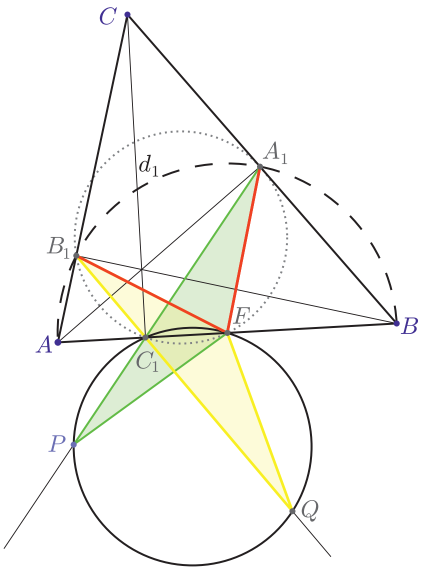
Matematika feladatok megoldása

B. 5257. *Az ABC hegyesszögű háromszögben a magasságok AA_1, BB_1, illetve CC_1, az AB oldal felezőpontja F. A k kör átmegy az F és a C_1 pontokon, valamint az A_1C_1 és B_1C_1 szakaszok C_1-en túli meghosszabbítását a P, illetve a Q pontban metszi. Igazoljuk, hogy $A_1P = B_1Q$.*

(*4 pont*)

Ha az eredeti háromszög egyenlű szárú, melynek alappal szemközti csúcsa C, akkor a C_1 és F pontok egybeesnek. Ekkor a rajtuk áthaladó kört úgy értelmezzük, mint az AB oldalt a $C_1 \equiv F$ pontban érintő kört. Az ábra ebben az esetben szimmetrikus lesz a háromszög szimmetriatengelyére, $QB_1 = PA_1$.



Vizsgáljuk meg az $AC \neq BC$ esetet.

I. megoldás.

Első állítás: $\overline{FA_1} = \overline{FB_1}$.

Az A_1 és B_1 pontok a magasságok talppontjai, így $AA_1B\sphericalangle = AB_1B\sphericalangle = 90°$, az A_1 és B_1 pontok az AB oldal Thalész-körének pontjai. A Thalész-kör középpontja az F oldalfelezőpont, így $FA_1 = FB_1$ (a Thalész-kör sugara).

Második állítás: $QB_1F\triangle \sim PA_1F\triangle$.

Az F, A_1, B_1, C_1 pontok rajta vannak az ABC háromszög Feuerbach-körén, így a kerületi szögek egyezősége alapján $FB_1Q\sphericalangle = FA_1P\sphericalangle$. A k kör kerületi szögeinek egyezősége alapján pedig $A_1PF\sphericalangle = B_1QF\sphericalangle$. A két háromszög két-két szöge megegyezik, a két háromszög hasonló.

A két háromszög hasonló és egy megfelelő oldalpárjuk hossza megegyezik, ezért egybevágók is.

$$\overline{QB_1} = \overline{PA_1}.$$

Sipos Botond Örs (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Keressük meg a QB_1-et PA_1-be vivő forgatva nyújtás középpontját. Mivel $QB_1 \cap PA_1 = \{C_1\}$, ezért a középpont a QPC_1 és $B_1A_1C_1$ körök második metszéspontja lesz. Ez éppen az F pont, hiszen rajta van egyrészt a feladat szövege szerint a QPC_1 körön, másrészt az $A_1B_1C_1$ Feuerbach-körön, így a feladat jelölései szerint a (PC_1FQ) körben $C_1PF\sphericalangle$ és $C_1QF\sphericalangle$ azonos íven nyugvó kerületi szögek, továbbá a $(B_1C_1FA_1)$ körben $C_1B_1F\sphericalangle$ és $C_1A_1F\sphericalangle$ szintén azonos íven nyugvó kerületi szögek. A PFA_1 és QFB_1 azonos körüljárású hasonló háromszögek, tehát F valóban a forgatva nyújtás centruma.

Az első megoldásban láttuk, hogy A_1, B_1 a Thalész-kör pontjai, amelynek középpontja az F felezőpont. Tehát $FA_1 = FB_1$.

Eszerint a forgatva nyújtás esetében az arány 1, ez egy F pont körüli forgatás, az egymásnak megfelelő szakaszok egyenlő hosszúságúak, $PA_1 = QB_1$.

