Kedves Olvasóink!

Köszönjük, hogy ebben a tanévben velünk tartottak. A következő tanévre szóló megrendelésről az információk várhatóan augusztus közepén kerülnek fel a honlapunkra.

Várjuk szíves megrendelésüket.

A Kiadó

Fraktálok és dimenziószámok

Kivonat: Cikkünkben körüljárjuk a rekurzió alapvető példáit, ennek kapcsán rátérünk a végtelenül önhasonló fraktálokra, ahol pedig felmerül a dimenziószám kérdése. Újabb alapozás után leírunk egy modellt, melynek segítségével értelmezhetjük egy alakzat dimenziószámát.

Akit érdekel, hogyan készültek a cikk ábrái, tekintse a dolgozat végén a források jegyzékét, illetve nézze meg az Informatika rovatban megjelenő Önhasonló fraktálok ábrázolása LaTeX-ben című cikket a 289. oldalon.

1. A rekurzió

Az önhasonló fraktálok megértéséhez hasznos, ha először tisztázzuk a rekurzió fogalmát, egy-két példával kiegészítve.

1.1. Sorozatok

Az iskolai anyag keretei közt a legtöbben először itt találkoznak a rekurzió fogalmával:

$$a_n = 2^n \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 2 \quad \wedge \quad a_n = 2 \cdot a_{n-1}.$$

Ebben a sorozatban az első elem 2, minden ezt követő elem pedig az őt megelőző elem kétszerese, tehát kifejezhető az előző elemből, ez a tulajdonság a rekurzió alapja. Az egyszerűbb sorozatok hozzárendelési szabályait általában meglehetősen egyszerű ilyenné átalakítani, bár ez általában nem előnyös, hiszen ebből az alakból egy adott elemhez csak az őt megelőző összes elem ismeretével, lépésenként tudunk eljutni. Viszont vannak olyan sorozatok, amelyeknek központi tulajdonságuk, hogy rekurzívan adjuk meg elemeiket. Talán a legismertebb ezek közül a Fibonacci-sorozat:

$$F_1 = 1 \quad \wedge \quad F_2 = 1 \quad \wedge \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$

A Fibonacci-sorozatnak is létezik egy, a kívántnál bonyolultabb közvetlen hozzárendelési szabálya, amelyhez nem kell végigszámolnunk az összes elemet. Ennek ellenére van benne valami megragadó, hogy minden elem „függ” az őt megelőzőektől. Persze tetszőlegesen sok ilyen rekurzív sorozat alkotható, a Fibonacci-sorozat egyszerűsége és érthetősége folytán lett ennek a kategóriának a legismertebb tagja.

1.2. Máshol az életben

Egyszer volt, hol nem volt egy icipici házikó,
Icipici házikóban icipici ágyikó.
Ottan élt, éldegélt egy icipici lencsi lány,
Icipici anyukával túl az Óperencián.

Icipici lencsi lányka lencsi babát ringatott,
Anyuka is ezt csinálta, s boldogságban éltek ott.
Amikor este lett, az icipici lányka félt,
S icipici anyukája mondott egy mesét, HOGY

(Közismert gyermekdal)

Ahogyan az *Icipici kis mesében* is láthatjuk, a történet tartalmazza önmagának tökéletes másolatát, végtelenül sokszor. Így akár azt is mondhatnánk rá, hogy végtelenül önhasonló.

Hasonló a helyzet akkor is, ha egy kamerával felveszünk egy TV-t, úgy, hogy közben ugyanerre a TV-re folyamatosan küldjük a kamera által felvetteket. Ennek a jelenségnek egy modernebb verziója látható az első belső borítón.

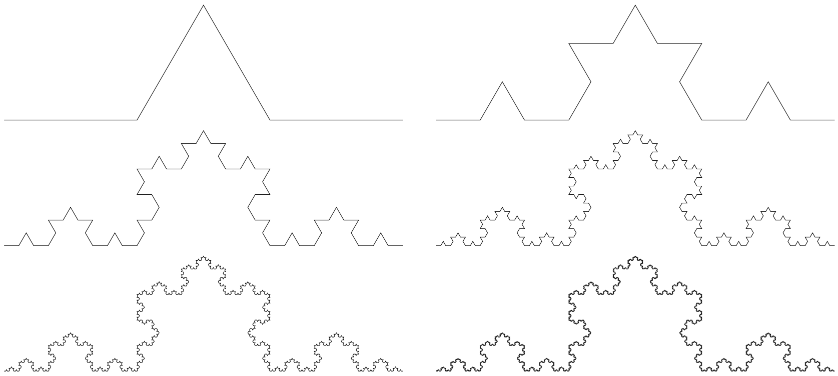
1.3. Végtelenül önhasonló fraktálok

De mi lenne, ha számok, történetek vagy képek helyett geometriai alakzatokat (elsősorban szakaszokat) „ágyaznánk önmagukba”? Nos, az ilyen végtelenül önhasonló részekből álló alakzatokat nevezzük végtelenül önhasonló fraktáloknak. A fraktál szó a latin „fractus” szóból ered, jelentése törött, töredezett. Ez az elnevezés Benoît Mandelbrot lengyel származású matematikustól származik, aki 1975-ben publikálta első könyvét (*Les objets fractals, form, hasard et dimension*) ezekről a végtelenül komplex geometriai alakzatokról. Nézzük is meg, hogyan épülnek fel.

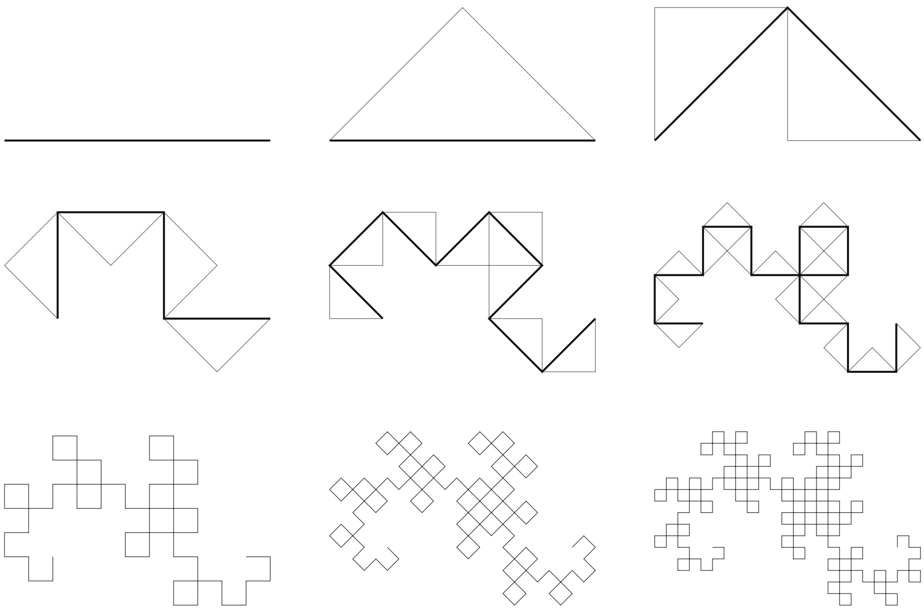
A következő három példa mindegyikében ezeket lépéseket ismételgetjük: lesz egy-egy egyszerű szabályunk, hogy minden, az ábrán található szakaszt *mivel* fogunk helyettesíteni a következő lépésben. Ezek a *valamik* kisebb szakaszokból állnak majd, amik ezután még több kis *valamivé* fognak változni. Nézzük is a példákat.

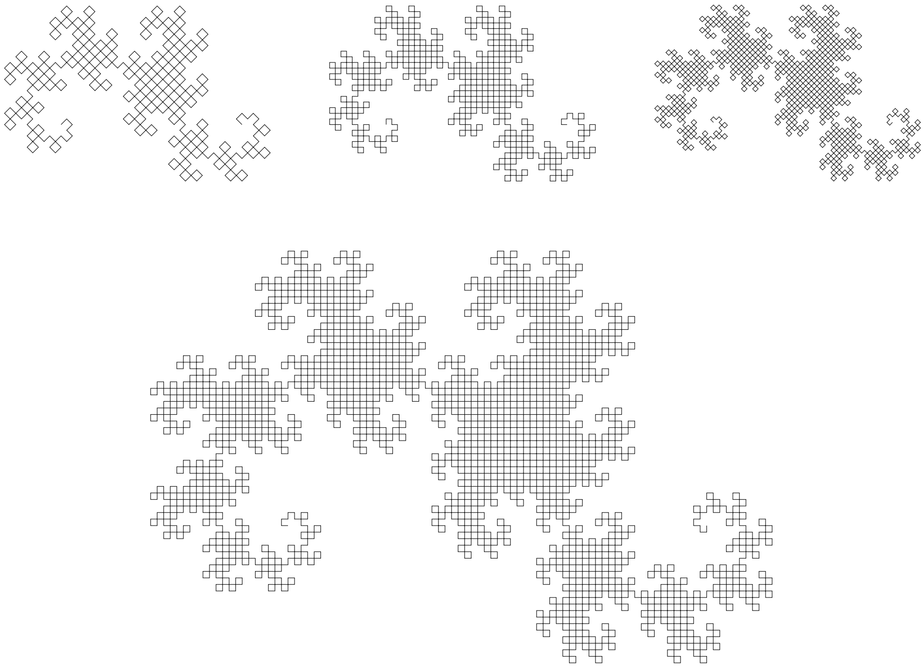
(A következőkben a kifejtett szabályok alapján generált ábrák láthatók, ezekkel a kedves olvasó már találkozhatott a KöMaL informatika rovatában is [1], [2]).

