók  $d$ -vel: ha a két oszlopindex  $s < t$ , akkor

$$\begin{vmatrix} u_i^{n-s+1} v_i^{s-1} & u_i^{n-t+1} v_i^{t-1} \\ u_j^{n-s+1} v_j^{s-1} & u_j^{n-t+1} v_j^{t-1} \end{vmatrix} = v_i^{s-1} u_i^{n-t+1} v_j^{s-1} u_j^{n-t+1} \begin{vmatrix} u_i^{t-s} & v_i^{t-s} \\ u_j^{t-s} & v_j^{t-s} \end{vmatrix},$$

és az  $a - b \mid a^{t-s} - b^{t-s}$  szabály miatt  $u_i v_j - v_i u_j \mid (u_i v_j)^{t-s} - (v_i u_j)^{t-s}$ . Így  $d \mid \det(K)$ .

Beláttuk tehát, hogy  $\det(K)$  osztható az  $u_i v_j - v_i u_j$  mindegyikével. Ezek a polinomok azonban páronként relatív prímek a 4.2. következmény miatt. A számelmélet alaptétele miatt e polinomok szorzata, ami  $\Delta$ , szintén osztoja  $\det(K)$ -nak.  $\square$

#### 4.5. feladat. Számítsuk ki $M_n$ összes determinánsosztóját.

**Útmutatás.** Az  $a_i$  és a  $b_i$  relatív prímek, ezért  $\Delta_1 = 1$ . Ha  $2 \leq r \leq \min(k, n + 1)$ , akkor vegyünk  $\{1, \dots, k\}$  egy  $r$  elemű  $S$  részhalmazát, és álljon az  $M$  mátrix az  $M_n$  ennek megfelelő soraiból. A 4.4. lemma miatt az  $M$  mátrix  $r \times r$ -es aldeterminánsainak legnagyobb közös osztója azon  $a_i b_j - b_i a_j$  számok  $\Delta_S$  szorzata, amelyekre  $i, j \in S$  és  $i < j$ . Az összes  $r \times r$ -es aldetermináns legnagyobb közös osztója tehát ezeknek a  $\Delta_S$  számoknak a legnagyobb közös osztója. Így  $\Delta_r$  sem függ az  $n$  választásától.  $\square$

**4.2. Redukció prímmhatvány modulusra.** Egy vektort hívjunk  $s$ -sel oszthatónak, ha mindegyik komponense osztható  $s$ -sel. Az  $s$ -sel osztható vektorok halmazát jelölje  $s\mathbb{Z}^k$ . Azt mondjuk, hogy egy  $A$  csoport tartalmazza a  $\mathbf{v}$  vektort mod  $s$ , ha  $\mathbf{v}$  fölríható egy  $s$ -sel osztható és egy  $A$ -beli vektor összegeként, azaz  $\mathbf{v} \in s\mathbb{Z}^k + A$ .

**4.6. lemma.** Legyen  $A \subseteq \mathbb{Z}^k$  egy csoport,  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$  és  $s, t$  relatív prím egészek. Ha  $A$  tartalmazza  $\mathbf{v}$ -t mod  $s$  és mod  $t$ , akkor tartalmazza mod  $st$  is.

**Bizonyítás.** Legyen  $v = su + g = tw + h$ , ahol  $g, h \in A$  és  $u, w \in \mathbb{Z}^k$ . Mivel  $(s, t) = 1$ , van olyan  $e, f \in \mathbb{Z}$ , hogy  $se + tf = 1$ . Ekkor  $v = sev + tfv = se(tw + h) + tf(su + g) = st(ew + fu) + (seh + tfg) \in st\mathbb{Z}^k + A$ .  $\square$

Ha  $A$  indexe  $\mathbb{Z}^k$ -ban  $\Delta$ , akkor a 3.5. feladat szerint minden  $\Delta$ -val osztható vektor eleme  $A$ -nak. Ha tehát be akarjuk látni, hogy  $\mathbf{v} \in A$ , akkor elegendő megmutatni, hogy a  $\Delta$  index minden  $q$  prímmhatvány-osztója esetén  $\mathbf{v}$  benne van  $A$ -ban mod  $q$ .

**4.3. Az olimpiai feladat megoldása.** Ha  $d_{ij} = a_i b_j - b_i a_j = 0$  valamilyen  $i \neq j$  esetén, akkor, mivel  $a_i$  és  $b_i$ , valamint  $a_j$  és  $b_j$  relatív prímek, csak az lehetséges, hogy  $(a_i, b_i)$  és  $(a_j, b_j)$  egyenlők vagy ellentettek. Az első esetben  $(a_j, b_j)$  elhagyható. A második esetben szintén, ha az  $n$  kitevőt párosnak választjuk (erre majd ügyelünk). Ezért a továbbiakban föltesszük, hogy  $d_{ij}$  soha nem nulla, és azt is, hogy  $n \geq k - 1$ . Az  $M_n$  által generált  $A_n$  ekkor rács, hiszen a  $k$ -edik determinánsosztó a 4.4. állításban definiált  $\Delta$  szám, ami nem nulla. Az  $A_n$  indexe tehát  $\Delta$ , az  $n$ -től függetlenül.