Seres-Szabó Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

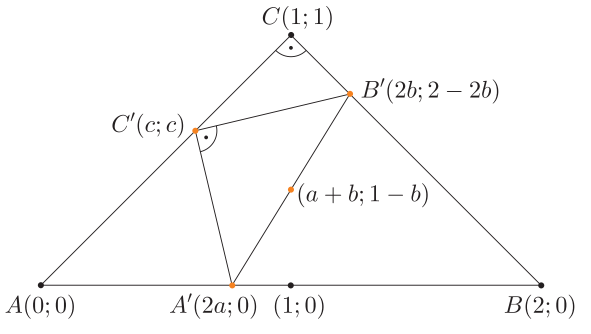
Összesen 78 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 61, 3 pontot 6 versenyző. 2 pontos 3, 1 pontos 2, továbbá 0 pontos 6 versenyző dolgozata.

B. 5271. *Legyen ABC olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyben a C csúcsnál van a derékszög. Jelöljük ki az AB oldal belsejében az A', a BC oldal belsejében a B' és a CA oldal belsejében a C' pontokat úgy, hogy az $A'B'C'$ háromszög hasonló legyen az ABC háromszöghöz.*

Mutassuk meg, hogy az AB oldal felezőpontja, az $A'B'$ szakasz felezőpontja és a C pont egy egyenesre esik.

(*3 pont*) Javasolta: *Hajdu Endre* (Sopron) és *Hujter Mihály* (Budapest)

I. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az A, B, C csúcsok koordinátái rendre $(0;0)$, $(2;0)$, $(1;1)$. Az illeszkedési feltételek miatt az A', B', C' csúcsok koordinátái rendre $(2a;0)$, $(2b;2-2b)$, $(c;c)$ alakban írhatóak alkalmas a, b és c valósakkal. Ekkor a $\overrightarrow{C'A'}$ vektor koordinátái $(2a-c;-c)$, a $\overrightarrow{C'B'}$ vektor koordinátái pedig $(2b-c;2-2b-c)$. Az AB szakasz felezőpontjának koordinátái $(1;0)$, az $A'B'$ szakasz felezőpontjának koordinátái pedig $(a+b;1-b)$.



1. ábra

Az $A'B'C'$ háromszög pontosan akkor hasonló ABC-hez (az azonos betűzésnek megfelelően), ha a C' pont körüli $+90°$-os elforgatás a $\overrightarrow{C'A'}$ vektort $\overrightarrow{C'B'}$-be viszi, azaz ha

$$(c; 2a - c) = (2b - c; 2 - 2b - c).$$

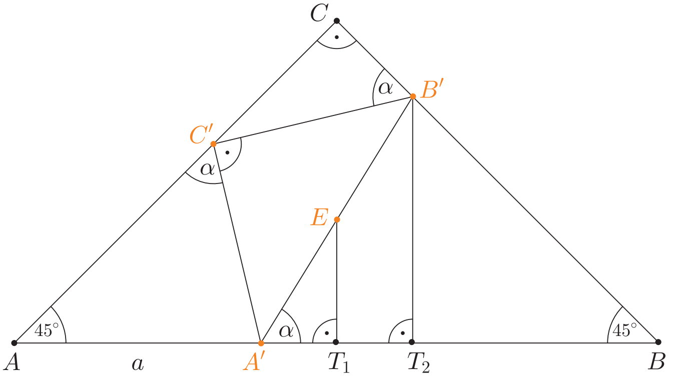
Innen, a második koordináták egyenlősége alapján $2a - c = 2 - 2b - c$, azaz

$$a + b = 1.$$

Tehát C, valamint az $A'B'$ és az AB szakaszok felezőpontja egyaránt illeszkedik az $x = 1$ egyenletű egyenesre.

(*A KÖMAL honlapon látható megoldás*)

II. megoldás. Legyen az AB és $A'B'$ szakaszok felezőpontja F, illetve E. Bocsássunk merőlegeseket az E és B' pontokból AB-re, a merőlegesek talppontjai T_1, illetve T_2. Be fogjuk bizonyítani, hogy az F és T_1 pontok azonosak. Tekintsük a *2. ábrát,* amelyen az $AC'A'\sphericalangle = \alpha$ jelölést alkalmaztuk.



