

Megjegyzések a $\sigma_1\sigma_2$ — földmodellhez

MÁRTON PÉTER*

A dolgozat a földmagexcentricitás magyarázatára Barta György által felvetett $\sigma_1\sigma_2$ -földmodell statikus nehézségi erőterének, valamint a modellben lehetséges excentricitás mértékének számítását tartalmazza.

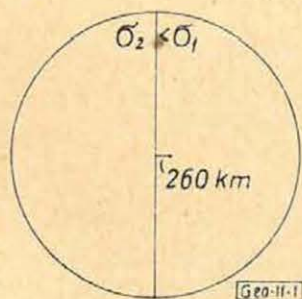
В работе рассматривается вопрос о вычислении статического поля силы тяжести для модели Земли σ_1, σ_2 , принятой д-ром Барта Д. для объяснения эксцентricности ядра Земли, а также о вычислении степени возможной эксцентricности для данной модели.

Der Verfasser erläutert die Berechnung des statischen Schwerfeldes des Erdmodells σ_1, σ_2 welches Gy. Barta um die Excentricität des Erdkernes zu erklären, aufgenommen hat. Es wird auch die mögliche Excentricität für dieses Modell berechnet.

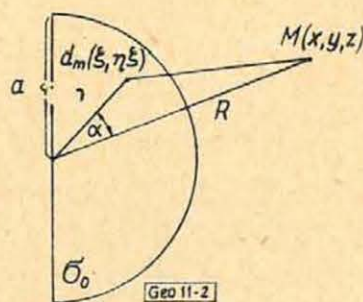
Bevezetés

Dr. Barta György 1962 március 9-én előadást tartott a Magyar Geofizikusok Egyesületében a földmag általa feltételezett excentricitásának okáról. A magexcentricitás magyarázatára azzal a feltevessel él, hogy „nemcsak a a földmag fekszik excentrikusan, hanem a Föld többi része sem teljesen homogén és a Földet felépítő övek anyagában nagy térfogatrészekre kiterjedő csekély mértékű sűrűségkülönbség van...”. Ebből az alapgondolatból kiindulva, a Földet két, külön-külön homogén σ_1 , ill. σ_2 sűrűségű félgömbből (a továbbiakban $\sigma_1\sigma_2 =$ modell) teszi össze és bizonyos szimmetriatulajdonságokat kihasználó számítással kimutatja, hogy ha a sűrűség az egyik oldalon az átlagosnál egy ezreléssel kisebb és a másikon ugyanannyival nagyobb, akkor a maximális nyomás pontja 260 km-rel tolódik el a nagyobb sűrűségű gömb felé (1. ábra). Ez az érték jó egyezésben van a mágneses adatokból kapott excentricitással. Ezt az eredményt kvalitatív formában már előbb, az Egyesület 1961. évi őszi ankétján is közölte Barta György, „Újabb adatok a Föld háromtengelyűségének és a földmágneses tér excentricitásának kapcsolatáról” c. előadásában, amely a Magyar Geofizika 1962. 1–2. számában nyomtatásban is megjelent.

Barta Gy. e tárgyban végzett kutatásainak érdekessége megragadta figyelmemet, megkíséreltem számításainak általánosítását, hogy a $\sigma_1\sigma_2$ -modellről teljesebbek legyenek ismereteink. Az általánosított számítások egyrészt a modell belsejében a maximális nyomású pont helyzetének meghatározására,



1. ábra



2. ábra

* Eötvös L. Tudományegyetem, Geofizikai Tanszék

másrészt a model potenciálterének kiszámítására irányulnak. E két feladat megoldására elegendő a belső és külső potenciálok ismerete.

A $\sigma_1\sigma_2$ -model potenciálja

A 2. ábrán látható σ_0 sűrűségű félgömb potenciálja a félgömbön kívüli $M(x, y, z)$ pontban: $R > \rho$

$$V_k = \frac{1}{R} \int_G \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_n(\cos \alpha) dm \quad (1)$$

alakban állítható elő, ahol az integrálást a félgömb egész tömegére kell elvégezni. $P_n(\cos \alpha)$ a Legendre-polinomokat jelenti. A többi jelölés a 2. ábrával magyarázatot nyer.

