# Fizika feladatok megoldása

**P. 5255.** *Egy igen hosszú, $m=10$ g tömegű, egyenes szigetelőszál középpontja felett, attól $d=5$ cm-re egy $Q=3\cdot 10^{-7}$ C töltésű, pontszerű test van rögzítve. A szigetelőszálat is rögzítjük, majd egyenletes töltéseloszlással $\sigma=-2\cdot 10^{-6}$ C/m lineáris töltéssűrűséggel feltöltjük. Mekkora gyorsulással indul el a szál, ha rögzítését lökésmentesen feloldjuk?*

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

**Megoldás.** Határozzuk meg az $\ell$ hosszúságú, töltött szigetelőszál elektromos terét attól $d$ távolságban, ahol $\ell \gg d$!

Vegyünk fel egy $d$ sugarú, $\ell$ hosszú hengert, amely teljesen körülfogja a szigetelőszálat, és a szál tengelye egybeesik a henger szimmetriatengelyével. Írjuk fel erre az elrendezésre az elektrosztatika Gauss-féle fluxustörvényét. A levegő permittivitása jó közelítéssel megegyezik a vákuuméval, illetve $\ell \gg d$ miatt a henger lapjain kilépő elektromos fluxus elhanyagolható, továbbá a hengerpaláston az elektromos erőtér nagysága – jó közelítéssel – állandó $E$ nagyságúnak tekinthető, ezért

$$\sigma\ell\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}=E\cdot 2d\pi\cdot\ell,$$

vagyis az elektromos térerősség a száltól $d$ távolságban

$$E=\frac{\sigma}{2d\pi\varepsilon_0}.$$

Így a $Q$ töltésű testre ható erő:

$$F=QE=\frac{Q\,\sigma}{2d\pi\varepsilon_0}.$$

Mivel $Q$ és $\sigma$ ellentétes előjelűek, a szál és a rögzített ponttöltés között ható erő *vonzóerő.* Newton III. törvénye alapján a szálra is éppen $F$ nagyságú, felfelé mutató elektroszatikus erő hat. Ehhez (előjelesen) hozzáadódik az $mg$ nagyságú, lefelé mutató nehézségi erő.

Amikor feloldjuk a szál rögzítését, akkor – Newton második törvényéből következően – a szál az $F-mg$ erő hatására

$$a=\frac{F}{m}-g=\frac{|Q\,\sigma|}{2d\pi\varepsilon_0\,m}-g\approx 11{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

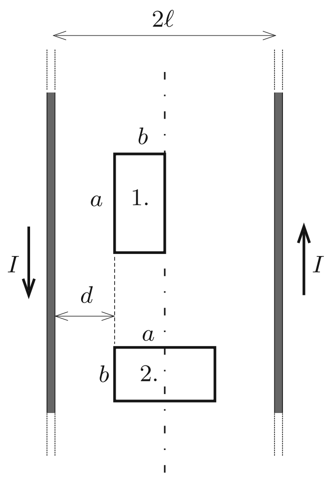
gyorsulással indul el függőlegesen *felfelé.* (A megoldás során feltételeztük, hogy a töltött szál mindvégig vízszintes helyzetű.)

*Varga Vázsony* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

49 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 25, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 4, nem versenyszerű 4 dolgozat.

**P. 5279.** *Két nagyon hosszú, egymástól $2\ell$ távol lévő egyenes vezetőhuzal mindegyikében $I$ erősségű, de ellentétes irányú áram folyik. A vezetők síkjában, az egyik vezetőtől $d=\ell-b$ távolságban egy $a$ és $b$ oldalhosszúságú téglalap alakú vezetőkeretet helyeztünk el, először az* ábrán *látható* 1*-es, majd a* 2*-es helyzetben* $(0<a-b<\ell)$*. Melyik esetben nagyobb a kereten átmenő mágneses fluxus?*

(*4 pont*) *Cserti József* (Budapest) feladata nyomán




**Megoldás.** Egyetlen vezetőtől származó indukcióvektor nagysága: $B(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, ahol $r$ a vezetőtől mért távolság. A két egyenes vezető áramától származó indukcióvektorok – a jobbkéz-szabály szerint – ugyanabból az irányból metszik a vezetőkeret felületét, ezért a téglalapok minden pontjában összeadódik a két vezető mágneses indukcióvektora. Ha egy, a vezetők síkjában a felezővonaltól $x$ távolságra lévő pontot nézünk, akkor ott az eredő indukcióvektor nagysága

$$B(x)=\frac{\mu_0 I}{2\pi(\ell-x)}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(\ell+x)}=\text{állandó}\cdot\frac{1}{\ell^2-x^2}.$$

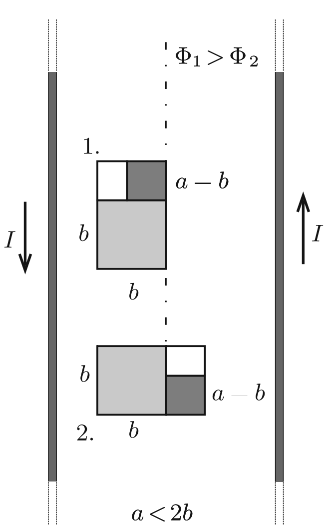
Ezek szerint minél nagyobb $x$ (minél messzebb van a pont a felezővonaltól), annál nagyobb lesz azon a helyen $B$ értéke. A továbbiakban két állítás érvényességét fogjuk felhasználni.