2. ábra

Az $AC'A'\sphericalangle$ hegyesszög, hiszen $B'C'A'\sphericalangle = 90°$, és ugyancsak hegyesszög a $CB'C'\sphericalangle$. Az $AC'A'\sphericalangle$ és $CB'C'\sphericalangle$ szögek szárai páronként merőlegesek egymásra, és mivel hegyesszögek, ezért egyenlő nagyságúak, vagyis

$$AC'A'\sphericalangle = CB'C'\sphericalangle = \alpha.$$

Az $A'B'C'$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $C'B'A'\sphericalangle = 45°$, ebből az következik, hogy

$$BB'A'\sphericalangle = 135° - \alpha,$$

valamint $B'A'B\sphericalangle = \alpha$. Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$AA'C'\sphericalangle = 135° - \alpha.$$

A megfelelő szögek egyenlősége alapján tehát az $AA'C'$ és $BB'A'$ háromszögek hasonlók, amely hasonlóságnál az $A'C'$ és $A'B'$ egymásnak megfelelő oldalak.

Az $A'B'C'$ háromszögben $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ezért az $AA' = a$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$BB' = a \cdot \sqrt{2}. \tag{1}$$

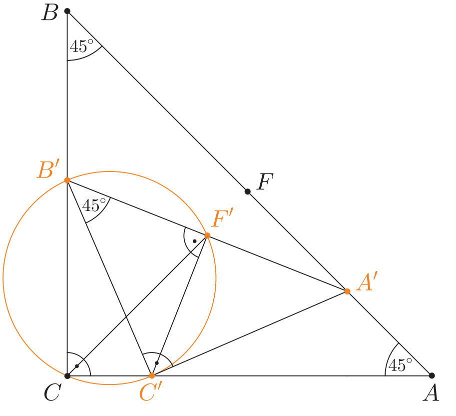
Nyilvánvaló, hogy $BB'T_2$ egyenlő szárú, derékszögű háromszög, így (1) alapján azt kapjuk, hogy $BT_2 = B'T_2 = a$.

Az $A'B'T_2$ háromszögben ET_1 középvonal, mivel E felezi az $A'B'$ szakaszt és $ET_1 \parallel B'T_2$. Ez azt jelenti, hogy a T_1 pont felezi az $A'T_2$ szakaszt, és mivel $AA' = BT_2 = a$, ezért T_1 felezi az AB szakaszt is, tehát F és T_1 azonos pontok.

Az AB-re merőleges ET_1 egyenes ezek szerint az AB szakasz felezőmerőlegese, amelyre illeszkedik az ABC háromszög C csúcsa is. A C, E, F pontok ezért valóban egy egyenesen vannak.

Kerekes András (Szeged, Radnóti Miklós Kís. Gimn., 9. évf.)

III. megoldás. Legyen az AB és $A'B'$ szakaszok felezőpontja F, illetve F'. A $C'F'$ merőlegesen felezi az $A'B'$ szakaszt. A $CC'F'B'$ négyszögben az egymással szemben fekvő C és F' csúcsoknál derékszögek vannak, ezek összege 180°, ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása miatt $CC'F'B'$ húrnégyszög. Tekintsük a *3. ábrát.*



3. ábra

A $CC'F'B'$ húrnégyszög köré írt körben $F'B'C'\sphericalangle = 45°$, ezért a kerületi szögek tételének alkalmazásával adódik, hogy

$$F'CC'\sphericalangle = 45° \tag{2}$$

is igaz. A (2) összefüggés éppen azt jelenti, hogy CF' felezi a $C'CB'\sphericalangle = ACB\sphericalangle$ derékszöget.

Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben az $ACB\sphericalangle$ szögfelezője az ABC háromszög szimmetriatengelye, és így áthalad az AB átfogó F felezőpontján.

Eszerint valóban teljesül, hogy a C, F', F pontok egy egyenesen vannak.

Gábor Benjámin (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.),
Keresztély Zsófia (Budapest XIV. Kerületi Szent István Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Több versenyző az AB felezőpontját F-fel, a CF egyenes és $A'B'$ metszéspontját F'-vel jelölve azt bizonyította be, hogy F' felezi az $A'B'$ szakaszt.