1.3.1. Koch-görbe. A Koch-görbe a legegyszerűbb végtelenül önhasonló fraktálok közé tartozik. A rekurzív szabály a következő: minden szakasz középső harmadát az afölé emelhető szabályos háromszög másik két oldalával helyettesíti. Figyeljük meg, hogy minden lépés harmadolja az *ábrán* látható szakaszok hosszát – ez a későbbiekben még fontos lesz. Emellett jelentős az is, hogy minden lépés $\frac{4}{3}$-szorozza a görbe hosszát, a végtelen sok lépéssel kapott tökéletes Koch-görbe tehát végtelenül hosszú.

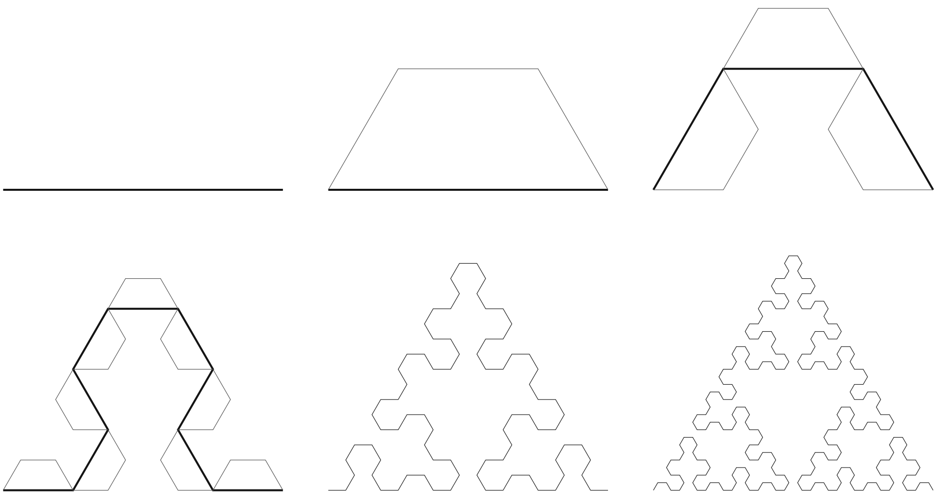


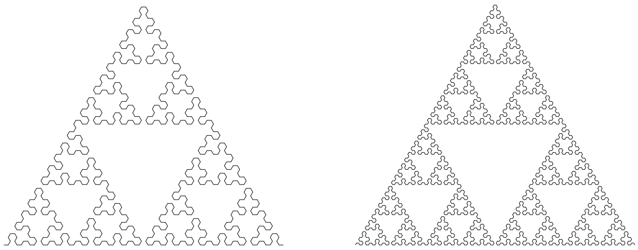
1.3.2. Sárkány-görbe. Ez már egy leheletnyivel bonyolultabb. Itt minden szakaszt a fölé emelhető egyenlő szárú, derékszögű háromszög másik két oldalával helyettesítünk, de úgy, hogy egyszer a görbe egyik oldalára, másszor a másik oldalára essen a harmadik csúcs. (Ez egy csöppet bonyolult leírva, így az első pár iterációnál az újabbikat vastagítással jelöltük, az előző iterációt feketével meghagyva. Reméljük, ez segíti a megértést.) Itt a szakaszok hossza a Pitagorasz-tételnek megfelelően $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$-szeresére változik. Érdekesség, hogy egy másik hozzárendelési szabállyal is ugyanehhez a görbéhez jutunk: ha a görbét a jobb oldali vége körül pozitív irányba elforgatjuk, és hozzátűzzük az eredetihez. Ebben az esetben természetesen a kapott alakzat egyre növekszik, hiszen a szakaszok hossza nem változik, viszont a számuk kétszereződik – ha ezzel a szabállyal is állandó „méretű" görbét szeretnénk kapni, minden lépés után $\frac{1}{\sqrt{2}}$-vel kell megszorozni az *ábra* távolságegységét.



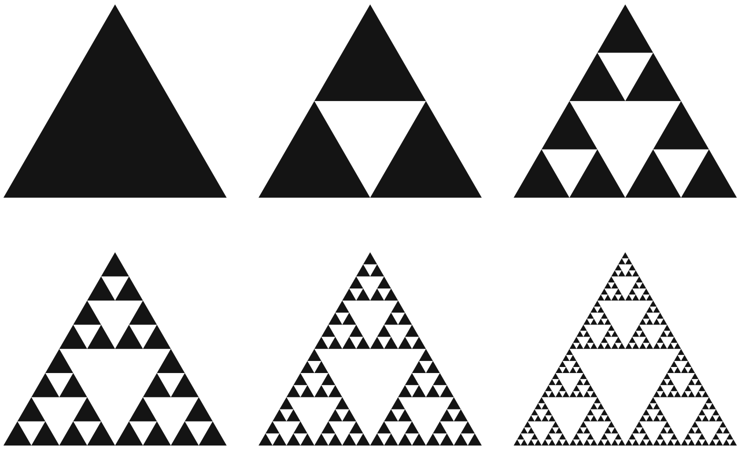


1.3.3. Sierpiński-háromszög. Itt minden szakaszt egy szabályos hatszög felével helyettesítünk, a Sárkány-görbéhez hasonlóan itt is váltogatjuk, hogy a vonal melyik oldalára duzzadjon ki – ezen kívül azt is, hogy az adott lépésben melyik oldalon kezdünk.





De várjunk csak. Ezt a mintát ismerjük, de általában nem így szoktunk eljutni hozzá.



Itt minden fekete háromszögnek fehérre festjük a középvonalháromszögét. Viszont az első esetben hosszúságokkal, itt pedig területekkel dolgoztunk, mégis ugyanahhoz az ábrához jutottunk. Ha utánaszámolunk, az első esetben a vonal hossza a végtelenbe tart, mert minden lépéssel konstans $\frac{3}{2}$-szeresére nő a hossza, a második esetben a terület viszont nullához, mert minden lépéssel konstans $\frac{3}{4}$-ére csökken. Ez az egész sok kérdést felvet, de a legégetőbb talán az, hogy: akkor hány dimenziós is a Sierpiński-háromszög?

2. A dimenzió fogalma

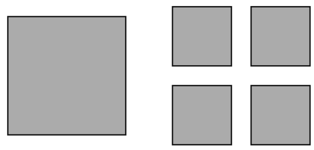
2.1. Hogyan értelmezzük a való életben?

A továbbiakban érdemes bevezetnünk egy fogalmat, ami általánosítja a hossz, terület, térfogat fogalmát minden dimenziószámra. Hívjuk tömegnek. Ez gyakorlatilag annyit mutat meg, hogy az adott alakzat megépítése esetén mennyi anyagot használnánk fel. A különböző dimenziószámú esetekben az alakzat „méretének" változtatásával különböző összefüggéseket fogunk kapni a „méret" és a tömeg közt.

Képzeljük el, hogy egy drótdarabot felosztunk feleakkora oldalhosszú egységekre. Egy ideális, egydimenziós drót esetén két tökéletes, kicsinyített mást kapunk, ezeknek tömege tehát feleakkora lesz, mint az eredeti drótó.

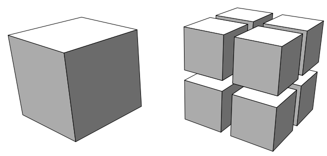
$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

Ha egy négyzet alakú fémlapot szeretnénk feleakkora olalhosszú kis négyzetekre felosztani, négy darabot kapnánk, a tömeg pedig értelemszerűen a negyedére csökkenne.



$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

A szemléletesség kedvéért vizsgáljuk meg a fémkocka esetét is. A feleakkora élhosszúságú kockákból nyolcra lesz szükség, ezeknek tömege így az eredeti tömegének nyolcada lesz.



$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Talán úgy nyer a legegyszerűbben értelmet a dimenziószám fogalma, ha rákérdezünk, hogy a vizsgált dolgot hány olyan kis darabra tudjuk szétosztani, ami önmagának egy bizonyos hosszaránnyal kicsinyített mása. Észrevehetjük, hogy fennáll egy szép egyenlőség:

$$K^D = N,$$

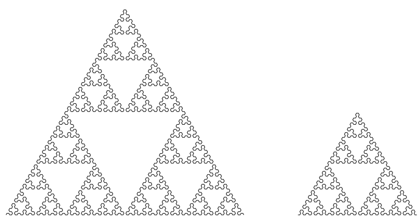
ahol N a kis alakzatok és az eredeti alakzat közötti tömegarány, K a kis alakzatok és az eredeti alakzat közötti hosszarány, D pedig a dimenzió száma. Ha pedig a dimenziószámot szeretnénk kifejezni, a logaritmus pontosan az ilyen jellegű kérdések megválaszolására lett kitalálva:

$$D = \log_K N.$$

2.2. A végtelenül önhasonló fraktálok dimenziója

Értelemszerűen ugyanezt a képletet a végtelenül önhasonló fraktáloknál is be lehet vetni, hiszen egyik alapvető tulajdonságuk, hogy önmaguk kisebb másolataiból állnak.