($i$) Ha két egybevágó alakzat az áramok felezővonalához viszonyítva ugyanúgy (vagy a tükrözött helyzetben) helyezkedik el, akkor a rajtuk áthaladó mágneses fluxus megegyezik. Nevezzük ezt $A$ állításnak.

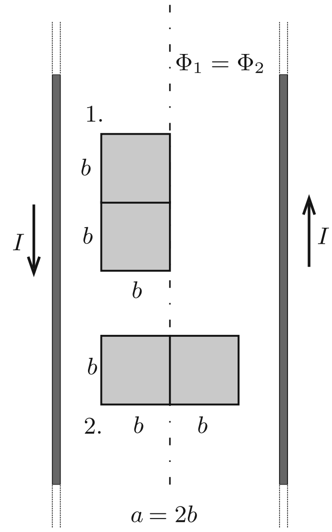
($ii$) Ha van két olyan alakzatunk, amelyek által lefedett terület ugyanakkora, továbbá az egyik alakzat bármelyik pontját tekintve ott a mágneses indukcióvektor nagysága nagyobb, mint a másik alakzat bármelyik pontjában vett indukcióvektor nagysága, akkor az első alakzathoz tartozó mágneses fluxus biztosan nagyobb a másik fluxusánál. Legyen ez a $B$ állítás.

A megadott határok között három esetet fogunk vizsgálni.

1. Ha $a<2b$, akkor az 1-es és a 2-es helyzetű vezetőkeretet az *1. ábrán* látható módon darabolhatjuk fel két négyzetre és egy téglalapra. A halványan, illetve sötétebben jelölt négyzetekre vonatkozó fluxus – az $A$ esetnek megfelelően – páronként megegyezik, a két helyzetnek megfelelő teljes mágneses fluxus „kisebb-nagyobb viszonyát" a fehér téglalapok fogják eldönteni. Az 1-es helyzetben a fehér téglalap minden pontja távolabb van a szimmetriatengelytől, mint a 2-es helyzetben, tehát – a $B$ állításnak megfelelően – kijelenthetjük, hogy $\Phi_1>\Phi_2$.

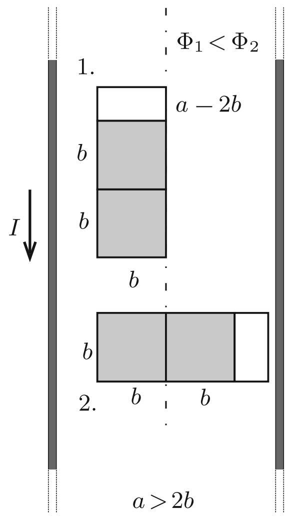



*1. ábra*




*2. ábra*

2. Ha $a = 2b$, akkor a keret által határolt téglalap mindkét helyzetben két egybevágó négyzetre darabolható (*2. ábra*), így – az $A$ állítás szerint – fennáll, hogy $\Phi_1 = \Phi_2$.




*3. ábra*

3. Amennyiben $a > 2b$, a vezetőkeretek téglalapjai a *3. ábrán* látható módon darabolhatók két-két négyzetre és egy-egy téglalapra. A négyzeteken áthaladó mágneses fluxus a két esetben megegyezik ($A$ állítás), a téglalapon áthaladó fluxus pedig (a $B$ állításnak megfelelően) az 1. helyzetben biztosan kisebb, mint a 2. helyzetben, tehát az eredő fluxusok viszonya: $\Phi_1 < \Phi_2$.

*Páhán Anita Dalma* (Budapest, Eötvös J. Gimn., 11. évf.)

15 dolgozat érkezett. Helyes Mihalik Bálint, Páhán Anita Dalma, Somlán Gellért, Téglás Panna és Tóth Ábel megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 4 dolgozat.