**4.7. lemma.** Legyen  $q = p^m$ , ahol  $p$  prím és  $m \geq 1$ . Tegyük föl, hogy az  $n$  szám osztható  $2\varphi(q)$ -val, és nagyobb vagy egyenlő, mint  $2m$  és  $k - 1$ . Ekkor  $A_n$  tartalmazza a konstans 1 vektort mod  $q$ .

**Bizonyítás.** Ha  $p \nmid a_i$ , akkor az Euler–Fermat-tétel és  $\varphi(q) \mid (n/2)$  miatt  $a_i^{n/2} \equiv 1 \pmod{q}$ . Ha  $p \mid a_i$ , akkor  $n/2 \geq m$  miatt  $a_i^{n/2} \equiv 0 \pmod{q}$ . Ugyanez igaz a  $b_i$  szá-

mokra is. Vegyük  $M_n$  első, középső és utolsó oszlopát (van középső, mert  $n$  páros). Mindegyikben csak 1 és 0 szerepelhet mod  $q$ , és a középső oszlop a két szélső szorzata mod  $q$ . Egy sor két szélső eleme nem lehet egyszerre nulla, mert  $a_i$  és  $b_i$  relatív prímekek. Ezért a két szélső oszlop összegéből a középsőt kivonva konstans 1-et kapunk mod  $q$ .  $\square$

Az előző szakasz eredményeivel kombinálva, ha  $n$  elég nagy, és  $2\varphi(q) \mid n$  teljesül  $\Delta$  minden  $q$  prímhatalvány-osztójára, akkor a konstans 1 vektor  $A_n$ -ben van.

**4.8. feladat.** *Igazoljuk, hogy  $A_n$  és  $A_m$  vektorait komponensenként összeszorozva  $A_{n+m}$ -beli vektorokat kapunk, így az  $A_n$  rácsok periodikusan ismétlődnek ( $n \geq k - 1$ ).*

**Útmutatás.** Ha a konstans 1 vektor  $A_m$ -ben van, akkor  $A_n \subseteq A_{n+m}$ . Mivel az indexük ugyanaz a  $\Delta$  szám, meg is egyeznek.  $\square$

**4.4. Az  $A_n$  rács vektorai.** Most is föltesszük, hogy  $d_{ij} = a_i b_j - b_i a_j \neq 0$  (amikor  $i \neq j$ ). Ha  $n \geq k - 1$ , akkor  $A_n$  indexe  $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq k} d_{ij}$ , így  $A_n$  a  $\mathbb{Z}^k$  vektorainak  $\Delta$ -ad részét tartalmazza (ez pontos értelmet kap, ha egy nagy gömb vektorait tekintjük).

**4.9. feladat.** *Mutassuk meg, hogy ha  $k \geq 4$ , akkor  $A_n \neq \mathbb{Z}^k$ , mert  $M_n$ -nek van két mod 2 egyenlő sora. Általánosítsuk ezt 2 helyett általános prím modulusra.*

**Útmutatás.** Ha  $p$  prím, akkor a  $t = a_i/b_i$  osztás  $p \nmid b_i$  esetén elvégezhető mod  $p$ , azaz van olyan  $t$  egész, hogy  $tb_i \equiv a_i \pmod{p}$ . Ha  $p \mid b_i$ , akkor  $p \nmid a_i$ , mert  $a_i$  és  $b_i$  relatív prímekek, ilyenkor legyen  $t = a_i/b_i$  a  $\infty$  szimbólum. Ez tehát  $t$ -re  $p + 1$  lehetőség mod  $p$ .

Ha  $a_j/b_j$  is  $t$  mod  $p$ , akkor  $p \mid a_i b_j - b_i a_j$ . Mivel  $p \mid a_i$  és  $p \mid b_i$  egyszerre nem lehetséges, az  $a_j/a_i$  és  $b_j/b_i$  törtek egyike biztosan értelmes mod  $p$ , és ha mindkettő az, akkor ugyanaz az  $s$  értékük mod  $p$ , ha pedig valamelyik nem értelmes, akkor a számlálóját és nevezőjét is nulla mod  $p$ . Így mindig  $sa_i \equiv a_j \pmod{p}$  és  $sb_i \equiv b_j \pmod{p}$ . Ezért az  $M_n$  mátrix  $j$ -edik sora az  $i$ -edik sor  $s^n$ -szerese mod  $p$ . Ugyanez tehát  $A_n$  vektorainak megfelelő koordinátáira is igaz, vagyis ha  $k > p + 1$ , akkor  $A_n \neq \mathbb{Z}^k$ . (A mod  $p$  vett  $M_n$  mátrix rangja a különböző mod  $p$  vett  $a_i/b_i$  törtek száma, hiszen ha  $r$  olyan sort vesszünk, melyekre  $a_i/b_i$  páronként különbözőek mod  $p$ , akkor ennek a részmatrixnak az  $r$ -edik determinánsosztója nem osztható  $p$ -vel a 4.5. feladat miatt.)  $\square$

Ha  $i \neq j$ , akkor  $d_{ij} = a_i b_j - b_i a_j$  a legnagyobb modulus, melyre nézve  $a_j/a_i$  és  $b_j/b_i$  egyenlő. Az az  $s_{ij}$  szorzó, melyre  $s_{ij} a_i \equiv a_j \pmod{d_{ij}}$  és  $s_{ij} b_i \equiv b_j \pmod{d_{ij}}$  az  $s_{ij} = e_i a_j + f_i b_j$  képlettel kapható, ahol  $e_i a_i + f_i b_i = 1$  (van ilyen  $e_i, f_i$ , mert  $a_i$  és  $b_i$  relatív prímekek). Legyen  $1 \leq i \leq k$  esetén  $s_{ii} = 1$ .