2.2.1. Sierpiński-háromszög

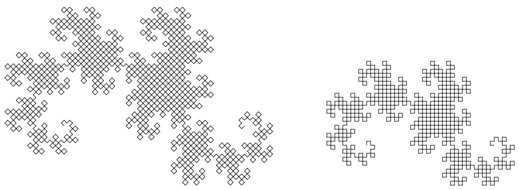


$$D = \log_2 3 \approx 1{,}585$$

Az egészen magától értetődő: a Sierpiński-háromszög önmagának három olyan másolatából áll, amelynek oldalhossza fele az eredeti oldalhossznak. Így akármilyen hihetetlen, az alakzat dimenziószáma nem egy egész szám, sőt irracionális. Ez megválaszolja a korábban felvetett kérdésünket: a Sierpiński-háromszögnek azért nem volt kielégítő tulajdonsága sem a hossz, sem a terület, mert abban a dimenziószámban, amiben létezik, ezek a tulajdonságok nem vonhatók párhuzamba a tömeggel.

A hossz csak egydimenziós, a terület csak kétdimenziós alakzatoknál működőképes helyettesítése az általánosabb tömeg koncepciójának.

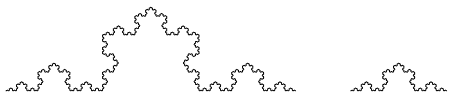
2.2.2. Sárkány-görbe



$D = \log_{\sqrt{2}} = 2$

Az előző részben leírtaknak megfelelően tudjuk, hogy ha két sárkánygörbét egy derékszöggel elforgatva a végeiknél összeillesztünk, egy $\sqrt{2}$-ször akkora „nagyságú” sárkánygörbét kapunk. Ha ezt ismerve kiszámoljuk a Sárkány-görbe dimenziószámát, kettőt kapunk. Ebbe kicsit hunyorogva bele lehet látni az értelmet: az alakzat belsejében tökéletes négyzetháló alakul ki, erről pedig intuitívan jön, hogy kétdimenziós.

2.2.3. Koch-görbe



$D = \log_3 4 \approx 1{,}262$

Itt a Sierpiński-háromszöghöz hasonló módon indulunk el: négy kis Koch-görbéből egyetlen, háromszoros nagyságú Koch-görbét lehet építeni. Még egy irracionális dimenziószámú alakzat.

2.3. Nem végtelenül önhasonló fraktálok dimenziója

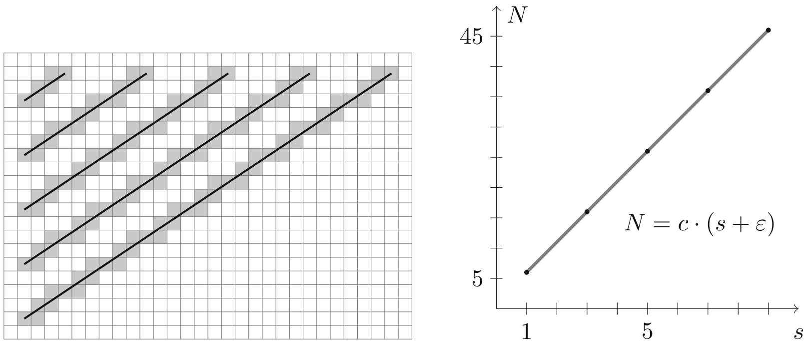
Felvetődik a kérdés, hogy milyen fraktál létezik még, ha a korábbi példáinkat a „végtelenül önhasonló” jelző előzte meg. Ami azt illeti, léteznek nem végtelenül önhasonló fraktálok is. Sőt, tökéletlen világunkban ezek gyakorlatilag mindenhol ott vannak. Egy klasszikus példa erre Norvégia partvonalának hossza, ennek vizsgálata. Ugyanis minél közelebbről figyeljük meg, annál több részletet vélünk felfedezni, annál hosszabbnak tűnik a partvonal. Bizonyos értelemben a vizsgálat pontosításával a végtelenbe tart (az, hogy ennek egy szinten túl fizikailag nincs értelme, ne legyen akadály: a matematikai kiteljesedés érdekében kezeljük a partvonalat tökéletesen, végtelenül részletesnek). Ez a tulajdonság emlékeztethet minket például a Sierpiński-háromszög végtelen kerületére. Ha viszont eljutottunk idáig, egyszerűen nem tudjuk nem feltenni magunknak a kérdést: *Hány dimenziós Norvégia partvonala?*

3. Egy másik modell a dimenziószámra

Mivel a nem végtelenül önhasonló fraktálok nem építhetőek fel önmaguk másolataiból – így Norvégia partvonala sem –, egy másik modellt kell alkalmaznunk.

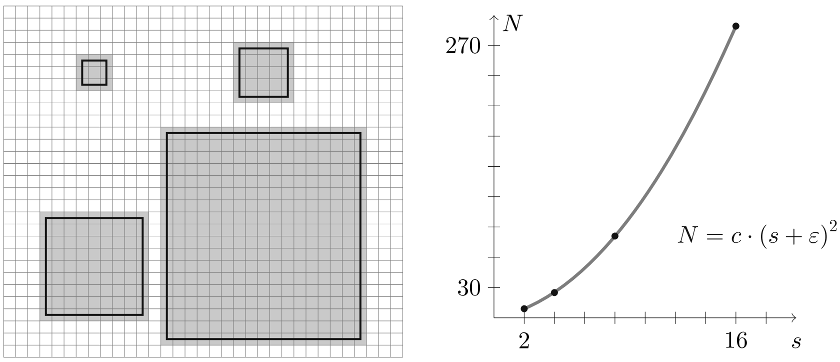
3.1. Egész dimenziószámú alakzatok dimenziója

Vegyünk fel egy egység-négyzetrácsot. Ha ebben felveszünk egy (tetszőleges) szakaszt, annak valahány egységnégyzettel lesznek közös pontjai, számoljuk meg ezeket. Változtassuk meg a szakasz hosszát, számoljuk meg, hogy így hány egységnégyzettel van közös pontja és jegyezzük fel a hossz-egységnégyzetszám számpárt. Ismételjük meg ezt a folyamatot tetszőlegesen sokszor, majd eredményeinket ábrázoljuk grafikonon.

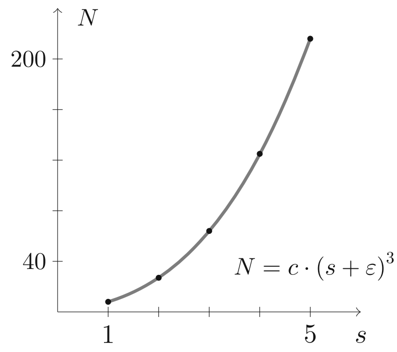


N az „érintett” egységnégyzetek száma, c egy konstans együttható, s pedig a szakasz hossza. Az ε egy olyan konstans, ami a viszonylag kicsi mért alakzatok miatt lép fel, nagyobb skálán teljesen elhanyagolható lenne, de a korrektség kedvéért – hogy a képlet pontos legyen – feltüntettük.

Ha ugyanezt egy négyzettel végezzük el (egyszerű hossz helyett az oldalhosszt vizsgálva), a következőre jutunk:



Sajnos papíralapon nem szemléltethető megfelelően, de egységkockahálóval, kockákkal és élhosszal dolgozva a következő összefüggés jön ki:



Levonhatjuk tehát azt a következtetést, hogy a modellünk a következő összefüggés szerint adja meg az alakzat dimenziószámát:

$$N = c \cdot s^D.$$

A logaritmus alapvető azonosságai alapján:

$$\ln N = \ln\left(c \cdot s^D\right),$$
$$\ln N = \ln c + D \cdot \ln s.$$

(Itt c-hez hasonlóan $\ln c$ egy konstans, ezért a jövőben legyen $c' := \ln c$.) Tehát ha a mért adatokat logaritmikus beosztású skálán ábrázoljuk, egy lineáris összefüggést kapunk, ahol D az egyenes meredeksége.

Vegyük észre, hogy a kapott összefüggések midegyikében a kapott meredekség egyenlő a vizsgált alakzatok dimenziószámával (ahogy ε a nullához tart). Ez egyelőre egy jó jel, nézzük meg, hogy a végtelenül önhasonló fraktálokra is alkalmazható-e ez a modell.

3.2. Végtelenül önhasonló fraktálok

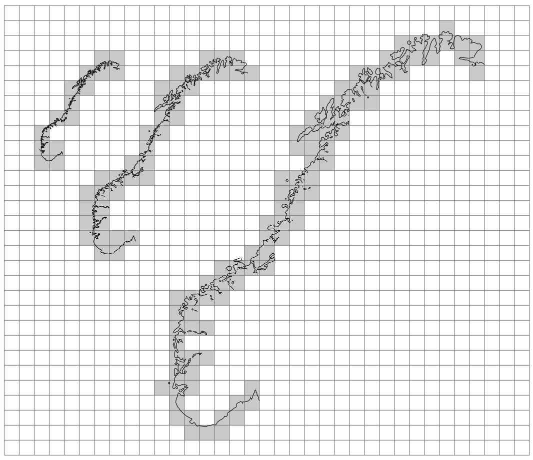
(A következőkben ábrázolt esetek túl kicsik ahhoz, hogy ilyen tiszta összefüggés szülessen belőlük, de a szemléletesség érdekében inkább ezt választottuk. Ahhoz, hogy korrektebb és pontosabb képlethez – és így dimenziószámhoz – jussunk, nagyságrendekkel nagyobbra kellene növelnünk a vizsgált alakzatokat.)

