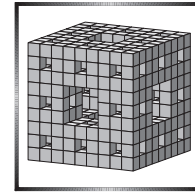


## A B pontversenyben kitűzött feladatok (5022–5029.)



**B. 5022.** Adott a síkon néhány egységsugarú kör, mindegyik középpontját kékre színezzük. A körvonalakon megjelölünk néhány pontot pirossal úgy, hogy minden körvonalra pontosan 2 piros pont illeszkedjen. Legfeljebb mekkora a kék pontok száma, ha összesen 25 színezett pont van?

(3 pont)

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

**B. 5023.** Az  $ABC$  háromszögben  $\angle C < 90^\circ$  és  $AC > BC$ . A háromszög köré írt kör  $C$ -t nem tartalmazó  $AB$  ívének felezőpontja  $X$ . A  $CX$ -re  $X$ -ben állított merőleges a  $CA$  egyenest a  $P$  pontban metszi. Mutassuk meg, hogy  $AP = BC$ .

(3 pont)

Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

**B. 5024.** Legyen  $p$  egy páratlan prímszám. A  $\binom{p-2}{0}, \binom{p-2}{1}, \dots, \binom{p-2}{p-2}$  számok mindegyikét maradékosan elosztjuk  $p$ -vel. Hányféle különböző maradékot kapunk?

(4 pont)

Javasolta: *Gyenes Zoltán és Hujter Bálint* (Budapest)

**B. 5025.** Az  $ABC$  háromszög beírt körének középpontja  $I$ , a kör a  $BC$ ,  $CA$  és  $AB$  oldalakat rendre a  $D$ ,  $E$  és  $F$  pontokban érinti. Legyen  $M$  a  $BC$  oldal tetszőleges,  $D$ -től különböző belső pontja, a  $DI$  és  $EF$  egyenesek metszéspontja  $T$ , az  $MT$  szakasz felezőpontja  $K$ . Bizonyítsuk be, hogy a  $DEF$ ,  $TDM$  és  $KIT$  körök egy ponton mennek át.

(5 pont)

Javasolta: *Murad Agazade* (Azerbajdzsán)

**B. 5026.** Adott ellipszis nagytengelyének végpontjaitól különböző tetszőleges  $P$  pontját kössük össze az  $F_1, F_2$  fókuszpontokkal. Az  $F_1PF_2$  szögfelezője  $E$ -ben metszi  $F_1F_2$ -t. A  $P$ -n átmenő,  $F_1F_2$ -t  $E$ -ben érintő kör  $PF_1$ -et  $G$ -ben,  $PF_2$ -t  $H$ -ben metszi. Mutassuk meg, hogy  $GH$  hossza nem függ  $P$  megválasztásától.

(4 pont)

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

**B. 5027.** Gombóc Artúr az Édes utca 1. szám alatt lakik, a csokibolt pedig az utca másik végén, az  $n$ -edik szám alatt található. Artúr minden nap a következő fitneszedzést tartja: elindul a 2-es számú ház elől. Ha a  $k$ -edik számú ház előtt áll (ahol  $1 < k < n$ ), akkor feldobja lejárt szavatosságú, de szabályos csokiérméjét. Fej esetén átmegy a  $(k-1)$ -es számú, míg írás esetén a  $(k+1)$ -es számú ház elé. Ha a csokibolt elé ér, akkor betér, és legurít egy csokigolyót, majd az  $(n-1)$ -es számú ház elé megy. Ha hazaér, vége az edzésnek. Naponta átlagosan hány csokigolyót gurít le Artúr?

(5 pont)

**B. 5028.** Ha  $P$  az  $XYZ$  hegyesszögű háromszög  $YZ$  oldalának egy pontja, akkor jelölje  $f(P; XYZ)$  a  $P$ -ből az  $XY$ , illetve  $XZ$  egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjaira illeszkedő egyenest.

Legyen az  $ABC$  háromszög magasságpontja  $H$ , talpponti háromszöge  $A'B'C'$ . Legyen  $A'' \equiv f(B'; HCA) \cap f(C'; HAB)$ . Hasonlóan definiáljuk a  $B''$  és  $C''$  pontokat. Mutassuk meg, hogy az  $AA''$ ,  $BB''$  és  $CC''$  egyenesek egy ponton mennek át.

(6 pont)

Javasolta: *K V Sudharshan*

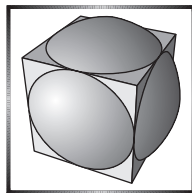
**B. 5029.** Tegyük fel, hogy egy focicsapat eddigi története során 1000 mérkőzést játszott és összesen 1000 pontot szerzett. (Győzelem esetén 3 pontot, döntetlen esetén 1 pontot kap, vereség esetén pedig nem kap pontot egy csapat.) Bizonyítsuk be, hogy a meccseken szerzett pontok sorozata legfeljebb  $(2,9)^{1000}$ -féle lehet.

(6 pont)

**Beküldési határidő: 2019. május 10.**

**Elektronikus munkafüzet:** <https://www.komal.hu/munkafuzet>

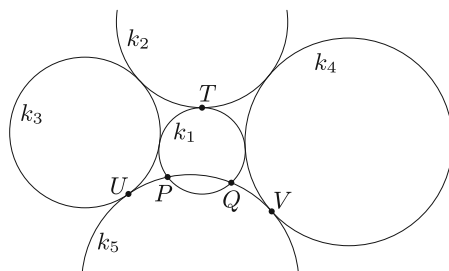
**Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518**



**Az A pontversenyben kitűzött  
nehezebb feladatok  
(749–751.)**

**A. 749.** Adott két poliomino. Az egyik egy három négyzetből álló L-alak, a másik legalább két négyzetből áll. Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  és  $m$  relatív prímek, akkor az  $n \times n$ -es és az  $m \times m$ -es tábla közül legfeljebb az egyik rakható ki a két poliomino eltoltjaival.

Javasolta: *Imolay András, Matolcsi Dávid, Schweitzer Ádám és Szabó Kristóf* (Budapest)



**A. 750.** Legyen  $k_1, \dots, k_5$  öt kör a síkban úgy, hogy  $k_1$  és  $k_2$  kívülről érintik egymást a  $T$  pontban,  $k_3$  és  $k_4$  kívülről érinti a  $k_1$ -et és a  $k_2$ -t is,  $k_5$  az  $U$ , illetve a  $V$  pontban kívülről érinti  $k_3$ -at, illetve  $k_4$ -et, továbbá  $k_5$  a  $P$  és a  $Q$  pontban metszi  $k_1$ -et az *ábra* szerint.

Mutassuk meg, hogy

$$\frac{PU \cdot PV}{QU \cdot QV} = \frac{PT^2}{QT^2}.$$