**4.10. feladat.** *Nyilván  $\mathbf{s}_j = [s_{j1}, \dots, s_{jk}]^T \in A_1$  és  $\mathbf{d}_j = [d_{j1}, \dots, d_{jk}]^T \in A_1$ . Készítsünk egy olyan bázist  $A_n$ -ben az  $\mathbf{s}_j$  és  $\mathbf{d}_j$  komponensenkénti szorzásával a 4.8. feladat alapján, ahol a vektorok háromszögmátrixot alkotnak ( $n \geq k - 1$ ).*

**Útmutatás.** Legyen  $1 \leq j \leq k$ . A  $\mathbf{d}_j$  vektor  $j$ -edik koordinátája nulla, ezért a  $j$ -edik bázisvektor elkészítéséhez tekintsük a  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{j-1}$  (komponensenkénti) szorzatát. Ennek az első  $j-1$  koordinátája nulla. Ahhoz, hogy  $A_n$ -be jussunk, szorozzunk még  $\mathbf{s}_j^{n-j+1}$ -nel. A főátlóban álló elemek szorzata  $\Delta$ , mert  $s_{jj} = 1$  és a főátló  $j$ -edik eleme  $d_{1,j} \cdot \dots \cdot d_{j-1,j}$ . Így a vektoraink függetlenek, és az általuk generált rács indexe  $\Delta$ . De  $A_n$  indexe is  $\Delta$ , ezért bázist kaptunk.  $\square$

Ha az előző feladatban kapott háromszögmátrix  $K$ , akkor  $\mathbf{v} = [c_1, \dots, c_k]^T$  pontosan akkor van  $A_n$ -ben, ha a  $K[x_1, \dots, x_n]^T = \mathbf{v}$  lineáris egyenletrendszer (egyértelmű) megoldása egész  $x_i$  számokból áll. Ezt az egyenletrendszert föntről lefelé haladva könnyű megoldani. A  $K$  inverzével szorozva  $[x_1, \dots, x_n]^T = K^{-1}\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$ . Ez  $k$  oszthatósági feltétel, ahol a bal oldalon mindig  $\Delta$  áll, mert  $\Delta K^{-1}$  egész elemű. Az első ezek közül automatikusan teljesül, mert  $K$  első sorának első eleme 1.

**4.11. példa.** Legyenek a megadott párok  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$  és  $(1, -1)$ . Ekkor  $n \geq 2$  esetén az összes  $A_n$  egyenlő,  $d_{12} = 2$ ,  $d_{13} = -2$ ,  $d_{23} = -4$ ,  $\Delta = 16$ , mindegyik  $s_{ij} = 1$ , és  $[c_1, c_2, c_3]^T$  pontosan akkor van  $A_n$ -ben, ha  $16 \mid -8c_1 + 8c_2$  és  $16 \mid -4c_1 + 2c_2 + 2c_3$ .

## 5. Ortogonális rácsok

Zárásként belátjuk Peter McMullen egy gyönyörű tételét. Mostantól kicsit nagyobb tudást feltételezünk lineáris algebrából (például euklideszi tér, ortogonális kiegészítő altér). Legyenek  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^k$  lineárisan független vektorok és  $V$  az általuk generált altér. Ebben  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  egész együtthatós lineáris kombinációi egy  $r$  rangú  $B$  rácsot alkotnak. Ez tehát nem az egész  $\mathbb{R}^k$ -nak rácsa, hanem csak a  $V$  altérnek.

**5.1. állítás.** Jelölje  $L$  a  $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r]$  mátrix  $r \times r$ -es aldeteminánsainak négyzetösszegét ( $r \geq 1$ ). Ekkor a  $B$  rács alap-parallelotópjának térfogata  $\sqrt{L}$ .

**Bizonyítás.** Föltehető, hogy  $r < k$ . Legyen  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_k$  ortonormált bázis a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  által generált  $V$  altér  $V^\perp$  ortogonális kiegészítő alterében (ezek egy „kockát” feszítenek ki), és  $M = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$ . Geometriai megfontolásokból kapjuk, hogy  $\det(M)$  abszolút értéke a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  által generált rács alap-parallelotópjának  $d$  térfogata.