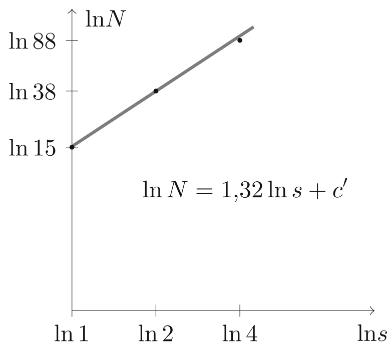
A Sierpiński-háromszöget megvizsgálva az első belső borító középső ábráján látható esetet, hasonlóképpen a Koch-görbét vizsgálva ugyanitt az alul levő ábrán látható esetet kapjuk.

Amint látjuk, a modellünk végtelenül önhasonló fraktálokra is kiválóan működik. A szakirodalom egyébként ezt a módszert angolosan *box counting* módszernek hívja.

3.3. Nem végtelenül önhasonló fraktálok

Ezzel tehát leírtunk egy olyan modellt, ami nem csak ugyanazokat a dimenziószámokat adja eredményül, mint az első, intuitívabb modellünk, hanem bármelyik tetszőleges alakzat dimenziószámát is meg tudja adni. Ennek ismeretében már minden eszközünk megvan, hogy választ kapjunk arra, mi Norvégia partvonalának dimenziószáma. A következő részben a saját mérésünk látható, amit a leírt módszerrel hajtottunk végre: különböző méreteknél megszámoltuk az érintett dobozokat.





A mérésünk szerint tehát Norvégia partvonala egy nagyjából 1,32-dimenziós alakzat. Sajnos ez nem teljesen stimmel, nagyobb skálákon, mások által elvégzett mérések alapján a dimenziószám 1,522 körül van. Ez nem hatalmas gond, hiszen tudtuk, hogy ilyen kis skálán nem várhatunk pontos eredményt, a célunk inkább a módszer szemléltetése volt.

Ez a témakör természetesen még sokkal szélesebb, mint amit ebben a cikkben feldolgoztunk. Nem beszélhetünk úgy a fraktálokról, hogy ne említenénk meg például a Mandelbrot-halmazt. Azonban ez a téma annyira komplex és sokoldalú, hogy ismertetése önmagában is megérdemelne egy hasonló hosszúságú cikket. Ha a kedves olvasónak felkeltette az érdeklődését a cikk, különbözőbbnél különbözőbb irányokba elágazó cikkeket és feladatokat találhat a KöMaL korábbi számaiban. Van köztük fizikafeladat, amely kihasználja a végtelen önhasonlóságot [3], matematikai cikk a lazán kapcsolódó káoszelméletről [4], a fraktálok fényelhajlításának bemutatása [5], és a Mandelbrot-halmaz változatosságának kriptográfiai hasznosításáról szóló cikk is [6].

Források

A cikkben látható ábrák saját készítésűek, a rekurzív képernyőkép kivételével az összes a LaTeX TikZ csomagjával készült (néhány helyen az alacsonyabb szintű, a TikZ alapját alkotó PGF nyelvet használva). A fraktálokat Lindenmayer-rendszerekkel programoztuk.

- PGF:
  `https://mirror.szerverem.hu/ctan/graphics/pgf/base/doc/pgfmanual.pdf`
- TikZ:
  `https://www.bu.edu/math/files/2013/08/tikzpgfmanual.pdf`

- Lindenmayer-rendszerek:
`https://texample.net/tikz/examples/lindenmayer-systems/`

A cikk alapvető gondolatainak oroszlánrésze a következő két videóból származik:

- Vihart – Doodling in Math Class: DRAGONS:
`https://youtu.be/EdyociU35u8`
- 3Blue1Brown – Fractals are typically not self-similar:
`https://youtu.be/gB9n2gHsHN4`

Hivatkozások

[1] **I. 188.** feladat
`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=I188&l=hu`

[2] **S. 41.** feladat
`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=S41&l=hu`

[3] Fehér Szilveszter, Kovács Péter Tamás – *4789. fizika feladat*
`http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=54239`

[4] Simonovits András – *Egyensúly, ciklus és káosz dinamikus rendszerekben*
`http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=201845`

[5] *Fényelhajlás fraktálon*
`http://komal.elte.hu/cikkek/szines/fenyelhajlas/feny.h.shtml`

[6] Genda Attila – *Titkosítás fraktálok segítségével*
`http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=201755`

Szép Emma, Varga Pál Patrik
Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium végzős diákjai

Megoldásvázlatok a 2021/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben* $A(-1;4)$, $B(7;-2)$ *és* $C(5;8)$.

a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a C ponton és a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. (*4 pont*)

b) Számítsuk ki, hogy az y tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A keresett egyenes a C ponton átmenő súlyvonal egyenese. Az AB szakasz felezőpontja: $F(3;1)$. A súlyvonal egyenesének (egy) normálvektora: $\mathbf{n}(7;-2)$, egyenlete $7x-2y=19$.

b) *I. megoldás.* Legyen a keresett pont $P(0;y)$. Ekkor $\overrightarrow{PA}(-1;4-y)$ és $\overrightarrow{PB}(7;-2-y)$. A $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha skaláris szorzatuk 0.

$$(-1)\cdot 7+(4-y)\cdot(-2-y)=0,$$

$$y^2-2y-15=0,$$

$$y_1=5 \quad \text{és} \quad y_2=-3.$$

Tehát $P_1(0;5)$ és $P_2(0;-3)$.

II. megoldás. (Felhasználva az *a*) feladatban kiszámított F pont koordinátáit vagy az ebben a feladatban kiszámított szakasz felezőpontjának koordinátáit.)

Mivel az AB szakasz Thalész-köre azon pontok halmaza, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik, így ennek a körnek és az y tengelynek a metszéspontjai a keresett pontok.

A kör (középpontja: $F(3;1)$,) sugara:

$$r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(7+1)^2+\big((-2)-4\big)^2}}{2}=5.$$

A kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-1)^2=25$. A kör y tengellyel való metszéspontját az $x=0$ helyettesítéssel kapjuk, így $y^2-2y-15=0$, $y_1=5$ és $y_2=-3$.

Tehát $P_1(0;5)$ és $P_2(0;-3)$.

2. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$|x-2|^{2x^2-11x+14}=1. \qquad (6\ pont)$$

b) *Oldjuk meg az* 1*-nél nagyobb egész számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$7\cdot\binom{n}{2}=2\cdot\binom{n+2}{3}. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a*) Egy nemnegatív alapú hatvány értéke csak akkor lehet 1, ha alapja 1 vagy kitevője 0 és alapja nem 0.

Ha $x\geqslant 2$, akkor $x-2=1$, ahonnan $x=3$.

Ha $x<2$, akkor $-x+2=1$, ahonnan $x=1$.

Ha $2x^2-11x+14=0$, akkor $x_1=\frac{7}{2}$ és $x_2=2$.

Mivel 0 nem lehet a hatvány alapja, ezért a 2 nem megoldás (a többi érték viszont igen, mert megfelelnek a feltételeknek). Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az 1, a 3 és a $\frac{7}{2}$ gyöke az eredeti egyenletnek.

Megjegyzés. Ha a megoldó mind a négy gyököt megoldásnak tekinti, akkor megoldására legfeljebb 5 pontot kapjon.

b)

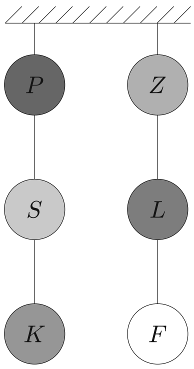
$$7\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}=2\cdot\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{3\cdot 2\cdot 1}.$$

(Mivel $n > 1$, így mindkét oldalt n-nel osztva:)

$$7 \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{3}.$$

Nullára rendezve: $2n^2 - 15n + 25 = 0$, $n_1 = 5$ és $n_2 = \frac{5}{2}$. Az $\frac{5}{2}$ nem egész szám, így az egyetlen megoldás csak az 5 lehet.

Ellenőrzés: $7 \cdot 10 = 2 \cdot 35 = 70$ valóban.



3. *Egy céllövöldében az ábrán látható módon felfüggesztettek hat különböző színű lufit. Azt a szabályt vezették be, hogy csak arra a lufira szabad lőni, amelyik a két felfüggesztés bármelyikében éppen legalul van.*

a) Hány különböző sorrendben lőhető le a fenti szabály szerint a hat lufi? *(5 pont)*

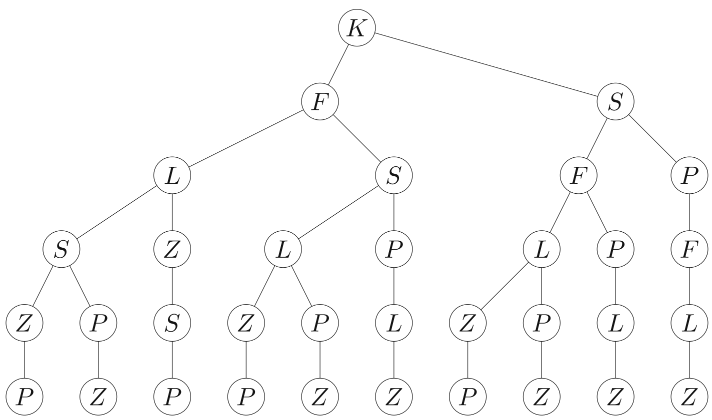
Ebben a céllövöldében egy nyolcfős társaság szórakozott, ahol az első öt személy 3, 1, 5, 2 *és* 3 *lufit talált el.*

b) Hány lufit talált el a maradék három személy külön-külön, ha a társaság találatainak átlaga 3, *mediánja* 2,5 *lett?* *(5 pont)*

Nagyszámú megfigyelés alapján megállapították, hogy 0,4 *annak a valószínűsége, hogy egy céllövő elsőre eltalálja a kiszemelt lufit.*

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a céllövő 6 *lövésből legalább* 5 *lufit eltalál?* *(4 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Jelölje B, ha a bal oldali felfüggesztés legalsó lufiját, J pedig, ha a jobb oldalit lövik le. Mivel mindegyik felfüggesztésen 3 lufi van, ezért háromszor lövünk balra és háromszor jobbra, így egy adott sorrendet 3 db B és 3 db J betű valamilyen jelsorozatával írhatunk le. Ezt tekinthetjük 6 elem ismétléses permutációjának, amelyben 3-3 elem megegyezik, így a keresett sorrendek száma: $\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$.