**P. 5285.** *Lapos, korong alakú, m tömegű test vízszintes, érdes felületen nyugszik. Egy D direkciós erejű rugó egyik végét a korong közepéhez erősítjük, majd a másik végét vízszintes irányban lassan húzni kezdjük. Kezdetben a rugó feszítetlen. A test egy ideig mozdulatlan, majd megindul, és egyenes vonalban mozog. A korong megindulásának pillanatában a rugó másik végét rögzítjük.*

*a) Mekkora lesz a test maximális sebessége?*

*b) Mennyi idő alatt éri el a maximális sebességet?*

*c) Mekkora távolságot tesz meg a korong a maximális sebesség eléréséig?*

*d) Hogyan mozog a korong a továbbiakban, feltételezve, hogy a rugó mindig egyenes marad?*

*A korong és az érdes felület között a csúszási súrlódási együttható $\mu$, a tapadási súrlódás együtthatója pedig $\mu_0$ ($\mu_0 > \mu$).*

(*5 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

**Megoldás.** *a*) Először számítsuk ki, hogy mekkora lesz a rugó $x_0$ megnyúlása a test megindulása előtti pillanatban. A testre függőleges irányban két erő hat ebben a pillanatban: az $mg$ nagyságú nehézségi erő, valamint az érdes felület által kifejtett $N$ nagyságú nyomóerő. A test függőleges irányban nem gyorsul, vagyis a két erő kiegyenlíti egymást:

$$mg = N.$$

A testre vízszintes irányban is két erő hat: a rugó $Dx_0$ nagyságú húzóereje és a tapadási súrlódási erő. Az utóbbi nagysága a test megindulása előtti pillanatban a legnagyobb:

$$F_{\max} = \mu_0 N = \mu_0 mg.$$

Ebben a pillanatban a test még nem gyorsul, vagyis a két erő kiegyenlíti egymást:

$$Dx_0 = \mu_0 mg \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{\mu_0 mg}{D}.$$

A testre a megindulása után is négy erő hat. Függőlegesen ugyanaz a kettő, ami eddig, és ezek továbbra is kiegyenlítik egymást ($mg = N$), vízszintesen pedig a rugó által kifejtett erő, valamint az

$$S = \mu N = \mu mg$$

nagyságú súrlódási erő. A rugóerő kezdetben gyorsítja a testet, a súrlódás pedig lassítja. A korong sebessége addig növekszik, amíg a két erő egyenlővé nem válik. Legyen ebben az „egyensúlyi" helyzetben a rugó megnyúlása $x_1$.

$$Dx_1 = \mu mg \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{\mu mg}{D}.$$

Írjuk fel ezután a munkatételt a test megindulása és a maximális $v_{\max}$ sebességű állapot közötti folyamatra. A rugó $x_0 - x_1$ úton gyorsítja a testet, a súrlódás pedig ugyanekkora úton lassítja.

$$\sum W = \Delta E_{\text{mozg.}},$$

vagyis (a rugóerő átlagos értékével számolva)

$$\frac{Dx_0 + Dx_1}{2}(x_0 - x_1) - \mu mg(x_0 - x_1) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - 0.$$

Innen (behelyettesítve az $x_0$-ra és $x_1$-re kapott kifejezéseket) a maximális sebességre a következő összefüggést kapjuk:

$$v_{\max} = (\mu_0 - \mu) g \sqrt{\frac{m}{D}}.$$

*b*) A test a megindulása után harmonikus rezgőmozgást fog végezni a megállásáig, hiszen a rá ható eredő erő az elmozdulással arányosan változik. Ennek a rezgőmozgásnak a periódusideje*:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}.$$

A test nulla kezdősebességgel indul, így a periódusidő negyede, vagyis

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{D}}$$

idő múlva lesz a sebessége maximális.

*c*) A rugó megnyúlása a mozgás kezdetekor $x_0$, a test legnagyobb sebességénél pedig $x_1$, vagyis ezalatt a korong

$$\Delta x = x_0 - x_1 = (\mu_0 - \mu) \frac{mg}{D}$$

távolságot tesz meg.

*d*) A korong a további mozgása során egyre jobban lassul, és valahol megáll. Jelöljük a rugó megnyúlását ebben a helyzetben $x_2$-vel. Ha $x_2 > 0$, akkor a korong megállásának pillanatában a rugó *megnyújtott,* $x_2 = 0$ esetén *feszítetlen,* $x_2 < 0$ esetben pedig összenyomott állapotban lesz. Elvben előfordulhatna, hogy a korong ismét megindul, és még további rezgéseket végez. Megmutatjuk, hogy nem ez valósul meg, hanem a korong a megállása után *megtapad* az érdes felületen.

Írjuk fel ismét a munkatételt, de most a korong megindulása és a megállása közötti mozgásra:

$$\frac{Dx_0 + Dx_2}{2}(x_0 - x_2) - \mu mg(x_0 - x_2) = 0 - 0.$$

Ez $x_2$-re nézve másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke: $x_2 = x_0$. Ez az indulás pillanatának állapota, számunkra érdektelen. A másik gyök:

$$x_2 = \frac{2\mu mg}{D} - x_0,$$

azaz $x_0$ korábban kiszámított értékét felhasználva

$$x_2 = \frac{mg}{D}(2\mu - \mu_0).$$

*A súrlódás jelenléte nem befolyásolja a rezgésidőt, csak az egyensúly helyzetét tolja el a súrlódásmentes esethez képest.

A korong teljes elmozdulása az indulásától a megállásáig:

$$s = x_0 - x_2 = \frac{mg}{D}\mu_0 - \frac{mg}{D}(2\mu - \mu_0) = 2\Delta x,$$

vagyis éppen kétszer akkora, mint az indulástól a maximális sebesség eléréséig megtett út.