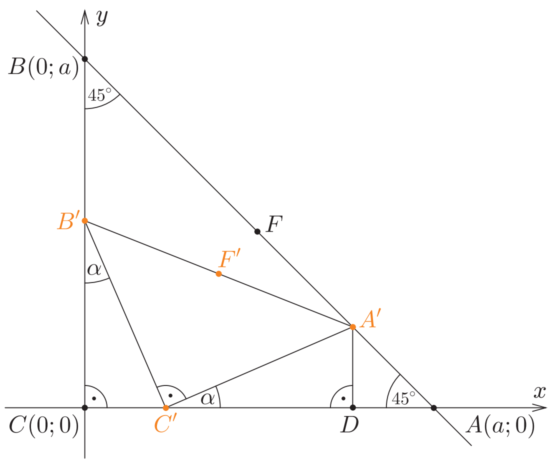
Így oldotta meg több más versenyző mellett *Fehérvári Donát* (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.), *Juhász-Molnár Erik* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.), *Achyut Bharadwaj* (Bangalore, Geetanjali Olympiad School, 11. évf.) és *Diaconescu Tashi* (Kolozsvár, Spark Hybrid International High School, 9. évf.).

IV. megoldás. Helyezzük az ábrát a derékszögű koordináta-rendszerbe úgy, hogy a C pont legyen az origó, az A pont az x-tengely pozitív felén helyezkedjen el, koordinátái legyenek $A(a;0)$, a B pont pedig az y-tengely pozitív felén helyezkedjen el. Ekkor a B koordinátái a feltételek miatt $B(0;a)$, az AB szakasz F felezőpontjának koordinátái pedig

$$F\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right). \tag{3}$$

Ezzel az elhelyezéssel a C' és B' pontok az x, illetve y tengelyeken lesznek, koordinátáik legyenek $C'(c';0)$, illetve $B'(0;b')$, ahol $0<c'<a$ és $0<b'<a$, az A' pont pedig az $y=-x+a$ egyenletű AB egyenesen van.

Tekintsük a *4. ábrát,* amelyen $C'B'C\sphericalangle=\alpha$ és az A' pontból merőlegest állítottunk az x-tengelyre, a merőleges talppontját D-vel jelöltük.



4. ábra

A $C'B'C\sphericalangle$ és $A'C'D\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek, ezért nagyságuk egyenlő, azaz

$$C'B'C\sphericalangle=A'C'D\sphericalangle=\alpha.$$

Ebből következik, hogy a $C'B'C$ és az $A'C'D$ derékszögű háromszögek hasonlók, és a $C'A'=C'B'$ feltétel miatt egybevágók is. Eszerint $C'D=b'$ és $A'D=c'$, tehát az A' pont koordinátái

$$A'(c'+b';c'). \tag{4}$$

Az (4) összefüggés és $B'(0;b')$ felhasználásával az $A'B'$ szakasz F' felezőpontjának koordinátái

$$F'\left(\frac{c'+b'}{2};\frac{c'+b'}{2}\right). \tag{5}$$

Az ABC háromszög C pontbeli belső szögfelezőjének egyenlete $y=x$. Ezen az egyenesen minden olyan pont rajta van, amelynek első és második koordinátája egyenlő, ezért (3) és (5) szerint erre az egyenesre illeszkedik az AB szakasz F, és az $A'B'$ szakasz F' felezőpontja, valamint a $C(0;0)$ pont is.

Melján Dávid Gergő (Kecskemét, Katona József Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A megoldást küldő versenyzők döntő többsége nem foglalkozott annak igazolásával, hogy az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögbe a feladat feltételeinek megfelelően írt $A'B'C'$ háromszög létezik. Ennek bizonyítását szigorúan véve a feladat szövege sem írta elő. Ugyanakkor például a *IV. megoldás* lehetőséget ad arra, hogy eljárást adjunk az $A'B'C'$ háromszög szerkesztésére és ezzel létezésének igazolására.

Ehhez vegyük fel az AC oldalon a C' pontot úgy, hogy C' az AC oldalon legfeljebb $\frac{AC}{2}$ távolságra legyen C-től. Ekkor a feladat jelöléseivel $CC' = c'$. Ezzel az $AD = c'$ szerint egyértelműen kijelölhető a D pont helye, így pedig az AB oldalon az A' pont is. A B' pontot ezután BC oldalon a B pontból kiindulva az $BB' = 2c'$ alapján szerkeszthetjük meg, ebből következően $CB' = DC' = AC - 2c'$, hiszen $AC = BC$.

Ezzel a szerkesztéssel a $C'B'C$ és $A'C'D$ derékszögű háromszögek egybevágók, így egyrészt $A'C' = B'C'$, másrészt $B'C'A'\sphericalangle = 90°$, tehát $A'B'C'$ a feladatnak megfelelő háromszög lesz.