A sorfejtésben a hatodik tagig megyünk el. (Ez elegendő pontosság vizsgálatainknál.) Ekkor a potenciál $R > \rho$ esetén

$$V = \frac{2}{3} \pi \sigma_0 a^3 \frac{1}{R} + \frac{1}{4} \pi \sigma_0 a^4 \frac{z}{R^3} + \frac{1}{48} \pi \sigma_0 a^6 \frac{3x^2z + 3y^2z - 2z^3}{R^7} + \frac{1}{1536} \pi \sigma_0 a^8 \frac{45z(x^2 + y^2)^2 - 120z^3(x^2 + y^2) + 24z^5}{R^{11}} \quad (2)$$

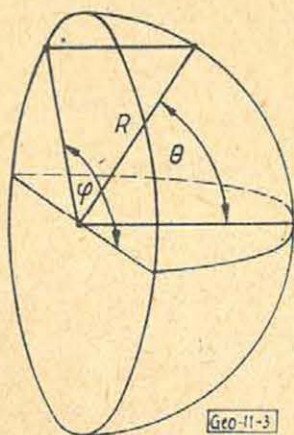
Két, σ_1 , ill. σ_2 külön-külön homogén anyageloszlású félgömb külső pontjában ($R > \rho$), a potenciált (2) segítségével előállíthatjuk.

Legyen $\sigma_1 > \sigma_2$, továbbá $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma$ és $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \Delta\sigma$, vagyis

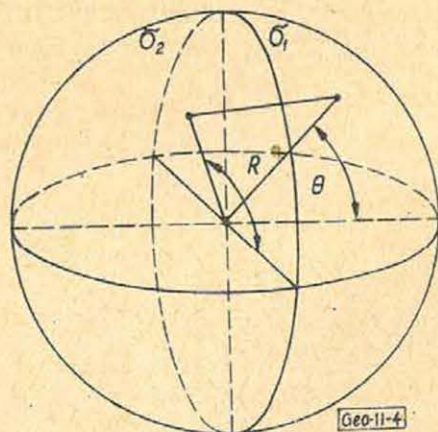
$$\sigma_1 = \sigma + \Delta\sigma, \quad \sigma_2 = \sigma - \Delta\sigma.$$

Gömbi koordináták bevezetésével a $\sigma_1\sigma_2$ - modell potenciálja tetszőleges külső pontban (jelölések a 3. ábrán)

$$V = \frac{4}{3} \pi \sigma \frac{a^3}{R} + \frac{1}{2} \pi \Delta\sigma \frac{a^4}{R^2} + \frac{1}{24} \pi \Delta\sigma \frac{a^6}{R^4} (3 \cos \Theta - 5 \cos^3 \Theta) + \frac{1}{256} \pi \Delta\sigma \frac{a^8}{R^6} (63 \cos^5 \Theta - 70 \cos^3 \Theta + 15 \cos \Theta). \quad (3)$$



3. ábra



4. ábra

Az előbbihez hasonló számítással kaphatjuk meg a potenciál értékét a $\sigma_1\sigma_2$ -modell tetszőleges belső pontjában (4. ábra).

$$\begin{aligned}
 U = & 2\pi\sigma\left(a^2 - \frac{1}{3}R^2\right) + 2\pi\Delta\sigma\left(a - \frac{3}{4}R\right)R \cos \Theta + \\
 & + \left\{\frac{1}{12}\pi\Delta\sigma\left[1 - \left(\frac{R}{a}\right)^3\right] + \frac{1}{24}\pi\Delta\sigma R^2\right\}(3 \cos \Theta - 5 \cos^3 \Theta) + \\
 & + \left\{\frac{1}{160}\pi\Delta\sigma\left[1 - \left(\frac{R}{a}\right)^5\right] + \frac{1}{256}\pi\Delta\sigma R^2\right\}(63 \cos^5 \Theta - 70 \cos^3 \Theta + 15 \cos \Theta).
 \end{aligned} \quad (4)$$

Az excentricitás számolása

Az „a” sugarú $\sigma'(R, \Theta)$ sűrűségű gömb belsejében, középpontjától R_0 távolságra a nyomást a

$$p(R_0, \Theta) = \int_{R_0}^a g(R_0, \Theta) \sigma'(R, \Theta) dR \quad (5)$$

összefüggés szolgáltatja. Ha azt kérdezzük, hogy hol helyezkedik el a maximális nyomás pontja a $\sigma_1\sigma_2$ -modellben, akkor (5) szerint meg kell határoznunk a $g(R, \Theta)$ függvényt.