Az  $M^T M$  mátrix két diagonális blokkból áll, és a többi eleme nulla. A második blokk a  $(k-r) \times (k-r)$ -es egységmátrix. Az első,  $r \times r$ -es blokkot jelölje  $N$ . Ekkor  $d^2 = \det(M^T M) = \det(N)$ . Alkalmazzuk a Cauchy–Binet-formulát (2.2. tétel) az  $M^T M$  szorzatra és az első  $r$  sorra/oszlopra. Ekkor  $d^2 = L$  adódik.  $\square$

Ha  $B$  rács  $\mathbb{Z}^k$ -ban és  $V$  altér  $\mathbb{R}^k$ -ban, akkor  $V$ -be  $B$ -nek kevés vektora is eshet. Például az  $y = \sqrt{2}x$  egyenes nem tartalmaz egész koordinátájú pontot az origón kívül. Nevezzük  $V$ -t *raciónális altérnek*, ha generálható racionális koordinátájú vektorokkal. Racionális vektorok egy családja pontosan akkor független  $\mathbb{Q}$  fölött, ha  $\mathbb{R}$  fölött az. Ha a  $V$  racionális altér  $r$ -dimenziós, akkor  $V \cap \mathbb{Q}^k$  ortogonális komplementerének dimenziója  $\mathbb{Q}^k$ -ban  $k-r$ , és így az  $\mathbb{R}^k$ -ban vett ortogonális kiegészítő is racionális altér. Továbbá  $\mathbb{Z}^k \cap V$ -ben van  $r$  független vektor, hiszen egy

racionális vektort alkalmas nem nulla egészszel megszorozva egész vektort kapunk. Ezért  $\mathbb{Z}^k \cap V$  rács  $V$ -ben.

**5.2. definíció.** Egy  $B$  csoport  $\mathbf{v}$  elemének  $B$ -beli *magassága* a legnagyobb olyan egész, amivel  $\mathbf{v}$  elosztható úgy, hogy  $B$ -ben maradjunk. Ha  $B = \mathbb{Z}^k$ , akkor ez a  $\mathbf{v}$  komponenseinek legnagyobb közös osztója. Tehát  $\mathbf{v}$  akkor primitív, ha magassága  $\mathbb{Z}^k$ -ban 1. A  $B$  részcsoport *tiszta*  $\mathbb{Z}^k$ -ban, ha a vektorok magassága ugyanaz  $B$ -ben, mint  $\mathbb{Z}^k$ -ban. (Ez a 3.9. következmény (2) pontjában szereplő feltétel.)

**5.3. lemma.** *Ha  $V$  racionális altér  $\mathbb{R}^k$ -ban, akkor  $V \cap \mathbb{Z}^k$  tiszta részrácsa  $\mathbb{Z}^k$ -nak.*

**Bizonyítás.** Valóban, ha  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$  és  $m\mathbf{v} \in V \cap \mathbb{Z}^k$ , akkor  $\mathbf{v} \in V$  (hiszen  $V$  zárt az  $1/m$  számmal való szorzásra), és így  $\mathbf{v} \in V \cap \mathbb{Z}^k$ .  $\square$

**5.4. tétel** (McMullen, [4]). *Legyen  $V$  racionális altér  $\mathbb{R}^k$ -ban. Ha  $A_1 = V \cap \mathbb{Z}^k$  és  $A_2 = V^\perp \cap \mathbb{Z}^k$ , akkor  $A_1$  és  $A_2$  alap-parallelotópjának térfogata megegyezik.*

**Bizonyítás.** Legyen  $\dim(V) = r$  és  $0 < r < k$  (az  $r = 0$  és  $r = k$  esetben  $\{\mathbf{0}\}$  térfogatát 1-nek tekintve igaz az állítás). Vegyük  $A_1$ -nek egy  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  és  $A_2$ -nek egy  $\mathbf{b}_{r+1}, \dots, \mathbf{b}_k$  bázisát. Ezek együtt bázist alkotnak  $\mathbb{R}^k$ -ban, hiszen  $A_1 \perp A_2$  (de  $\mathbb{Z}^k$ -ban általában nem). Az 5.3. lemma és a 3.9. következmény miatt a  $[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r]$  mátrix  $r$ -edik determinánsosztója 1. Az analóg állítás érvényes  $A_2$  esetében is.

Tekintsük a  $[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k]$  mátrix első  $r$  oszlopa szerinti  $e_1 f_1 g_1 + \dots + e_m f_m g_m$  Laplace-kifejtését, ahol  $f_i$  az első  $r$  oszlophoz,  $g_i$  az utolsó  $k - r$  oszlophoz tartozó aldeterminánsok,  $e_i$  a megfelelő előjelek, és  $m = \binom{k}{r}$ . Legyen  $\mathbf{w}_1 = [e_1 f_1, \dots, e_m f_m]$  és  $\mathbf{w}_2 = [g_1, \dots, g_m]$ . Ekkor  $\mathbf{w}_1$  és  $\mathbf{w}_2$  skaláris szorzata a  $[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k]$  mátrix  $d$  determinánsa (aminek abszolút értéke a  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  által generált rács alap-parallelotópjának térfogata, azaz indexe).