II. megoldás. Ha az első találat a kék lufi, akkor a lehetséges folytatást az *ábrán* követhetjük végig.

Ebben az esetben 10-féle lövési sorrend alakulhat ki.

Ha az első találat a fehér lufi, akkor (a K és F, az S és L, illetve a P és Z betűk cseréje miatt) ugyancsak 10-féle lövési sorrend keletkezik.

Összesen tehát $(10 + 10 =)$20-féle különböző lövési sorrend lehetséges.

Megjegyzés. Ha a megoldó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

b) I. megoldás. Jelölje az ismeretlen találatokat x, y és z (ahol $x \leqslant y \leqslant z \leqslant 6$ és $x, y, z \in \mathbb{N}$).

Ha a találatok átlaga 3, akkor $x + y + z = 10$.

Ha az első öt találat (nem csökkenő sorrendben) 1, 2, 3, 3, 5, akkor a következő esetek lehetségesek:

x	0	0	1	1	2	2	2	3
y	4	5	3	4	2	3	4	3
z	6	5	6	5	6	5	4	4

A mediánra vonatkozó feltétel miatt nem lehetséges a 0, 4, 6, a 0, 5, 5, az 1, 3, 6, az 1, 4, 5, a 2, 3, 5, a 2, 4, 4 és a 3, 3, 4 eset (ekkor a medián 3).

Tehát a maradék három személy egyike 6, a másik kettő pedig 2-2 találatot ért el.

II. megoldás. A találatokat nem csökkenő sorrendbe rendezve a medián miatt a 4. és 5. találat csak az 1 és 4 vagy a 2 és 3 lehet. 1 és 4 nem lehet, mert ekkor nem lenne 3-as találat.

Innentől mutatunk két megoldási módot.

1. mód: Ha a 4. és 5. találat 2 és 3, akkor az 1. találat lehet az 1, a 6. pedig a 3, így a 7. vagy 8. találat lehet 5. A 2. és 3. találat legfeljebb 2. Ha a 8. találat lenne az 5, akkor a 7. találat 3, 4 vagy 5 lehet. De ekkor a 2. és 3. találatok összege rendre csak 7, 6 vagy 5 lehetne, ami 1 és 2 találatokból nem lehetséges.

Tehát a 8. találat csak 6, a 2. és 3. találat csak 2 lehet, így a maradék három személy egyike 6, a másik kettő pedig 2-2 találatot ért el.

2. mód: A hiányzó 3 szám összege 10, hiszen az átlag miatt a 8 szám összege 24, a megadottaké pedig 14. Mivel két összeadandó kisebb 2,5-nél, egy pedig nagyobb, és valamennyi 0 és 6 közötti egész, ezért csak a $2 + 2 + 6 = 10$ lehetőség marad. Tehát a maradék három személy egyike 6, a másik kettő pedig 2-2 találatot ért el.

Megjegyzés. Ha a megoldó indoklás nélkül megadja a helyes megoldást, akkor 2 pontot kapjon.

c) Annak a valószínűsége, hogy a céllövő elsőre nem találja el a kiszemelt lufit 0,6. Annak a valószínűsége, hogy 5 lufit talál el:

$$\binom{6}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^1 \approx 0{,}037.$$

Annak a valószínűsége, hogy 6 lufit talál el: $0{,}4^6 \approx 0{,}004$. A keresett valószínűség ezek összege: $(0{,}037 + 0{,}004 \approx)0{,}041$.

4. *Egy mértani sorozat első három tagja ebben a sorrendben* $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$ *és* $2\cos^2\alpha$. *Ennek a sorozatnak nem tagja a nulla és hányadosa negatív szám.*

a) Számítsuk ki a sorozat második tagjának pontos értékét. (*6 pont*)

Az $\{a_n\}$ *sorozatot a következőképpen adtuk meg:*

$$a_n = \begin{cases} 3n-2, & \textit{ha } n \textit{ páros,} \\ 0{,}1\cdot(-1{,}1)^n, & \textit{ha } n \textit{ páratlan.} \end{cases}$$

b) Számítsuk ki a sorozat első 101 *tagjának összegét. Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A mértani sorozat definíciója szerint:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha} \quad (\text{ahol } \sin\alpha \neq 0 \text{ és } \cos\alpha \neq 0).$$

Mivel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, ezért az egyenlet bal oldalát $\sin\alpha$-val, jobb oldalát $2\cos\alpha$-val egyszerűsítve: $2\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Mivel $\cos\alpha \neq 0$, így a $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ egyenletet kapjuk.

Tudjuk, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{vagy} \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel a hányados negatív szám, ezért a sorozat második tagja csak $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lehet.

II. megoldás. A mértani sorozat definíciója szerint:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha} \quad (\text{ahol } \sin\alpha \neq 0 \text{ és } \cos\alpha \neq 0).$$

Mivel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, ezért az egyenlet bal oldalát $\sin\alpha$-val, jobb oldalát $2\cos\alpha$-val egyszerűsítve, majd a nevezővel szorozva:

$$\sin 2\alpha = \cos\alpha.$$

Mivel tetszőleges α szög esetén

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

a következő egyenletet kapjuk:

$$\sin 2\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Az előbbi egyenletet megoldva:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \quad \text{vagy} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, \quad \text{ahol } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Mivel a harmadik tag pozitív és a hányados negatív, ezért az első tag csak $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ lehet. Mivel a hányados negatív szám, ezért a sorozat második tagja csak $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lehet.

b) Mivel $a_{2k} = 6k - 2$ és $a_{2k+2} = 6k + 4$, így $a_{2k+2} - a_{2k} = 6$, ezért a páros sorszámú tagok (minden $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén) számtani sorozatot alkotnak. Ennek a számtani sorozatnak az első tagja 4, differenciája 6.

Mivel $a_{2k+1} = 0{,}1 \cdot (-1{,}1)^{2k+1}$ és $a_{2k-1} = 0{,}1 \cdot (-1{,}1)^{2k-1}$, így

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = (-1{,}1)^2 = 1{,}21,$$

ezért a páratlan sorszámú tagok (minden $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén) mértani sorozatot alkotnak.

Ennek a mértani sorozatnak az első tagja $-0{,}11$, hányadosa 1,21. Az első 101 tag között 50 tagja van a számtani sorozatnak és 51 tagja a mértani sorozatnak.

A számtani sorozat 50 tagjának összege:

$$S_{50} = \frac{8 + 49 \cdot 6}{2} \cdot 50 = 7550.$$

A mértani sorozat 51 tagjának összege:

$$S_{51} = (-0{,}11) \cdot \frac{1{,}21^{51} - 1}{1{,}21 - 1} \approx -8733{,}76.$$

(Mivel $S_{50} + S_{51} \approx -1183{,}76$ így) a keresett összeg egészre kerekítve -1184.

II. rész

5. *Az a és b pozitív számok számtani közepe 4, mértani (geometriai) közepe 2.*

a) Számítsuk ki a két szám négyzetes közepének pontos értékét. (*5 pont*)

Az x tengely, az $x = p$, az $x = q$ és az $y = \frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe által határolt síkidom területe megegyezik az x tengely, az $x = q$, az $x = r$ és az $y = \frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe által határolt síkidom területével, ahol $p, q, r > 0$ és $p < q < r$.

b) Igazoljuk, hogy a q szám a p és r számok harmonikus közepe. (*5 pont*)

Az ABC háromszög A csúcsánál lévő belső szögének nagysága 70°, B csúcsánál lévő belső szögének nagysága pedig 35°. Jelölje D a BC oldal C-n túli meghosszabbításának azt a pontját, amelyre a $DAC\sphericalangle = 35°$.

c) Igazoljuk, hogy az AD szakasz hossza a BD és CD szakaszok hosszának mértani (geometriai) közepe. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A feladat szövege alapján:

$$a + b = 8,$$
$$ab = 4.$$

Az első egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 64.$$

Mivel $ab=4$, így $a^2+b^2=56$.

A két szám négyzetes közepe: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{28}\,$.

