Hivatkozások

[1] B. Knaster and A. Tarski, *Un théoreme sur lesfonctions d'ensembles,* Ann. Soc. Polon. Math., **6** (1927), 133–134.

[2] P. Szegedy, *Solution to problem P. 329,* KöMaL, **61** (1980), no. 2, 75.

[3] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications,* Pacific J. Math., **5** (1955), 285–309.

Bessenyei Mihály és **Pénzes Evelin**
Debrecen

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 - 14 = 2\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (6\ pont)$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\frac{2x^2y}{2x^2+y} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{12x^2y}{4x^2+3y} = \frac{1}{5}. \qquad (7\ pont)$$

2. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$4^x + 4\cdot 2^{-x} = 5. \qquad (6\ pont)$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = -2 + 3\cos 2x. \qquad (7\ pont)$$

3. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$1 + \frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)} = \frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{\log_2{(x+1)}^2}{2}. \qquad (8\ pont)$$

b) Egy szabályos dobókockát hatvanszor feldobva 15 esetben kaptunk hatost. Ezt a kísérletet egymás után többször elvégezve mindig ehhez hasonló eredményre jutunk. Emiatt úgy sejtjük, hogy a dobókocka „cinkelt", azaz a hatos megnövelt valószínűséggel bír. Mekkora ez a valószínűség, ha minden 60-as sorozat esetén 15 lett a kapott érték (azaz várható érték 15)? (*4 pont*)

4. *a*) Egy nem állandó számtani sorozat első, második és negyedik eleméhez rendre 1-et adunk, így egy mértani sorozat második, harmadik és negyedik elemét kapjuk. A mértani sorozat első, második és harmadik elemének az összege 7. Mennyi a számtani sorozat 1010-edik eleme? (*6 pont*)

b) Adott a következő sorozat:

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 \ (n \geqslant 1).$$

Adjuk meg a sorozat 2020-adik tagját. (*7 pont*)

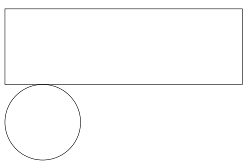
II. rész

5. *a*) Legyen a és b nemnegatív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

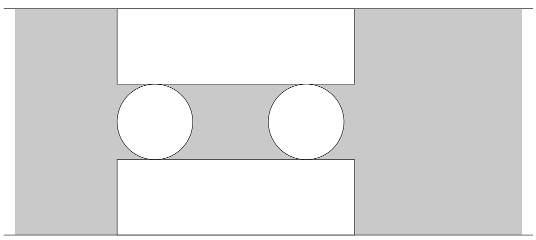
$$0 \leqslant \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} \leqslant 1.$$

Írhatunk-e a nulla helyett nála nagyobb számot? (*9 pont*)

b) Egy felül nyitott fémdobozt lemezből állítunk elő úgy, hogy az *1. ábrán* látható módon kivágunk, majd összehajtogatunk egy ilyen alakot.



1. ábra

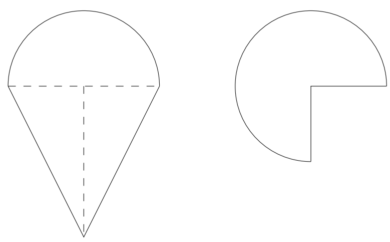


2. ábra

A kivágást egy 30 cm-es széles fémszalagból végezzük úgy, hogy 2 ilyen mintát fordítunk egymással szembe a *2. ábra* szerint. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a kikerülő fémdoboz a lehető legnagyobb térfogatú legyen? (*7 pont*)

6. *a*) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely egyidejűleg érintik az $y = x^2$ és $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolákat. (*9 pont*)

b) A magyar GúgLi Kft. egy emblémát tervez a székházuk elé, amely egy félbevágott gömb és egy kúp összetételéből áll. Az emblémának függőlegesen a negyede ki van vágva úgy, hogy a két vágósík az embléma függőleges tengelye mentén metszi egymást. Az embléma keresztmetszete és a függőleges metszete az *ábrán* látható.



A kúp magassága éppen a félbevágott gömb sugarának a kétszerese. Betonból szeretnék elkészíttetni majd lefesteni a 1,5 m magasságúra tervezett emblémát.

– Mennyi beton szükséges az elkészítéséhez, ha az elkészítés folyamán 15% veszteséggel számolhatunk?

– Mekkora lesz az elkészült embléma tömege?

– Hány m^2-re elegendő festéket kell beszerezniük, ha az időjárás ellen háromszor szeretnék lefesteni és a festés során keletkező veszteség 5%? (*7 pont*)

7. *a*) 18 tudós e-mail segítségével tartja a kapcsolatot a világban. Bármely két tudós egymással angol, német vagy orosz nyelven levelezik, mindig ugyanazt a nyelvet használják egymás között. Tudjuk, hogy nincs három olyan tudós, aki egymás között angol, vagy orosz nyelvet használ. Bizonyítsuk be, hogy létezik közöttük három, akik egymással németül leveleznek. (*9 pont*)

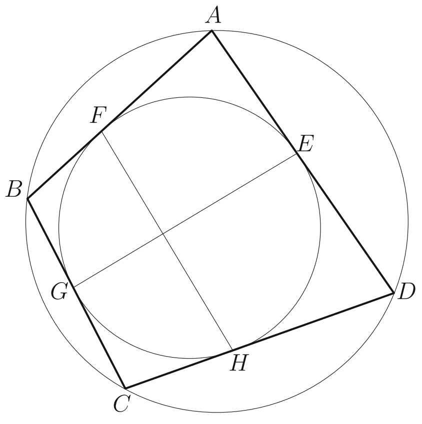
b) Aladár négyjegyű számokat ír fel egy papírlapra, melyek csak az 1; 2; 3 és 4 számjegyeket tartalmazhatják (lehet ismétlődés, nem kell minden számjegyet felhasználni minden négyjegyű számban). Figyel arra, hogy 1-es után csak 4-es, páros számjegy után csak páratlan jegy következhet. Hányféle számot tud leírni így? (*7 pont*)

8. *a*) Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egészek halmazán:

$$2 \cdot (x; y) + 17 \cdot [x; y] = 257,$$

ahol a „kerek" zárójel a két szám legnagyobb közös osztóját, a „szögletes" zárójel pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli. (*9 pont*)

b) Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 2 és 14, szárai 10 egység hosszúak. Meghúzzuk a belső szögeinek szögfelezőjét, amelyek egy négyszöget zárnak be. Amennyiben ennek a négyszögnek létezik a beírt és körülírt köre, mekkora ezen körök sugara? (*7 pont*)



9. *a*) Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \\ = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3},$$

ahol $n \in \mathbb{N}^+$. (*8 pont*)

b) Adott egy olyan húrnégyszög, ami egyben érintőnégyszög is.

Az *ábrán* jelöltük az érintési pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az EG és FH szakaszok merőlegesek egymásra. (*8 pont*)

Szoldatics József
Budapest