Ha C és C' azonosak, vagyis $c' = 0$, akkor könnyen belátható, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egybeesnek. Ha pedig $c' = \frac{AC}{2}$, akkor ugyancsak egyszerűen igazolható, hogy A', illetve C' az AB, illetve AC oldalak felezőpontjai, a B', illetve C azonos pontok. Ebben a két esetben is létezik a feladatnak megfelelő $A'B'C'$ háromszög.

2. A koordináta-geometriai megoldást adó versenyzők legtöbbször a *IV. megoldás* szerinti elhelyezést választották.

Licsik Zsófia (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) megoldásában az ABC háromszög C csúcsát az origóba helyezte, és az AB szakasz felezőmerőlegesének az y-tengelyt választotta úgy, hogy az A és B pontok második koordinátái pozitívok legyenek. Ilyen elhelyezés után már csak azt kellett bizonyítania, hogy az $A'B'$ szakasz felezőpontjának első koordinátája 0, hiszen a C pont és az AB szakasz felezőpontjának első koordinátája nyilvánvalóan 0.

Összesen 104 dolgozat érkezett. 3 pontos 51, 2 pontos 11, 1 pontos 24, 0 pontos 13 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat, 1 dolgozat nem volt értékelhető, mert üres lapot küldött be.

Megjegyzések a beküldött dolgozatokkal kapcsolatban.

a) A beküldött megoldások többsége maximális pontszámot kapott. Ezek legnagyobb része a fenti négy megoldás valamelyikét, vagy nagyon hasonló bizonyítási eljárást tartalmazott. Volt két olyan megoldás is, amely a Menelaosz-tételt alkalmazta, egy versenyző pedig a feladatot a komplex számsíkon értelmezve oldotta meg.

b) Néhány dolgozatban apróbb hiányosságok fordultak elő, a hiba mértékétől függően ezek a dolgozatok 1 vagy 2 pontosak lettek. Azok a megoldások, amelyek felhasználták a bizonyítandó állítást, általában 0 pontot kaptak, legfeljebb 1 pontot akkor szerezhettek, ha a dolgozatban olyan részlet jelent meg, amely a helyes megoldásban is előfordult.

c) Azokra a dolgozatokra, amelyekhez a versenyző nem készített ábrát, a *KöMaL* versenykiírása értelmében a javító 0 pontot adott.

B. 5274. *Az $a<b$ pozitív egészek szorzata négyzetszám. Mutassuk meg, hogy van olyan x pozitív egész, amelyre $a\leqslant x^2\leqslant b$.*

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Legyen $ab=n^2$. A számtani–mértani közepek közti egyenlőtlenség miatt $\frac{a+b}{2}>n$ (hiszen $a\neq b$). Így $a+b>2n$, vagyis

$$a+b\geqslant 2n+1,$$

$$a-2n+b\geqslant 1,$$

$$\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2\geqslant 1,$$

$$\sqrt{b}-\sqrt{a}\geqslant 1.$$

Tehát a $\left[\sqrt{a},\sqrt{b}\right]$ intervallum legalább egység hosszú, ezért kell lennie benne egésznek (hiszen két szomszédos egész különbsége 1); legyen ez az egész k.

Ekkor $\sqrt{a}\leqslant k\leqslant\sqrt{b}$, azaz $a\leqslant k^2\leqslant b$, és készen vagyunk.

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 12. évf.)

101 dolgozat érkezett. 5 pontos 58, 4 pontos 2, 3 pontos 2, 2 pontos 8, 1 pontos 10, 0 pontos 16 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (759–763.)

K. 759. Egy kilencfős társaságról tudjuk, hogy mindenki pontosan négy másik embert ismer a társaság tagjai közül. (Az ismeretség kölcsönös.)

a) Lehetséges-e, hogy a társaság tagjai között bármely két embernek van közös ismerőse?

b) Igaz-e, hogy egy ilyen társaság tagjai között bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy van közös ismerősük?

K. 760. Az $A(2;4)$, $B(6;4)$, $C(4;10)$ háromszöget az $x=a$, majd az $y=2$ egyenesre tükrözzük.

a) Mennyi a két tükrözés után kapott csúcsok második koordinátáinak összege?

b) Mennyi a értéke, ha a két tükrözés után kapott csúcsok első koordinátáinak összege 36?