Jelölje  $d_1$  és  $d_2$  az  $A_1$ , illetve  $A_2$  rácsok alap-parallelotópjának térfogatát. Az 5.1. állítás miatt  $d_1^2$  a  $\mathbf{w}_1$  vektor komponenseinek négyzetösszege, hiszen a négyzetre emelés után az előjelek már nem számítanak, és ugyanez áll  $d_2$ -re és  $\mathbf{w}_2$ -re is. Mivel e két rács ortogonális,  $d_1 d_2 = |d|$ . Ez azt jelenti, hogy a  $\mathbf{w}_1$  és  $\mathbf{w}_2$  vektorokra fölírt Cauchy-egyenlőtlenségben egyenlőség áll. Ezért  $\mathbf{w}_1$  és  $\mathbf{w}_2$  egymás skalárszorosai. Ez a skalár szükségképpen racionális szám, azaz alkalmas  $m_1$  és  $m_2$  nem nulla egészekre  $m_1 \mathbf{w}_1 = m_2 \mathbf{w}_2$ . De a  $[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r]$  mátrix  $r$ -edik determinánsosztója 1, ezért  $\mathbf{w}_1$  (és hasonlóan  $\mathbf{w}_2$  is) primitív vektorok. Tehát  $\mathbf{w}_1 = \pm \mathbf{w}_2$ , és így  $d_1 = d_2$ .  $\square$

## 6. Appendix: Vetítések és alkalmazásai

Az alábbi feladatokban a mátrixok normálalakja helyett geometriai módszerekkel igazolunk korábbi állításokat. Szó lesz egy számelméleti alkalmazásról is. Fő eszközünk a vetítés. Ha az  $e_1$  és  $e_2$  egyenesek az origóban metszik egymást, akkor az  $e_1$ -re való  $e_2$  irányú vetítés az a leképezés, amely a sík minden  $P$  pontjához az  $e_1$  egyenes azon  $Q$  pontját rendeli, melyre  $PQ$  párhuzamos  $e_2$ -vel.

Ha  $U$  és  $W$  alterek, és  $\mathbb{R}^k$  minden eleme egyértelműen fölírható egy  $U$ -beli és egy  $W$ -beli vektor összegeként, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathbb{R}^k$  a  $U$  és  $W$  alterek *direkt összege*, jele  $\mathbb{R}^k = U \oplus W$ . Az egyértelműség feltétele, hogy  $U \cap W$  csak a nullvektorból álljon. A bázisok nyelvén ez azt jelenti, hogy van olyan  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  bázis  $U$ -ban, és  $\mathbf{b}_{r+1}, \dots, \mathbf{b}_k$  bázis  $W$ -ben, hogy ezek együtt bázist alkotnak  $\mathbb{R}^k$ -ban. Hasonlóan értelmezzük azt is, amikor  $\mathbb{Z}^k$  az  $A$  és  $B$  csoportok direkt összege, azaz  $\mathbb{Z}^k = A \oplus B$ .

Ha  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ , ahol  $\mathbf{u} \in U$  és  $\mathbf{w} \in W$ , akkor az a leképezés, amely  $\mathbf{v}$ -hez  $\mathbf{u}$ -t rendel, az  $\mathbb{R}^k$ -nak az  $U$ -ra való *vetítése a  $W$  irányban*. Ha  $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{b}_k$ , akkor  $\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{b}_r$ , vagyis a vetítés „kinullázza” az utolsó  $k - r$  koordinátát.

**6.1. feladat.** Legyen  $\mathbb{R}^k = U \oplus W$ , ahol  $U$  egy  $\mathbb{R}$  fölött  $r$ -dimenziós racionális altér. Igazoljuk, hogy  $W$  pontosan akkor racionális altér, ha  $\mathbb{Q}^k$ -nak az  $U$ -ra vett  $W$  irányú vetületében nincs  $r$ -nél több  $\mathbb{Q}$  fölött független vektor.

**Útmutatás.** Legyen  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  racionális bázis  $U$ -ban és  $\mathbf{b}_{r+1}, \dots, \mathbf{b}_s$  maximális számú,  $\mathbb{R}$  fölött független racionális vektor  $W$ -ben. Ha  $s < k$ , akkor van olyan  $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^k$ , ami  $\mathbb{R}$  fölött független  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$ -től. Ekkor  $\mathbf{v}$  vetülete független  $\mathbb{Q}$  fölött  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ -től.  $\square$

**6.2. feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^k$  független  $\mathbb{Q}$  fölött akkor az általuk generált csoport nem diszkrét, ezért nem is rács.

**Útmutatás.** Föltehető ( $k$  szerinti indukcióval), hogy  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  független  $\mathbb{R}$  fölött, legyen  $B$  az általuk generált rács és  $P$  az általuk kifeszített paralellepiped. Tekintsük az  $n\mathbf{v}_{k+1}$  vektorokat ( $n$  egész), és mindegyiket toljuk vissza  $P$ -be a  $B$  megfelelő elemével. A kapott pontok mind különbözők  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^k$  függetlensége miatt.  $\square$

**6.3. feladat.** Igazoljuk, hogy minden irracionális szám egész többszöröseinek törtrészei sűrűn helyezkednek el  $[0, 1]$ -ben (azaz minden rész-intervallumban van törtrész).