II. megoldás. A feladat szövege alapján:

$$a+b=8,$$
$$ab=4.$$

Az első egyenletből kifejezve b-t, majd behelyettesítve a második egyenletbe: $a(8-a)=4$. Rendezve és megoldva:

$$a_1=4+2\sqrt{3} \quad \text{és} \quad a_2=4-2\sqrt{3}\,,$$
$$b_1=4-2\sqrt{3} \quad \text{és} \quad b_2=4+2\sqrt{3}\,.$$

A két szám négyzetes közepe:

$$\sqrt{\frac{\left(4+2\sqrt{3}\,\right)^2+\left(4-2\sqrt{3}\,\right)^2}{2}}=\sqrt{28}\,.$$

Megjegyzés. Ha a megoldó a négyzetes közép értékét közelítő értékkel adja meg, akkor megoldására 4 pontot kapjon.

b) Tekintsük a megadott görbének azt a részét, amely a pozitív valós számok halmazán értelmezett $g(x)=\frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja. A g függvény primitív függvényei (határozatlan integrálja):

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+c.$$

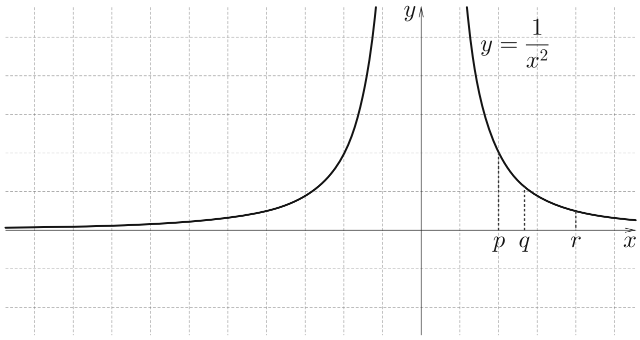
A g függvény minden függvényértéke pozitív, ezért a $[p;q]$, illetve a $[q;r]$ intervallumon a görbe alatti terület:

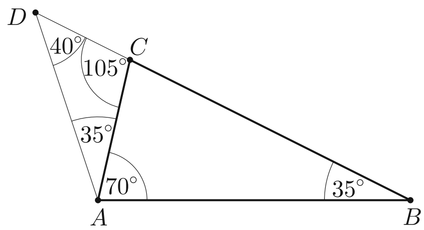
$$\int\limits_p^q \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x}+c\right]_p^q=-\frac{1}{q}+\frac{1}{p} \quad \text{és} \quad \int\limits_q^r \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x}+c\right]_q^r=-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}.$$

A feltétel szerint: $-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}$, ahonnan q-t kifejezve:

$$q=\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{r}},$$

ami valóban a p és r számok harmonikus közepe.





c) Az ACD háromszög ismeretlen szögei 40° és 105°.

Az ABD háromszög hasonló az CAD háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők. A megfelelő oldalak arányát felírva:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}.$$

Ebből AD-t kifejezve: $AD^2 = BD \cdot CD$, ami valóban a BD és CD szakaszok hosszának mértani (geometriai) közepe.

6. *Egy n pontú egyszerű gráf minden pontjának* 15 *a fokszáma. Komplementer (kiegészítő) gráfjának* 18 *éle van. (A G gráf komplementere az a gráf, amelynek pontjai megegyeznek G pontjaival, és amelyben két pont pontosan akkor van összekötve éllel, ha G-ben nincs összekötve.)*

a) Hány pontú ez a gráf? (*6 pont*)

Egy 18 *pontú teljes gráf éleit a piros, fehér és zöld színekkel színeztük ki úgy, hogy a fehér élek száma kétszerese a piros élek számának, és a három különböző színű él számának a szorzata a legnagyobb.*

b) Hány zöld éle van az így kiszínezett gráfnak? (*6 pont*)

Internetes ismeretségi hálózatokban, mint például a Facebook vagy a LinkedIn, két személy között akkor jön létre a kapcsolat, ha azt mindkét fél visszaigazolta. Ilyen módon bármely két személy között vagy egyáltalán nincs kapcsolat, vagy pontosan egy kapcsolat létezik.

Egy 18 *főből álló mintában* 16 *résztvevőnek* 2, *a többi* 2 *résztvevőnek pedig* 1 *egymás közötti kapcsolata van. Azt is tudjuk továbbá, hogy jelenleg bármely két személy között létezik közvetlen vagy közvetett kapcsolat, azaz az ismeretségeket követve bármelyik résztvevőtől bármelyik másikig el tudunk jutni a hálózaton belül.*

c) Mutassuk meg, hogy a már létező kapcsolatok közül bármelyiket megszüntetve a hálózat szétesik, azaz biztosan lesz legalább két olyan személy, akik között sem közvetlen, sem közvetett kapcsolat nem marad. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az n pontú egyszerű gráfban a fokszámok összege $15n$. A komplementer gráf éleinek száma 18, így ebben a gráfban a fokszámok összege $2\cdot 18=36$.

Az egyszerű és a komplementer gráf fokszámainak összege egyenlő egy teljes gráf fokszámainak összegével, azaz $n(n-1)=15n+36$. Ebből $n^2-16n-36=0$. Ennek pozitív gyöke a 18, (negatív gyöke a -2), tehát a gráfnak 18 pontja van.

Ellenőrzés a szöveg alapján: A 18 pontú egyszerű gráf fokszámainak összege 270, a kiegészítő gráfé 36, melyek összege valóban 306. Vagy a 18 pontú egyszerű gráfnak 135 éle van, a kiegészítő gráfjának 18, melyek összege 153, ami valóban egy 18 pontú teljes gráf éleinek száma.

b) *I. megoldás.* A 18 pontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{18}{2}=153$. Jelölje a piros élek számát p, ekkor a fehér élek száma $2p$, a zöldeké $153-3p$, így

$$f(p)=p\cdot 2p\cdot(153-3p)=-6p^3+306p^2$$

(ahol $0\leqslant p\leqslant 51$ és p egész szám).

Terjesszük ki az f függvény értelmezési tartományát a $[0;\,51]$ zárt intervallumra. Ekkor az $f(p)=-6p^3+306p^2$ függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.

$$f'(p)=-18p^2+612p.$$

$$f'(p)=0,\quad \text{ha}\quad p=0\quad \text{vagy}\quad p=34.$$

A $p=0$ helyen f' negatívból pozitívba, a $p=34$ helyen pozitívból negatívba megy át, ezért a f-nek $p=0$-ban minimuma, $p=34$-ben maximuma van.

Az így kiszínezett gráfnak 51 darab zöld éle van.

b) *II. megoldás.* A 18 pontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{18}{2}=153$. Jelölje a piros élek számát p, ekkor a fehér élek száma $2p$, a zöldeké $153-3p$, így

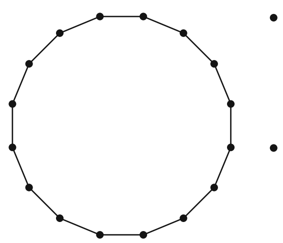
$$f(p)=p\cdot 2p\cdot(153-3p).$$

Az $f(p)$ kifejezés pontosan akkor maximális, ha a $\frac{p}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot(51-p)$ szorzat maximális. A számtani és mértani közép közti összefüggés alapján:

$$\sqrt[3]{\frac{p}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot(51-p)}\leqslant\frac{\frac{p}{2}+\frac{p}{2}+(51-p)}{3}=17,$$

ahol egyenlőség csak $\frac{p}{2}=51-p$, azaz $p=34$ esetén áll fenn.

Az így kiszínezett gráfnak 51 darab zöld éle van.



c) *I. megoldás.* Ha bármelyik 1 kapcsolattal rendelkező személy kapcsolatát megszüntetjük, akkor ő teljesen el lesz szigetelve a többiektől, ekkor ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Az a 16 fő, akiknek 2 kapcsolata van, nem ismerheti „körbe" egymást, mert ekkor az 1 kapcsolattal bíró személyek nem tudnának hová csatlakozni.

Ezt figyelembe véve az egyetlen lehetséges megoldás a láncszerű hálózat.

Ebben pedig csakugyan igaz, hogy bármelyik kapcsolatot megszüntetve a hálózat szétesik.

II. megoldás. Ha 18 főből álló összefüggő hálózatot szeretnénk építeni, akkor a legelső embertől eltekintve minden új belépőnek legalább 1 kapcsolattal csatlakoznia kell a már meglévő hálózathoz. Ez minimálisan 17 kapcsolatot jelent.

•——•——• · · · •——•

Jelenleg pontosan $\frac{16\cdot 2+2}{2}=17$ kapcsolat található a hálózatban. Ez az összefüggő hálózathoz szükséges minimális érték, ha ezt csökkentjük, a hálózat tényleg szétesik.

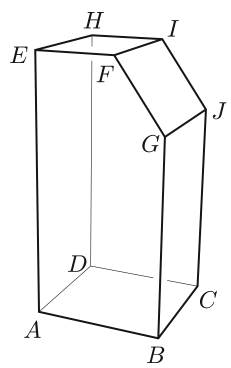
Megjegyzés. Ha a megoldó a kapcsolatok és a személyek száma közötti viszonyról felismeri, hogy fagráfról van szó, és hivatkozik a tanult tételre, mely szerint ez a minimális élű összefüggő gráf, akkor megoldására teljes pontszámot kapjon.