$$\begin{aligned}
 g(R, \Theta) = & -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{4}{3}\pi\sigma R + \pi\Delta\sigma(3R - 2a) \cos \Theta + \\
 & + \left\{\frac{1}{4}\pi\Delta\sigma\frac{R^2}{a^3} - \frac{1}{12}\pi\Delta\sigma R\right\}(3 \cos \Theta - 5 \cos^3 \Theta) + \\
 & + \left\{\frac{1}{32}\pi\Delta\sigma\frac{R^4}{a^5} - \frac{1}{128}\pi\Delta\sigma R\right\}(63 \cos^5 \Theta - 70 \cos^3 \Theta + 15 \cos \Theta).
 \end{aligned} \quad (6)$$

Rögzítsük Θ értékét, legyen $\Theta=0$, akkor $\sigma'(R, \Theta) = \sigma + \Delta\sigma$. Ezek mellett a feltételek mellett az (5) összefüggés

$$p(R_0, 0) = \int_{R_0}^a g(R, 0) (\sigma + \Delta\sigma) dR \quad (7)$$

alakba megy át, ahol

$$g(R, 0) = \frac{4}{3}\pi\sigma R + \pi\Delta\sigma\left(\frac{149}{48}R - 2a\right) - \frac{1}{2}\pi\Delta\sigma\frac{R^2}{a^3} + \frac{1}{4}\pi\Delta\sigma\frac{R^4}{a^5} \quad (8)$$

A (7) és (8) formulák szerkezetéből látszik, hogy a nyomásnak azon a helyen van maximuma, ahol a $g(R, 0)$ függvény eltűnik, azaz a $g(R, 0) = 0$. Ha a (8) képlet alapján ezt a helyet megkeressük, akkor a gravitációs közeppontra azt kapjuk, hogy az a nagyobb sűrűségű félgömb felé tolódik el ~ 9600 m-rel, ha Barta Gy. nyomán $\sigma = 1000\Delta\sigma$ -t és „a” = 6400 km-t veszünk fel. Ez a pont előző megfontolásunk szerint egyben a maximális nyomás pontja is.

A modell nivófelületeinek számolása a (3) és (4) formulák segítségével történik. Két nivófelületet számoltunk ki. A külső nivófelületen a potenciál értéke egyenlő a $\sigma_1\sigma_2$ -modell $R=a$ és $\Theta=\pi$ helyén levő potenciállal, azaz (3)-ból

$$V_{\Theta=\pi}^{R=a} = \frac{4}{3}\pi\sigma a^2 - \pi\Delta\sigma a^2 \frac{43}{96} - \text{dal.}$$

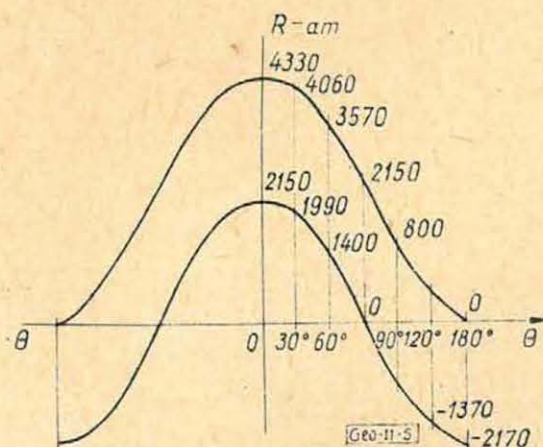
A belső nivófelületen a potenciál értéke egyenlő a homogén σ sűrűségű $\left(\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)$, „ a ” sugarú gömb felszínén levő potenciállal.

A számítás részletezése nélkül közöljük a nivófelületek pontjainak (R) gömbtől való eltérését ($R-a$), $\sigma=1000\Delta\sigma$ és „ a ”=6400 km esetén.