**Útmutatás.** Az előző feladat  $\mathbf{v}_1 = 1$  és  $\mathbf{v}_2 = \alpha$  esetén azt adja, hogy  $[0, 1]$ -ben végtelen sok ilyen törtrész van. Ezért minden  $\varepsilon > 0$ -ra lesz kettő  $\varepsilon$ -nál közelebb egymáshoz. A megfelelő egész szorzókat kivonva olyan törtrészt kapunk, ami a nullához van  $\varepsilon$ -nál közelebb. Minden  $\varepsilon$  hosszú intervallumba beleesik ennek valamelyik többese.  $\square$

Sokkal erősebb állítás is igazolható Minkowski rácsokról szóló tétele segítségével: ha  $\alpha$  irracionális, akkor van végtelen sok olyan  $r/s$  tört, melyek bármelyike  $\alpha$ -tól kevesebb, mint  $1/(2s^2)$ -tel tér el (lásd [2], 8.2. szakasz). Kronecker approximációs tétele arra ad feltételt, hogy  $\mathbf{v}_{k+1}$  egész többszei  $P$ -ben alkossanak sűrű halmazt.

**6.4. feladat.** Tegyük föl, hogy  $U$  racionális altér és  $C$  a  $\mathbb{Z}^k$ -nak az  $U$ -ra vett  $W$  irányú vetülete. Mutassuk meg, hogy  $C$  pontosan akkor rács  $U$ -ban, ha  $W$  is racionális altér.

**Útmutatás.** Ha  $W$  racionális altér,  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  racionális bázis  $U$ -ban és  $\mathbf{b}_{r+1}, \dots, \mathbf{b}_k$  racionális bázis  $W$ -ben, akkor írjuk föl ezekkel  $\mathbb{Z}^k$  egy bázisát. Ha az együtthatók közös nevezője  $N$ , akkor minden  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$  vektor  $U$ -ra eső vetületének  $N$ -szerese benne van a  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  generálta csoportban. Így  $C$  diszkrét, és nyilván  $\mathbb{R}$  fölött generálja az  $U$  alteret. Megfordítás: 6.1. és 6.2.  $\square$

**6.5. feladat.** Mutassuk meg a normálalak használata nélkül, hogy a 3.9. következményben (2)-ből következik (1).

**Útmutatás.** A (2) szerint valamely független  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r \in \mathbb{Z}^k$  által generált  $B$  csoport tiszta  $\mathbb{Z}^k$ -ban. Legyen  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  racionális bázisa  $\mathbb{Q}^k$ -nak,  $W$  a  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  által generált valós altér, és  $U$  a  $\mathbf{b}_{r+1}, \dots, \mathbf{b}_k$  által generált valós altér. A 6.4. feladat miatt  $\mathbb{Z}^k$ -nak az  $U$ -ra vett  $W$  irányú  $C$  vetülete rács  $U$ -ban, legyenek  $\mathbf{c}_{r+1}, \dots, \mathbf{c}_k \in \mathbb{Z}^k$  olyan vektorok, melyek vetülete bázis  $C$ -ben. Ekkor minden  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$  esetén vannak olyan  $z_i$  egészek, hogy  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} - z_{r+1}\mathbf{c}_{r+1} - \dots - z_k\mathbf{c}_k \in W$ . Tehát  $\mathbf{v}_0$  fölírható  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  racionális együtthatós lineáris kombinációjaként, és ezért alkalmas  $m \neq 0$  egészre  $m\mathbf{v}_0 \in B$ . Mivel  $B$  tiszta,  $\mathbf{v}_0 \in B$  és ezért  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r, \mathbf{c}_{r+1}, \dots, \mathbf{c}_k$  bázis  $\mathbb{Z}^k$ -ban.  $\square$

**6.6. feladat.** Legyen  $B \subseteq \mathbb{Z}^k$  rács,  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$  bázis  $\mathbb{Z}^k$ -ban,  $W$  a  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_r$  által generált,  $U$  a  $\mathbf{d}_{r+1}, \dots, \mathbf{d}_k$  által generált valós altér. Vetítsük  $B$ -t  $U$ -ra  $W$  irányából. Igazoljuk, hogy ha  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_r \in B$ , akkor a vetület  $B \cap U$ , és  $B = (B \cap W) \oplus (B \cap U)$ .

**Útmutatás.** A  $\mathbf{v} = z_1\mathbf{d}_1 + \dots + z_k\mathbf{d}_k$  vektor vetülete  $U$ -ra  $\mathbf{u} = z_{r+1}\mathbf{d}_{r+1} + \dots + z_k\mathbf{d}_k$ . Ha  $\mathbf{v} \in B$ , akkor  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_r \in B$  miatt  $\mathbf{u} \in B$ , azaz a vetület része  $B \cap U$ -nak.  $\square$

**6.7. feladat.** Legyen  $B \subseteq \mathbb{Z}^k$  rács,  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^k$  nem nulla vektor és  $C$  a  $\mathbf{w}$ -re merőleges  $B$ -beli vektorok halmaza. Vetítsük  $B$ -t merőlegesen a  $\mathbf{w}$  egyenesére. Mutassuk meg, hogy van legrövidebb nem nulla vetület, és ha  $\mathbf{v} \in B$  vetülete egy ilyen legrövidebb  $\mathbf{w}_0$  vektor, akkor  $B = A \oplus C$ , ahol  $A$  a  $\mathbf{v}$  egész többszöröseinek halmaza.