A súrlódási együtthatók számértékétől függően elvben három lehetőség valósulhat meg.

(*i*) Ha $\mu_0 < 2\mu$, akkor $x_2 > 0$, és a rugóerő $Dx_2 = mg(2\mu - \mu_0)$. Ez biztosan kisebb, mint a tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke:

$$mg(2\mu - \mu_0) < mg\mu_0, \qquad \text{hiszen} \qquad \mu < \mu_0.$$

A korong tehát a továbbiakban nem mozdul meg.

(*ii*) Ha $\mu_0 = 2\mu$, akkor $x_2 = 0$, tehát a rugó feszítetlen állapotban van a megállás pillanatában, és nyilvánvaló, hogy a korong a továbbiakban nyugalomban marad.

(*iii*) Ha $\mu_0 > 2\mu$, akkor $x_2 < 0$, vagyis az összenyomott rugó

$$D|x_2| = mg(\mu_0 - 2\mu)$$

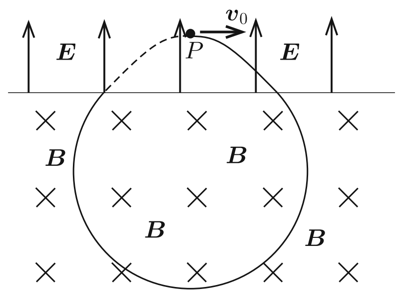
nagyságú tolóerőt fejt ki a korongra. Ez kisebb, mint a tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke, hiszen $\mu_0 - 2\mu < \mu_0$, tehát a korong nem fog megmozdulni.

*Toronyi András* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)
dolgozatának felhasználásával

*Megjegyzés.* A különböző anyagok súrlódási együtthatóit összevetve megállapíthatjuk, hogy nagy valószínűséggel az (*i*) eset valósul meg, de a másik két lehetőséget sem tiltja semmilyen fizikai törvény.

49 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 14, hiányos (1–3 pont) 24, hibás 2 dolgozat.

**P. 5290.** *Homogén elektromos mező P pontjából egy pontszerű, negatív töltésű részecskét lövünk ki az elektromos térre merőleges* $\boldsymbol{v}_0$ *kezdősebességgel. Az* $\boldsymbol{E}$ *elektromos térerősségre és a* $\boldsymbol{v}_0$ *sebességvektorra merőleges, homogén mágneses mező is jelen van. A kétféle mezőt egy, az elektromos térerősségre merőleges sík választja el egymástól az ábra szerint. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága, ha a részecske visszatér a P pontba?*



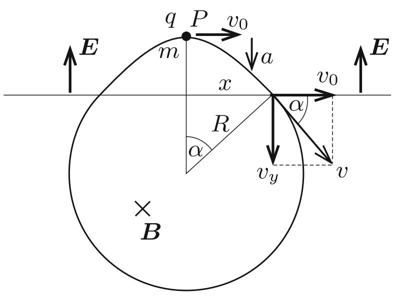

*(Az egész elrendezés vákuumban van, és a nehézségi erő hatása a részecskére elhanyagolható.)*

(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

**Megoldás.** A részecske a homogén elektromos mezőben egy parabola mentén, a homogén mágneses mezőben pedig valamekkora $R$ sugarú körpálya mentén mozog. (Az elektromos térerősséget tekintsük függőlegesen felfelé mutató vektornak, a részecske kezdősebessége ekkor vízszintes irányú vektor. Ezt megtehetjük, hiszen a részecskére ható nehézségi erő elhanyagolható, emiatt lényegtelen az egész elrendezés térbeli helyzete.) A részecske negatív töltése miatt az elektromos térben lefelé mutató erő hat rá, a mágneses térben pedig a körpálya középpontja felé mutató Lorentz-erő határozza meg a mozgását.

A részecske akkor tér vissza a $P$ pontba, ha a kétféle mező határfelületénél a sebessége akkora $\alpha$ szöget zár be a vízszintessel, amelyre teljesül, hogy

$$\sin\alpha = \frac{x}{R},$$




ahol a vízszintes elmozdulás a fél parabolaív menti mozgás idejével kifejezve

$$x = v_0 t$$

(lásd az *ábrát*). Emellett

$$\sin\alpha = \frac{v_y}{v},$$

ahol $v_y$ a síkhoz való érkezés $v$ nagyságú sebességének függőleges komponense.