7. *Az* 1. ábrán *látható kézfertőtlenítőt tartalmazó flakon azon részét modellezzük a* 2. ábrán, *ameddig megtöltik fertőtlenítőszerrel. Ez a töltési rész úgy keletkezett, hogy az $ABCD$ négyzet alapú egyenes hasábból a megadott módon levágtunk egy testet. Az így keletkezett flakon belső méretei:* $AB=6{,}5$ cm, $AE=13{,}5$ cm, $EF=4$ cm *és* $BG=10$ cm. *(A flakonban lévő adagoló pumpa által elfoglalt térrészt nem vesszük figyelembe.)*

a) Számítsuk ki a töltési rész térfogatát. A választ egész ml-re kerekítve adjuk meg. (*5 pont*)

A fertőtlenítő 96% hatóanyagot tartalmaz, azaz 96%-os töménységű. Egy felhasználó elhasználja a flakonban lévő mennyiség 1%-át, majd az elhasznált mennyiség helyére ugyanannyi vizet önt. (Feltételezzük, hogy a hatóanyag és a víz egyenletesen keveredik.) Tudjuk, hogy a fertőtlenítőszer még 50%-os töménységben is elfogadható hatásfokkal véd.

1. ábra



2. ábra

b) Legfeljebb hányszor lehet a fenti műveletet megismételni, ha azt szeretnénk, hogy a fertőtlenítőszer továbbra is elfogadhatóan hatásos legyen? (*5 pont*)

Az alábbi táblázat egy vállalkozásban dolgozók koreloszlását mutatja, valamint az adott korcsoportra vonatkozó tünetmentesen fertőző *tulajdonság előfordulási valószínűségét a járvány egy adott szakaszában.*

Korcsoport	**20–30 éves**	**31–40 éves**	**41–50 éves**	**51–65 éves**
Dolgozók száma	20	40	30	10
Tünetmentesen fertőző valószínűség	0,4	0,3	0,2	0,1

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha találkozunk két dolgozóval, akkor lesz köztük legalább egy fertőző? A választ egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.
(*6 pont*)

Megoldás. *a*) A négyzet alapú hasáb térfogata:

$$V_1 = 6{,}5^2 \cdot 13{,}5 = 570{,}375 \ (\mathrm{cm}^3).$$

A levágott test olyan (derékszögű) háromszög alapú (egyenes) hasáb, melynek alapélei 2,5 cm és 3,5 cm hosszúak, magassága pedig 6,5 cm. A levágott test térfogata:

$$V_2 = \frac{2{,}5 \cdot 3{,}5}{2} \cdot 6{,}5 = 28{,}4375 \ (\mathrm{cm}^3).$$

A töltési rész térfogata a négyzet alapú és a háromszög alapú hasáb térfogatának különbsége:

$$V_1 - V_2 = 570{,}375 - 28{,}4375 = 541{,}9375 \ (\mathrm{cm}^3),$$

ami kb. 542 (ml).

b) Minden töltésnél 1%-kal csökken a töménység, ezért az *n*. töltés után $0{,}96 \cdot 0{,}99^n$ lesz a töménység. Megoldandó tehát a $0{,}96 \cdot 0{,}99^n \geqslant 0{,}5$, azaz a

$$0{,}99^n \geqslant \frac{0{,}5}{0{,}96}$$

egyenlőtlenség. Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve és a logaritmus megfelelő azonosságát alkalmazva:

$$n \cdot \lg 0{,}99 \geqslant \lg \frac{0{,}5}{0{,}96}.$$

Ebből $n \leqslant 64{,}9$. Így az újratöltést legfeljebb 64-szer lehet megismételni.

c) *I. megoldás.* A tünetmentesen fertőző alkalmazottak száma az egyes korcsoportok létszámának és a hozzájuk tartozó előfordulási valószínűségeknek a szorzata, azaz

$$20 \cdot 0{,}4 + 40 \cdot 0{,}3 + 30 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}1 = 27.$$

100-ból 2 dolgozót összesen $\binom{100}{2}$(= 4950)-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma).

27 fertőzöttből és 73 nem fertőzöttből 1 fertőzőt és 1 nem fertőzőt $\binom{27}{1} \cdot \binom{73}{1}$ (= 1971)-féleképpen, 2 fertőzőt $\binom{27}{2}$(= 351)-féleképpen választhatunk ki (a feladat megoldásának szempontjából kedvező esetek száma). A kérdezett valószínűség (a kedvező esetek számának és az összes eset számának a hányadosa:)

$$\frac{1971 + 351}{4950} = \frac{2322}{4950} \approx 0{,}5.$$

II. megoldás. A tünetmentesen fertőző alkalmazottak száma az egyes korcsoportok létszámának és a hozzájuk tartozó előfordulási valószínűségeknek a szorzata, azaz $20\cdot 0{,}4+40\cdot 0{,}3+30\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}1=27$. A kérdezett valószínűséget megkapjuk, ha a biztos esemény valószínűségéből kivonjuk annak a valószínűségét, hogy a két alkalmazott egyike sem fertőző.

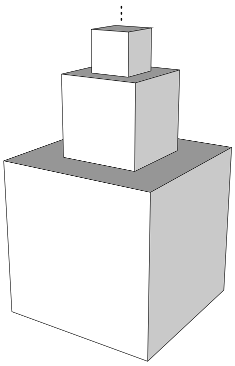
100-ból 2 dolgozót összesen $\binom{100}{2}$(= 4950)-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma). 73 nem fertőzöttből 2 nem fertőzőt $\binom{73}{2}$(= 2628)-féleképpen választhatunk ki (a feladat megoldásának szempontjából kedvező esetek száma).

Annak a valószínűsége, hogy a két alkalmazott egyike sem fertőző: $\frac{2628}{4950}$. A kérdezett valószínűség:

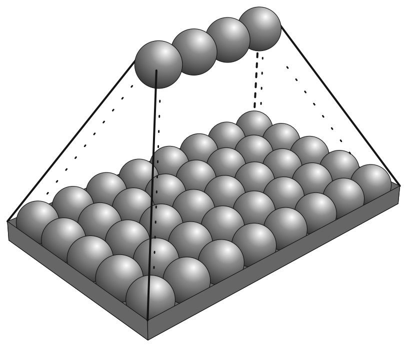
$$1-\frac{2628}{4950}=\frac{2322}{4950}\approx 0{,}5.$$

8. *Egy társasjátékban a játékosok különböző méretű kockákból „tornyot" építenek* (*lásd* 3. ábra). *A legalsó kocka éle* 16 cm, *a rárakott kockáké* 8 cm *és* 4 cm. *Az építést tovább folytatva minden újonnan felrakott kocka élhossza a közvetlenül előtte felrakott kocka élhosszának a fele.*

a) Mekkora lenne a keletkező „torony" felszíne, ha az építést végtelen sokáig lehetne folytatni? (A felszínhez a legalsó szint alaplapjának területét is vegyük figyelembe.) (*6 pont*)



3. ábra



4. ábra

Egy másik játékban egyforma méretű gömböket rakunk az ábrán látható átlátszó műanyag tartóba. A tartó legalján, annak oldalaival párhuzamosan, 5 *sorban soronként* 8 *gömb érintkezik egymással, a vízszintes talajjal és a szélsők a tartóval is. Az így elhelyezett gömbök közötti „gödrökbe" újabb gömböket teszünk, ezáltal egy újabb szint jön létre. Ezt az eljárást folytatva újabb és újabb szintek keletkeznek, majd kialakul egy háztető alakú „prizma"* (*lásd* 4. ábra). *Tekintsük az így keletkezett legfelső szintet elsőnek, és lefelé haladva sorrendben a többit második, harmadik, ..., és n. szintnek. Ekkor megfigyelhető, hogy az n. szinten n^2+3n darab gömb lesz.*

b) Számítsuk ki, hogy hányadik szinten fejeződik be az eljárás, ha a „prizma" építését képzeletben lefelé csak addig folytatjuk, amíg a legalsó szinten legalább 2021 *darab gömb lesz.* (*4 pont*) *c) Igazoljuk, hogy ha az n. szinten pontosan n^2+3n darab gömb van, akkor az n szintű prizmában összesen $\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ gömb van.* *(6 pont)*

Megoldás. *a*) Az építmény oldallapjainak területösszege:

$$S = 4\cdot(16^2+8^2+4^2+\ldots).$$

A zárójelben egy végtelen mértani sor összege szerepel, ahol $q=\frac{1}{4}$.

Mivel $|q|<1$, a mértani sor konvergens, így az összegképletet használva:

$$S = 4\cdot\frac{256}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4096}{3}\ (\approx 1365{,}33)\ (\mathrm{cm}^2).$$

Az alaplap és a fedőlapok területösszege:

$$S' = 16^2+(16^2-8^2)+(8^2-4^2)+\ldots = 2\cdot 16^2 = 512\ (\mathrm{cm}^2).$$

Tehát az építmény felszíne:

$$\left(\frac{4096}{3}+512=\right)\frac{5632}{3}\approx 1877{,}33\ \mathrm{cm}^2.$$

b) Az $n^2+3n\geqslant 2021$ egyenlőtlenség legkisebb pozitív egész megoldását keressük. Az $n^2+3n-2021=0$ egyenlet gyökei: $n_1\approx 43{,}48$ és $n_2\approx -46{,}48$.

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, ezért az egyenlőtlenség megoldása: $n\leqslant -46{,}48$ vagy $n\geqslant 43{,}48$.

Tehát a 44. szinten fejeződik be az eljárás.

Megjegyzés. Ha a megoldó további indoklás nélkül, próbálgatással találja meg az $n=44$ megoldást, akkor 1 pontot kapjon.

c) *I. megoldás.* Teljes indukcióval bizonyítunk.