**Útmutatás.** Az  $\mathbf{u} \in B$  vektor  $\mathbf{w}$ -re eső vetületének hossza az  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = n$  skaláris szorzat osztva  $\mathbf{w}$  hosszával. Mivel  $n$  egész, ezért a vetületek között tényleg van legrövidebb. Tehát  $B$  vetülete rács a  $\mathbf{w}$  egyenesén, és ezért minden vektor vetülete  $\mathbf{w}_0$  egész számszorosa. Ha  $\mathbf{u}$  vetülete  $m\mathbf{w}_0$ , akkor  $\mathbf{u} - m\mathbf{v}$  merőleges  $\mathbf{w}$ -re, és ezért  $C$ -ben van.  $\square$

**6.8. feladat.** Legyen  $\mathbf{w}$  primitív vektor  $\mathbb{Z}^k$ -ban és  $C$  a  $\mathbf{w}$ -re ortogonális egész vektorok halmaza. Bizonyítsuk be, hogy  $\mathbf{w}$  hossza megegyezik  $C$  alap-parallelotópjának térfogatával. (Ez McMullen tételének speciális esete.)

**Útmutatás.** Mivel  $\mathbf{w}$  primitív, van olyan  $\mathbf{v}$  vektor, melynek  $\mathbf{w}$ -vel vett skaláris szorzata 1 (oldjuk meg a lineáris diofantoszi egyenletet). Az előző feladatot a  $B = \mathbb{Z}^k$  rácsra alkalmazva azt kapjuk, hogy  $\mathbf{v}$  és  $C$  generálják  $\mathbb{Z}^k$ -t, azaz  $C$  egy  $P$  alap-parallelotópja  $\mathbf{v}$ -vel együtt egy 1 térfogatú parallelotópot feszít ki. Ennek alapja  $P$ , magassága pedig a  $\mathbf{v}$  vektor  $\mathbf{w}$  irányú vetületének hossza, ami  $\mathbf{w}$  hosszának reciproka.  $\square$

**6.9. feladat.** *Igazoljuk, hogy a háromdimenziós térben minden egész vektor előáll két egész vektor vektoriális szorzataként.*

**Útmutatás.** Föltehető, hogy  $\mathbf{w}$  primitív, alkalmazzuk az előző feladatot. *Második, elemi megoldás:* ha  $(a_1, a_2, a_3)$ -at akarjuk  $(x_1, x_2, x_3)$  és  $(y_1, y_2, y_3)$  vektoriális szorzataként előállítani, akkor legyen  $x_3 = y_3 = \text{lko}(a_1, a_2) = d$ . Föltehető, hogy  $d \neq 0$ ; ha  $a_1x_1 + a_2x_2 = -a_3x_3$ , akkor  $y_1 = a_2/d + x_1$  és  $y_2 = -a_1/d + x_2$  megfelelő.  $\square$

**6.10. feladat.** *Mutassuk meg a normálatlak fölhasználása nélkül, hogy ha  $B \subseteq \mathbb{Z}^k$  rács, akkor van olyan  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$  bázisa  $\mathbb{Z}^k$ -nak, hogy alkalmas  $s_1, s_2, \dots, s_k$  egészekre  $s_1\mathbf{c}_1, \dots, s_k\mathbf{c}_k$  bázis  $B$ -ben.*

**Útmutatás.** Vegyünk egy olyan  $h\mathbf{v} \in B$  vektort, melynek  $\mathbb{Z}^k$ -beli  $h$  magassága a lehető legkisebb. Ekkor  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$  primitív, így van olyan  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^k$ , melynek  $\mathbf{v}$ -vel vett skaláris szorzata 1. Jelölje  $C$  a  $\mathbf{w}$ -re merőleges egész vektorok halmazát. A 6.8. feladatban használt gondolatmenet miatt  $\mathbf{v}$  és  $C$  generálja  $\mathbb{Z}^k$ -t, és ha  $\mathbf{v}$  vetülete  $\mathbf{w}$  egyenesére  $\mathbf{w}_0$ , akkor a  $\mathbb{Z}^k$  merőleges vetülete  $\mathbf{w}$  egyenesére a  $\mathbf{w}_0$  egész többeseiből áll.

Vetítsük a  $B \subseteq \mathbb{Z}^k$  rácsot is merőlegesen  $\mathbf{w}$  egyenesére, és a vetület legrövidebb vektorát jelölje  $m\mathbf{w}_0$ . Ha  $\mathbf{u} \in B$  vetülete  $m\mathbf{w}_0$ , akkor a 6.7. feladat miatt  $B$ -t generálja  $\mathbf{u}$  és  $C \cap B$ . Az  $\mathbf{u}$  magassága  $\mathbb{Z}^k$ -ban legyen  $g$ , föltevésünk szerint  $h \leq g$ . Az  $(1/g)\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^k$  vektort  $\mathbf{w}$  egyenesére vetítve  $\mathbf{w}_0$  többszörösét kapjuk, ezért  $g \mid m$ . Mivel  $h\mathbf{v} \in B$  vetülete  $h\mathbf{w}_0$ , ezért  $m \mid h$ . Ez csak úgy lehetséges, ha  $g = h = m$ .