Az elektromos térben egy $m$ tömegű és $q$ töltésű részecske $a = Eq/m$ gyorsulással mozog, így

$$v_y = at = \frac{Eq}{m}t = \frac{Eq}{m}\cdot\frac{x}{v_0} = \frac{Eq}{m}\cdot\frac{R\sin\alpha}{v_0} = \frac{Eq}{m}\cdot\frac{R}{v_0}\cdot\frac{v_y}{v}.$$

Innen kifejezhetjük a körpályán mozgó részecske sebességének nagyságát:

$$v = \frac{EqR}{mv_0}.$$

A mágneses térben mozgó részecske mozgásegyenlete:

$$Bqv = \frac{mv^2}{R}, \quad \text{ahonnan} \quad B = \frac{mv}{qR} = m\frac{EqR}{mv_0}\cdot\frac{1}{qR} = \frac{E}{v_0}.$$

A mágneses indukcióvektor nagysága tehát $B = E/v_0$ kell legyen, ekkor valósulhat meg a „tojás” alakú zárt pálya.

*Selmi Bálint* (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

38 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 3, nem versenyszerű 1 dolgozat.

**P. 5293.** *Egy feketedoboz tetején sok kivezetés van. Tudjuk, hogy belül minden kivezetéspár közé egy-egy ismeretlen ellenállást forrasztottak. Hogyan mérhetjük meg két tetszőleges pont közé kötött ellenállás értékét, ha csupán ellenállásmérőnk és tetszőleges számú röpzsinórunk van?*

(*6 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kiskunhalas

**Megoldás.** Az ellenállásmérővel megmérhetjük a rendszer két tetszőleges kivezetése közötti eredő ellenállást. A röpzsinórok ellenállását hanyagoljuk el.

Jelöljük $R_{ij}$-vel az $i$. és a $j$. kivezetés közé kötött ellenállást. Legyen $A$ és $B$ az a két pont, amelyek közé kapcsolt $R_{AB}$ ellenállás nagyságát szeretnénk meghatározni. Megmutatjuk, hogy három különböző ellenállásmérés eredményéből $R_{AB}$ kiszámítható. Az ellenállásmérőt mindvégig az $A$ és $B$ kivezetések közé fogjuk kapcsolni, csupán a röpzsinórok számán és helyzetén változtatunk. Az $A$ és $B$ pontok között mért eredő ellenállás az egyes esetekben legyen rendre $R_1$, $R_2$ és $R_3$.

*1. mérés.* Kapcsoljunk röpzsinórokat $A$ és minden $i \neq B$ kivezetés közé, vagyis zárjuk rövidre $B$ kivételével az összes kivezetést. Ekkor a röpzsinórok ellenállását elhanyagolva $B$-n kívül minden kivezetés ekvipotenciális lesz. Az ekvipotenciális kivezetések és $B$ között minden $B$-be futó ellenállás párhuzamos kapcsolásra kerül, és a mérőműszer által mutatott $R_1$ eredő ellenállásra fennáll:

$$\frac{1}{R_1} = \sum_{i,\ i \neq B} \frac{1}{R_{iB}}. \tag{1}$$

*2. mérés.* Ugyanazt az elrendezést valósítjuk meg, mint az 1. esetben, annyi módosítással, hogy ezúttal az $A$-ból induló ellenállások párhuzamos kapcsolását valósítjuk meg azzal, hogy $B$-vel összekapcsolunk minden $A$-tól eltérő kivezetést. Ezáltal $B$ és minden más, $A$-tól különböző kivezetési pont lesz ekvipotenciális. Az ekkor $A$ és $B$ között mért $R_2$ eredő ellenállásra:

$$\frac{1}{R_2} = \sum_{j,\ j \neq A} \frac{1}{R_{Aj}}. \tag{2}$$

*3. mérés.* Ezúttal minden $i$, $i \neq A$, $i \neq B$ kivezetést kapcsolunk össze röpzsinórokkal ekvipotenciálissá. Ez az elrendezés azonos azzal, mintha $R_{AB}$ kivételével minden $R_{Aj}$ ellenállás $A$-ból párhuzamosan egy $P$ pontba lenne kötve, minden $R_{iB}$, $i \neq A$ pedig $P$-ből párhuzamosan $B$-be; ezek mellett pedig természetesen $R_{AB}$ megmarad $A$ és $B$ kivezetések között. Ekkor a mért $R_3$ ellenállásra:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AP} + R_{PB}}, \tag{3}$$

ahol

$$\frac{1}{R_{AP}} = \sum_{j,\ j \neq A,\ j \neq B} \frac{1}{R_{Aj}} = \sum_{j,\ j \neq A} \frac{1}{R_{Aj}} - \frac{1}{R_{AB}}, \tag{4}$$

azaz (2) felhasználásával

$$\frac{1}{R_{AP}} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_{AB}}.$$

Hasonlóan kapjuk (1) felhasználásával, hogy

$$\frac{1}{R_{PB}}=\sum_{i,\, i\neq A,\, i\neq B}\frac{1}{R_{iB}}=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_{AB}},$$

tehát (3) az alábbira módosul:

$$\frac{1}{R_3}=\frac{1}{R_{AB}}+\frac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_{AB}}}+\dfrac{1}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_{AB}}}}. \tag{4}$$