$n=1$ esetén az állítás igaz, mert

$$a_1 = 1^2+3\cdot 1 = 4 \quad \text{és} \quad S_1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+5)}{3} = 4.$$

Ha valamely $k\in\mathbf{N}^+$ esetén igaz az állítás, akkor azt kell belátnunk, hogy $k+1$ esetén is igaz, vagyis

$$\frac{k\cdot(k+1)\cdot(k+5)}{3}+(k+1)^2+3(k+1) = \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+6)}{3}.$$

Mindkét oldalt $(k+1)$-gyel osztva $(k\neq -1)$:

$$\frac{k\cdot(k+5)}{3}+(k+1)+3 = \frac{(k+2)\cdot(k+6)}{3}.$$

Mindkét oldalt 3-mal szorozva:

$$k^2+5k+3k+3+9 = k^2+8k+12.$$

Az összevonások után:

$$k^2 + 8k + 12 = k^2 + 8k + 12.$$

Ez azonosság, ami minden $k \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti állításunk is igaz.

II. megoldás. Az összeget az egyes tagok segítségével felírva:

$$S_n = (1^2 + 3 \cdot 1) + (2^2 + 3 \cdot 2) + \ldots + (n^2 + 3 \cdot n).$$

A jobb oldali összeg tagjait csoportosítva:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n.$$

Ezek alapján:

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{3} + 3\right) =$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+5)}{3},$$

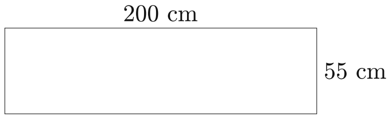
ami a bizonyítandó állítás.

9. *Nyári szünetben a 4 éves Peti és a 10 éves Kati nem járt óvodába, illetve iskolába. Napközben sokféle játékot játszottak, de a legnépszerűbb a céltáblára dobálás volt. A céltábla előtt bizonyos távolságra egy csíkot ragasztottak a padlóra, ezzel jelölve meg azt a helyet, ahonnan dobni lehet. Napközben, ha a család bármelyik tagja arra jár, véletlenszerűen dob a táblára egy „dobónyíllal”. A céltáblájukon mind a négy körgyűrű szélessége a középen elhelyezkedő kis kör sugarával egyezik meg, és azonos nagyságú területet ugyanakkora valószínűséggel találnak el. Ha valaki eltalál egy körgyűrűt vagy a belső kört, akkor annyi pontot szerez, amekkora szám van arra a részre írva. Ha valaki a körvonalat találja el, akkor a nagyobb pontszám jár neki.*

a) Mennyi a szerzett pontszámok várható értéke, ha nagyon sok dobást hajtanak végre? (*5 pont*)

Kati lemásolta a céltábla koncentrikus köreit egy papírra. Hatféle színezője volt. A középső kis körlapot és a négy körgyűrűt úgy színezte ki, hogy a kis körlap és a külső körgyűrű azonos színű, de bármelyik két szomszédos rész különböző színű lett.

b) Határozzuk meg a különböző színezések számát, ha egy színezéshez legalább 3 színt használt. (*7 pont*)



Az óvodában a 29 *ballagó gyerek mindegyike kapott egy* 10 cm *sugarú körlapot, amire búcsúajándékként tetszőleges rajzot készíthettek. Az óvodapedagógusok úgy rakták ki az alkotásokat egy* 200 cm *széles és* 55 cm *magas parafalemezre, hogy bármelyik két körlap még részben sem fedte egymást, és egyetlen körlap se nyúlt túl a lemezen.*

c) Adjuk meg a körlapok egy ilyen lehetséges elhelyezését. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyes részek eltalálásának valószínűségét a megfelelő részek és a céltábla területének arányával számíthatjuk ki. Jelölje r a legkisebb kör sugarát, ekkor a céltábla sugara $5r$. A részek területe növekvő sorrendben:

$$r^2\pi, \quad 3r^2\pi, \quad 5r^2\pi, \quad 7r^2\pi \quad \text{és} \quad 9r^2\pi.$$

Az egyes valószínűségek növekvő sorrendben:

$$p_1 = \frac{1}{25}, \quad p_2 = \frac{3}{25}, \quad p_3 = \frac{5}{25}, \quad p_4 = \frac{7}{25} \quad \text{és} \quad p_5 = \frac{9}{25}.$$

A szerzett pontszámok várható értéke:

$$100 \cdot \frac{1}{25} + 90 \cdot \frac{3}{25} + 80 \cdot \frac{5}{25} + 70 \cdot \frac{7}{25} + 60 \cdot \frac{9}{25} == 72.$$

b) (Esetszétválasztás a színek száma szerint.)

Ha Kati pontosan 3 *színt használ:* Jelölje a három színt A, B, C, a legbelső körlemezt és a körgyűrűket kifelé haladva sorban 1., 2., 3., 4. és 5. Ha a legbelső körlemez (1.) és a külső körgyűrű (5.) A színű, akkor a közöttük lévő 3 körgyűrű (2., 3., 4.) közül a középső vagy A, vagy nem A színű.

Ha a középső körgyűrű (3.) A színű, akkor a két szomszédja sorrendben BC vagy CB.

Ha a középső körgyűrű (3.) nem A színű, akkor a három belső körgyűrű CBC vagy BCB színű lehet csak.

Tehát ha a két szélső A színű, akkor 4 lehetőség van.

A szélső körgyűrűk színe 3-féle lehet, így három adott színnel $3 \cdot 4 = 12$-féleképpen színezhetők ki. Mivel Kati a 6 színből hármat $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen választhat ki, ezért három színnel összesen $20 \cdot 12 = 240$-féle színezés lehetséges.

Ha Kati pontosan 4 *színt használ:* Jelölje a négy színt A, B, C és D.

Ha a legbelső körlemez (1.) és a külső körgyűrű (5.) A színű, akkor a középső körgyűrű (3.) nem lehet A színű (mert 4 színt kell felhasználni), így a 2., 3. és 4. körgyűrű $3! = 6$-féleképpen színezhető ki.

A szélső körgyűrűk színe 4-féle lehet, így négy adott színnel $4 \cdot 6 = 24$-féleképpen színezhetők ki. Mivel Kati a 6 színből négyet $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen választhat ki, ezért négy színnel összesen $24 \cdot 15 = 360$-féle színezés lehetséges.

Ha Kati pontosan 5 *vagy* 6 *színt használ:* 5 vagy 6 színnel a megadott feltételek mellett nem színezhető ki az ábra, mert ekkor 5 mezőt kell színezni úgy, hogy ezekből kettő azonos színű legyen, így a maradék három helyre legfeljebb három szín használható.

Tehát összesen $(240+360=)600$ lehetőség van a színezésre.

c) Az alsó sorban 10 egymást érintő körlap helyezhető el. Ha a második sorba is 10 körlapot helyezünk el, akkor ezek fölé a harmadik sorba már csak szomszédos köröket érintő körlapok férnének el. Ekkor a három egymást érintő kör középpontja által alkotott szabályos háromszög oldalának hossza 20 cm, magassága $10\sqrt{3}(\approx 17{,}32)$ cm lesz. Így a három sorból álló sáv szélessége $10+10\sqrt{3}+30= =40+10\sqrt{3}\approx 57{,}32>55$ cm lenne, tehát így nem fér el a 29 körlap.

Ha az alsó sor fölé úgy helyezünk el köröket, hogy bármely három egymást érintő kör középpontja 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget alkosson, akkor a második sorban 9 kör fér el. Ekkor a fölötte lévő harmadik sorba ismét 10 kör helyezhető el, ha a három sor magassága 55 cm-nél nem nagyobb.

Tekintsük azt a szabályos háromszöget, amelynek egyik oldalának végpontjai az alsó sorban az első és a harmadik körök középpontja. Ekkor ennek a háromszögnek az oldala 40 cm, magassága $20\sqrt{3}\approx 34{,}64$ cm hosszú lesz.

Így a három sorból álló sáv szélessége: $20\sqrt{3}+20\approx 54{,}64<55$ cm, tehát az elrendezés létezik, és eleget tesz a feltételeknek.

Megjegyzések. Ha a megoldó megad egy helyes elrendezést, de annak létezését nem bizonyítja, akkor legfeljebb 2 pontot kapjon.

Fridrik Richárd (Szeged), **Kovácsné Hadas Ildikó** (Budapest), **Németh László** (Fonyód), **Sáfár Lajos** (Ráckeve), **Varga Péter** (Budapest)

Matematika feladat megoldása

B. 5008. *Adottak az A középpontú k_A és a B középpontú k_B körök. Az l_1 egyenes A_1-ben érinti k_A-t és B_1-ben k_B-t; az l_2 egyenes pedig A_2-ben érinti k_A-t és B_2-ben k_B-t. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2 és a B_1B_2 szakaszok AB egyenesre vett merőleges vetülete egyenlő hosszúságú.*

(*3 pont*)

Megoldás. Amennyiben két külső vagy két belső érintőt húztunk be, a megfelelő pontok vetületei egybeesnek, nincs mit bizonyítanunk. A feladat valódi állítása arra az esetre vonatkozik, ha mindkét körhöz húzható külső és belső érintő is és az egyik egyenes külső, a másik belső érintő. Legyen l_1 a közös külső, l_2 pedig a közös belső érintő.