

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5038–5045.)

B. 5038. Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög belsejében felvettünk egy P pontot. Mutassuk meg, hogy az ABP , CDP , EPF és GHP háromszögek területeinek összege megegyezik a BCP , DEP , FGP és HAP háromszögek területeinek összegével.

(3 pont)

B. 5039. Egy 2019×2019 -es táblázat mindegyik mezőjébe vagy $(+1)$ -et, vagy (-1) -et írunk, majd kiszámoljuk az összes sor- és oszlopösszeget. Legfeljebb hány különböző számot kaphatunk?

(3 pont)

Javasolta: *Blahota István* (Nyíregyháza)

B. 5040. Legyen az $ABCD$ négyzet AB oldalának belső pontja F és AD oldalának belső pontja E . Az E pontban állítsunk merőlegest a CE egyenesre, az F pontban pedig állítsunk merőlegest a CF egyenesre. A két merőleges metszéspontja legyen M . Tegyük fel, hogy a CEF háromszög területe fele a $BCDEF$ ötszög területének. Igazoljuk, hogy az M pont rajta van a négyzet AC átlóján.

(4 pont)

B. 5041. Egy $n \times n$ -es táblázat mezőire egy-egy valós számot írunk. Egy ilyen táblázatot nullnégyzetnek hívunk, ha bármely legalább 2×2 -es négyzet alakú részében (így magában az egész táblázatban is) az elemek összege 0 (az ábrán egy 3×3 -as példa látható).

2	-3	4
-4	5	-6
1	-2	3

Mekkora a lehető legnagyobb n , amelyre van olyan $n \times n$ -es nullnégyzet, amelynek nem minden mezőjén 0 áll?

(5 pont)

B. 5042. Az $ABCD$ konvex négyszögről tudjuk, hogy nem trapéz, valamint, hogy AC és BD átlói egyenlő hosszúak. Az átlók metszéspontját jelölje M . Mutassuk meg, hogy az ABM és CDM körök második, M -től különböző metszéspontja a BMC szög felező egyenesére esik.

(4 pont)

B. 5043. Mutassuk meg, hogy az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ halmaznak páratlan sok olyan nemüres részhalmaza van, amelyben az elemek átlaga egész szám.

(5 pont)

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5044. Adott az ABC háromszög AB oldalának belsejében a D , az AC oldal belsejében az E pont; a BE és CD szakaszok metszéspontja M . A BCM háromszög területe legyen x , az EDM háromszög területe pedig y . Igazoljuk, hogy

$$T_{ABC} \geq x \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

(6 pont)

B. 5045. Mely pozitív egész n számok esetén van az első n pozitív egész számnak olyan a_1, a_2, \dots, a_n sorrendje, hogy az $a_1 + 1, a_2 + 2, \dots, a_n + n$ számok mind teljes hatványok? (Egy számot teljes hatványnak nevezünk, ha előáll a^b alakban, ahol $a, b \geq 2$ egész számok.)

(6 pont)

Beküldési határidő: 2019. október 10.

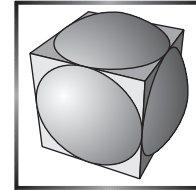
Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Figyelem! Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2019. október 4-én, pénteken 14 órakor kerül megrendezésre. A versenyzőknek előzetesen regisztrálniuk kell a versenyre, az ezzel kapcsolatos információ a <http://bolyai.hu/kurschak.htm> oldalon található.

**Az A pontversenyben kitűzött
nehezebb feladatok
(755–757.)**



A. 755. Bizonyítsuk be, hogy minden középpontosan szimmetrikus sokszöget át lehet darabolni négyzetté olyan módon, hogy véges sok sokszög alakú darabot használunk, és az egyes darabokat csak eltolni lehet. (Azaz az eredeti sokszög felbontható az A_1, A_2, \dots, A_n sokszögekre, egy négyzet felbontható a B_1, B_2, \dots, B_n sokszögekre úgy, hogy $1 \leq i \leq n$ esetén A_i és B_i egymás eltoltja.)

A. 756. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (valós számokon értelmezett, valós értékű) függvényt, melyre teljesülnek a következők:

(i) $f(x + 1) = f(x) + 1$;

(ii) $f(x^2) = (f(x))^2$.

(Romanian Masters of Mathematics feladat alapján)