A (4) összefüggés (meglehetősen bonyolult módon) már csak a három ismert mérési adatot és a kérdezett $R_{AB}$-t tartalmazza. Fejezzük ki ez utóbbit! (4) átalakításával:

$$\frac{1}{R_3}=\frac{1}{R_{AB}}+\frac{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_{AB}}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_{AB}}\right)}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{2}{R_{AB}}}.$$

Bevezetve a $p=\frac{1}{R_{AB}}$ jelölést adódik, hogy

$$\frac{1}{R_3}=p+\frac{p^2-p\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_1R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-2p}.$$

A jobb oldali tört nevezőjével szorozva a

$$p\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-2p^2+p^2-p\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_1R_2}=\frac{1}{R_1R_3}+\frac{1}{R_2R_3}-\frac{2p}{R_3},$$

vagyis a

$$p^2-p\frac{2}{R_3}+\frac{1}{R_1R_3}+\frac{1}{R_2R_3}-\frac{1}{R_1R_2}=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldása (kihasználva, hogy $R_{AB}>R_3$ miatt $\frac{1}{R_{AB}}<\frac{1}{R_3}$):

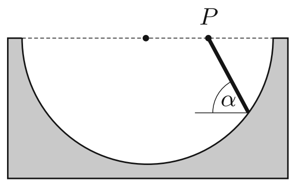
$$\frac{1}{R_{AB}}=\frac{1}{R_3}-\sqrt{\frac{1}{R_3^2}-\frac{1}{R_1R_3}-\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_1R_2}}.$$

A kérdéses ellenállás nagysága tehát a mérhető mennyiségek bevezetett jelölésével így írható fel:

$$R_{AB}=\frac{R_3}{1-\sqrt{1+\frac{R_3^2}{R_1R_2}-\frac{R_3}{R_1}-\frac{R_3}{R_2}}}.$$

*Varga Vázsony* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes Gurzó József, Kozaróczy Csaba, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 3, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.




**P. 5294.** *Egy félhenger alakú vályú tengelye vízszintes. A vályú egyik vízszintes sugarának P felezőpontján át különböző hajlásszögű lejtőket fektetünk. Mekkora annak a lejtőnek a hajlásszöge, amelyen egy súrlódásmentesen lecsúszó piciny test leghamarabb éri el a vályú felületét?*

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

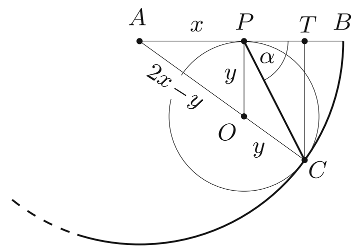
**Megoldás.** Használjuk fel a feladat megoldásához az ún. *Galilei-kört,* ami a $P$ pontra illeszkedő, függőleges síkban fekvő kör, amelynek a középpontját $P$-vel összekötő egyenes függőleges. Ha a $P$ ponton áthaladó, különböző meredekségű húrok (lejtők) mentén egyszerre egy-egy súrlódásmentesen mozgó, kicsiny testet indítunk el kezdősebesség nélkül, akkor ezek a testek ugyanannyi idő alatt érik el a körvonalat – állította Galilei. A bizonyításhoz elég annyit tudnunk, hogy az $r$ sugarú kör $\alpha$ hajlásszögű húrjának hossza $\ell = 2r\sin\alpha$, a rajta mozgó tömegpont gyorsulása pedig $a = g\sin\alpha$. Így a lecsúszás ideje:

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = \sqrt{\frac{4r\sin\alpha}{g\sin\alpha}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}},$$

ami valóban független $\alpha$-tól, és Galilei éppen ezt állította.

A fenti megfontolásból az is következik, hogy a különböző lejtőkön mozgó testek minden időpillanatban egy olyan körön helyezkednek el, amelynek legfelső pontja a $P$ pont, a sugara pedig az eltelt idő négyzetével arányosan nő. Esetünkben elég megkeresnünk azt a legkisebb sugarú kört, aminek a legfelső pontja $P$, és érinti a vályú síkmetszetét, vagyis a feladat ábráján látható félkört.

Feladatunk az, hogy meghatározzuk az érintési pont és $P$ közötti húrnak a vízszintessel bezárt $\alpha$ szögét (lásd az *ábrát*).




Mivel $P$ a félhenger $2x$-szel jelölt sugarának felezőpontja, így $AP = PB = x$, valamint $AC = 2x$. Az $O$ középpontú, $OP$ sugarú Galilei-kör a $C$ pontban érinti a vályú félkörét. A két kör középpontját összekötő egyenes átmegy az érintési ponton, tehát $A$, $C$ és $O$ egy egyenesre esnek. A Galilei-kör sugarát jelöljük $y$-nal.