Vagyis találtunk egy olyan  $m\mathbf{v} \in B$  vektort, amelyre  $\mathbf{v}$  és  $C$  generálja  $\mathbb{Z}^k$ -t, és  $m\mathbf{v}$  és  $B \cap C$  generálja  $B$ -t. Vegyünk egy bázist  $C$ -ben, és írjuk föl ebben  $B \cap C$  elemeit is (ilyen átkoordinátázást használtunk a 3.11. feladatban). Az átkoordinátázás után  $C$ -ből  $\mathbb{Z}^{k-1}$  lesz. Alkalmazzunk  $k$  szerinti indukciót, ekkor van olyan  $\mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k$  bázis  $C$ -ben, hogy  $s_2\mathbf{c}_2, \dots, s_k\mathbf{c}_k \in C$  bázis  $B \cap C$ -ben. Legyen  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}$  és  $s_1 = m$ .  $\square$

Az alábbi feladat többszöri alkalmazásával elérhetjük az  $s_1 \mid \dots \mid s_k$  oszthatóságot.

**6.11. feladat.** *Tegyük föl, hogy  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$  bázis a  $C$  rácsban és  $s_1\mathbf{c}_1, \dots, s_k\mathbf{c}_k$  bázis a  $B \subseteq C$  rácsban. Legyen  $s$  az  $s_1$  és  $s_2$  legnagyobb közös osztója,  $t = s_1s_2/s$  pedig a legkisebb közös többszörösük. Válasszunk olyan  $e$  és  $f$  egészeket, melyekre  $es_1 + fs_2 = s$ , legyen  $\mathbf{c}'_1 = (s_1/s)\mathbf{c}_1 - (s_2/s)\mathbf{c}_2$  és  $\mathbf{c}'_2 = f\mathbf{c}_1 + e\mathbf{c}_2$ . Mutassuk meg, hogy  $\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \mathbf{c}_3, \dots, \mathbf{c}_k$  bázis  $C$ -ben és  $s\mathbf{c}'_1, t\mathbf{c}'_2, s_3\mathbf{c}_3, \dots, s_k\mathbf{c}_k$  bázis  $B$ -ben.*

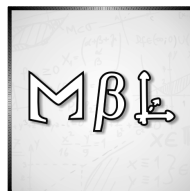
## Hivatkozások

- [1] Freud Róbert: *Lineáris Algebra*. ELTE Eötvös Kiadó, 2014.  
[www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011\\_0001\\_527\\_LinearisAlgebra](http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_527_LinearisAlgebra)
- [2] Freud Róbert, Gyarmati Edit: *Számelmélet*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.  
[www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011\\_0001\\_519\\_Szamelmelet](http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_519_Szamelmelet)

- [3] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*. TypoTeX Kiadó, 2007.  
[www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526\\_kiss\\_emil](http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil)
- [4] Peter McMullen: *Determinants of lattices induced by rational subspaces*, Bull. London Math. Soc., **16** (1984), 275–277.

**Kiss Emil és Simányi Nándor**  
e-mail: [ewkiss@cs.elte.hu](mailto:ewkiss@cs.elte.hu), [simanyi@uab.edu](mailto:simanyi@uab.edu)

## Maths Beyond Limits nemzetközi matematika tábor



Idén harmadik alkalommal kerül megrendezésre az intenzív és sokszínű Maths Beyond Limits (MBL) nemzetközi matematika tábor, 2018. szeptember 9. és 21. között. Helyszíne Milówka, egy kedves hegyvidéki falu Dél-Legyelországban, ami csodálatos hangulatot teremt a matekozáshoz, ismerkedéshez, illetve sporthoz. A szervezők középiskolás korú, a matematika iránt különösen fogékony fiatalok jelentkezését várják. A tábor minden meghívott számára ingyenes, az útiköltséget kivéve. Az MBL nyelve az angol, így jó nyelvismerettel érdemes érkezni, bár maga a tábor is kiváló lehetőség a nyelv gyakorlására.

Egy átlagos tábori nap során három időpontban matematikai előadáson vesznek részt a tábor lakói, minden időpontban három-három meghirdetett előadás közül választhatnak, érdeklődésüknek megfelelően. Néhány előadás témája: folyam gráfokban, választási rendszerek, véletlen módszer,  $p$ -adikus számok, projektív geometria, topológia, Galois-elmélet. Az előadásokat követően lehetőség nyílik az előadókkal való beszélgetésre, kérdések megvitatására. Esténként pedig számos szabadidős tevékenység közül lehet választani: akadt foci, röplabda, improvizáció, éneklés, illetve palacsintasütés is.

A táborra 2018. április 1-jétől április 30-ig lehet jelentkezni, hét feladat megoldásával, valamint a jelentkezési lap kitöltésével a következő címen:

<http://mathsbeyondlimits.eu/recruitment>.

További információra, illetve a tavalyi táborból bőséges mennyiségű matematikára lehet lenni a tábor 144 oldalas brosúrájában:

<http://mathsbeyondlimits.eu/mb12017>.

A táborral kapcsolatos információk, hírek elérhetőek a tábor Facebook-oldalán:

<https://www.facebook.com/mathsbeyondlimits/>.

A tavalyi résztvevők élményeiről készült rövidfilm a következő címen nézhető meg:

<https://www.youtube.com/watch?v=DP1m862AV-o&feature=share>.

Jó matekozást, sikeres jelentkezést kívánnak minden érdeklődőnek a szervezők!