A körnek $P$ a legfelső pontja, tehát $OP$ függőleges, azaz merőleges a vízszintes $AB$-re, ezért az $AOP$ háromszög derékszögű. A Pitagorasz-tétel szerint

$$AP^2 + OP^2 = AO^2,$$

vagyis

$$x^2 + y^2 = (2x - y)^2,$$

ahonnan

$$3x^2 - 4xy = x(3x - 4y) = 0$$

következik, és mivel $x \neq 0$, fennáll:

$$y = \frac{3}{4}x.$$

Állítsunk $C$-ből merőlegest az $AB$ szakaszra, a talppontja legyen $T$. Ekkor a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{AP}{AO} = \frac{AT}{AC}, \qquad \text{azaz} \qquad AT = \frac{2x^2}{2x-y} = \frac{2x^2}{2x - \frac{3}{4}x} = \frac{8}{5}x.$$

$AT$ és $AC$ hosszából a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámíthatjuk $TC$-t:

$$TC = \sqrt{AC^2 - AT^2} = \sqrt{(2x)^2 - \left(\frac{8}{5}x\right)^2} = \frac{6}{5}x.$$

Tudjuk még, hogy

$$PT = AT - AP = \frac{8}{5}x - x = \frac{3}{5}x,$$

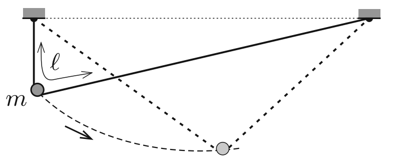
és így a lejtő keresett hajlásszögére

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{TC}{PT} = \frac{\frac{6}{5}x}{\frac{3}{5}x} = 2, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha = 63{,}4^\circ$$

adódik.

*Páhán Anita Dalma* (Budapest, Eötvös J. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

52 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 11, hibás 7 dolgozat.



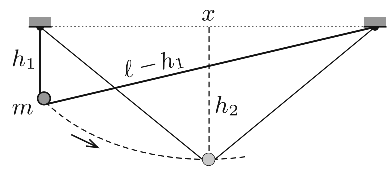

**P. 5297.** *Egy könnyű, hajlékony, nyújthatatlan damilszál hossza $\ell = 80$ cm. A szál végeit azonos magasságban, egymástól valamekkora távolságban rögzítjük. A szálon egy $m = 5$ g tömegű, közepén átfúrt acélgolyó tud csúszni. Az acélgolyót olyan helyzetből indítjuk, aminél a feszes damilszál egyik része függőleges.*

*a) Legfeljebb mekkora sebességre gyorsul fel az acélgolyó, ha a súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható?*

*b) Mekkora erő feszíti a damilt, amikor az acélgolyó sebessége maximális?*

*(Az acélgolyót tekintsük tömegpontnak!)*

(*5 pont*) *Holics László* mérési feladata nyomán




*1. ábra*

**Megoldás.** *a*) Jelöljük a damilszál rögzített végpontjainak távolságát $x$-szel, és fejezzük ki $x$ segítségével, hogy legfeljebb mekkora lehet az acélgolyó helyzeti energiájának megváltozása. A kezdeti elrendezésben az *1. ábrán* $h_1$-gyel jelölt távolságra felírt Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + h_1^2 = (\ell - h_1)^2,$$

ahonnan

$$h_1(x) = \frac{\ell^2 - x^2}{2\ell}. \tag{1}$$

Adott $x$ mellett az acélgolyó legmélyebb helyzetében (amikor a két damilszál egyforma hosszú) a $h_2$ távolságot ismét a Pitagorasz-tétel alkalmazásával kapjuk meg:

$$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = h_2^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

vagyis

$$h_2(x) = \frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{2}. \tag{2}$$

A golyó gravitációs helyzeti energiájának csökkenése (1) és (2) felhasználásával:

$$\Delta E = mg(h_2 - h_1) = mg\left(\frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{2} - \frac{\ell^2 - x^2}{2\ell}\right).$$

Mivel a súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható, a mechanikai energia állandó marad, tehát a golyó legnagyobb sebességére fennáll:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h_2 - h_1),$$

azaz

$$v^2(x) = g\left(\frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{2} - \frac{\ell^2 - x^2}{2\ell}\right). \tag{3}$$

Vajon mikor (milyen $x$ mellett) legnagyobb a sebesség (és ezzel együtt a sebesség négyzete)? A (3) összefüggés így is felírható:

$$v^2(x) = \frac{g}{\ell} \cdot \sqrt{\ell^2 - x^2}\left(\ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}\,\right),$$

amelyre felírva a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$v^2(x) \leqslant \frac{g}{\ell}\left(\frac{\sqrt{\ell^2 - x^2} + \ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}}{2}\right)^2 = \frac{g\ell}{4}.$$

Az acélgolyó legnagyobb sebessége tehát

$$v_{\max} = \frac{\sqrt{g\ell}}{2} \approx 1{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{4}$$

Az egyenlőség (4)-ben akkor teljesül, ha

$$\ell - \sqrt{\ell^2 - x^2} = \sqrt{\ell^2 - x^2},$$

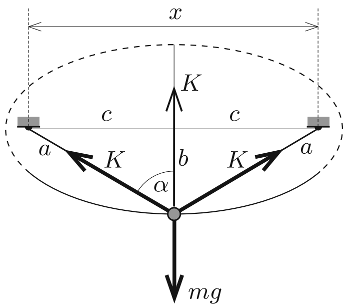
vagyis

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \approx 0{,}69\ \mathrm{m}.$$

A damilvégeket ekkora távolságban rögzítve a golyó legmélyebb helyzetében a damilszálak a függőlegessel

$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 60°\text{-os},$$

egymással pedig 120°-os szöget zárnak be.



*2. ábra*

*b*) Mivel a damilszál nem nyúlik meg, az acélgolyó ellipszispályán fog mozogni, hiszen a két rögzített végponttól mért távolságok összege állandó (*2. ábra*). Az ellipszis paramétereit a szokásos módon jelölve:

$$x = 2c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{x}{2} \approx 0{,}347\ \mathrm{m},$$

$$\ell = 2a \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{\ell}{2} \approx 0{,}4\ \mathrm{m},$$

továbbá

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 0{,}2\ \mathrm{m}.$$

A pálya legalsó pontjában (az ellipszis kistengelyének alsó végénél) a golyó sebessége – mint láttuk – $v = \frac{\sqrt{\ell g}}{2}$, és így a függőlegesen felfelé mutató centripetális gyorsulása $\frac{v^2}{R}$ nagyságú, ahol $R$ az ellipszis görbületi sugara (simulókörének sugara) a kérdéses pontban. Ismert (vagy könnyen levezethető), hogy

$$R = \frac{a^2}{b} = \ell = 0{,}8\ \mathrm{m}.$$

Ha a damilt $K$ erő feszíti, akkor a két (egymással 120°-os szöget bezáró) fonálerő eredője függőlegesen felfelé irányuló és ugyancsak $K$ nagyságú lesz. Az acélgolyó mozgásegyenlete:

$$K - mg = m\frac{v^2}{R}, \qquad \text{vagyis} \qquad K = mg + m\frac{v^2}{R} = \frac{5}{4}mg = 0{,}061\ \text{N}.$$

*Ludányi Levente* (Szeged, SZTE Gyak. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

*Megjegyzés.* Az ellipszis görbületi sugarát a kistengely végpontjában többféle módszerrel is meghatározhatjuk.

1. Ha egy tömegpont egymásra merőleges irányokban azonos körfrekvenciájú, $a$ és $b$ amplitúdójú, $\pi/2$ fáziseltolódású harmonikus rezgőmozgást végez, akkor a koordinátái:

$$x(t) = a\sin\omega t; \qquad y(t) = b\cos\omega t,$$

és a pályagörbe egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A test sebessége $t = 0$ pillanatban: $v_x = a\omega$, $v_y = 0$, a centripetális gyorsulása tehát $-y$ irányú és $A = \frac{v^2}{R}$ nagyságú, ahol $R$ a görbületi sugár. Másrészt a rezgőmozgást végző test gyorsulása $t = 0$ időpontban: $A_x = 0$ és $A_y = -b\omega^2$. A gyorsulás kétféleképpen kiszámított értékét összevetve kapjuk, hogy

$$\frac{a^2\omega^2}{R} = b\omega^2, \qquad \text{azaz} \qquad R = \frac{a^2}{b}.$$

2. Egy $R$ sugarú, az $x$ tengelyt az origóban érintő kör egyenlete: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, azaz $2Ry = x^2 + y^2$. Ha $x \ll R$ és $y \ll R$, akkor $y^2$ elhanyagolhatóan kicsi $2Ry$ mellett, és a kör az

$$y = \frac{x^2}{2R}$$

egyenletű parabolával közelíthető. Nyújtsuk meg most ezt a parabolát az $y$ tengely mentén $\lambda$-szorosára:

$$y' = \lambda\frac{x^2}{2R} = \frac{x^2}{2(R/\lambda)}.$$

Látható, hogy a $\lambda$-szoros nyújtás során a görbét legjobban közelítő (ahhoz „simuló") kör sugara az eredeti érték $1/\lambda$-szorosára változik.

Végezzük el ezt a nyújtási transzformációt egy $2a$ nagytengelyű, $2b$ kistengelyű ellipszissel, amely a kistengelyének végpontjában érinti az $x$ tengelyt. Ha a nyújtási faktor $\lambda = a/b$, akkor a simulókör sugara $R' = \frac{b}{a}R$-re változik. De mivel a megnyújtott alakzat egy $a$ sugarú kör, $R' = a$, vagyis $R = a^2/b$.

3. Ha egy bolygó $a$ és $b$ féltengelyekkel rendelkező ellipszis mentén mozog, akkor a nagytengely valamelyik végpontjánál felírt Newton-egyenletből kapjuk, hogy a görbületi sugár ott $b^2/a$. A kis- és nagytengely szerepét felcserélve adódik, hogy a kistengely végpontjában a simulókör sugara $a^2/b$.

(*G. P.*)

41 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 14, hibás 3, nem versenyszerű 1 dolgozat.