Külső nivófelület		Belső nivófelület	
$\pm \Theta^\circ$	$(R-a)m$	$\pm \Theta^\circ$	$(R-a)m$
0	~ 4330	0	~ 2150
30	~ 4060	30	~ 1990
60	~ 3570	60	~ 1400
90	~ 2150	90	0
120	~ 800	120	~ (-1370)
180	0	180	~ (-2170)

(5. ábra): $(R-a) = f(\Theta)$

A nivófelületek pontjainak meghatározására közelítő számítást alkalmaztunk. Ezért nem lehetséges a modell egyenlítői és meridiánmetszetének lapultság értékét méter pontosan megadni. Az eredményekből azonban látszik, hogy a modell szimmetriája folytán egyforma, egyenlítői, ill. meridián nivófelület metszet lapultság-értéke közel van a zérushoz és legfeljebb méter nagyságrendű.



5. ábra

1. Egy esetleges 300 km nagyságú magexcentricitás magyarázatára a $\sigma_1\sigma_2$ modellben nem elegendő a $\sigma = 1000\Delta\sigma$ feltétel. Nagyobb sűrűségkülönbség ($\sigma = 30\Delta\sigma$) felvétele megoldja a kérdést. Ilyen sűrűségkülönbség feltételezésének értelme azonban eldöntendő.

2. Figyelemre méltó az a tény, hogy ezrelékes sűrűségeltérés alig változtatja meg a nívófelület gömbalakját. Nagyobb sűrűségeltérések nagyságrendként egy nagyságrenddel növelik a nívófelület lapultságát.

Kiegészítés

Márton Péter: „Megjegyzés a $\sigma_1 \sigma_2$ földmodellhez” c. értekezéséhez

BARTAGYÖRGY

Márton Péter dolgozatában a $\sigma_1 \sigma_2$ földmodell sztatikus nehézségi erőterének sajátágaival foglalkozik. Kimutatja, hogy a maximális nyomás pontja $\pm 1/1000$ -es sűrűségkülönbség esetén kb. 10 km-rel tolódik el a geometriai középponttól ebben a földmodelben és az inhomogén gömb nívófelülete méteres nagyságrendi eltéréssel gömb marad.

Első megállapítása szerint a nyomáspont helyzete nem olyan érzékeny a sűrűség-változásra, mint ahogy azt első hozzávetőleges számításaim alapján feltételeztem. Ez az eredmény felhívja a figyelmet arra, hogy a modell ebben a formában túlságosan merev a földmagexcentricitás jelenségének közvetlen magyarázatához.

Vizsgáljuk meg ebből a szempontból H. Jeffreys és K. F. Bullen alapján a nyomásváltozás elosztását a mélységgel (G. Fanslau: Geomagnetismus und Aeronomie III. köt. 322. o.).

Mélység	Nyomás	Mélység	Nyomás
33 km	0,009 $\frac{\text{din}}{\text{cm}^2} 10^{12}$	5200 km	3,32 $\frac{\text{din}}{\text{cm}^2} 10^{12}$
500 „	0,174 „	5400 „	3,42 „
1000 „	0,39 „	5600 „	3,50 „
2000 „	0,88 „	5800 „	3,56 „
3000 „	1,47 „	6000 „	3,61 „
4000 „	2,40 „	6200 „	3,63 „
5000 „	3,17 „	6371 „	3,64 „

A táblázatból látható, hogy a nyomás a Föld középpontja környezetében alig változik és a maximális nyomáspont helye éppen a nyomásgörbe maximum-jellege miatt meglehetősen határozatlan. A geometriai középponttól 100 km-re a nyomás a teljes nyomásnak alig ezredrészével változik, kis nyomás aszimmetria tehát a maximális nyomás helyét viszonylag nagy mértékben megváltoztathatja. A nyomástér aszimmetriája tovább változtatja a sűrűség-eloszlást, ezzel deformálja a gyorsulás-teret és tovább növeli a kezdeti alap excentricitást. A táblázatból az is látható, hogy az aszimmetria modellben valószínűleg fel kell használni a Föld sűrűség-növekedését a mélységgel. Ez természetesen az amúgy sem egészen egyszerű számítások bonyolultságát lényegesen fokozza. A vizsgálatot a siker reményében úgy lehet megindítani, hogy a földmag köré különböző sűrűségű gömbhéjakból belülről építjük fel az egész inhomogén Földet.

Segítségét nyújt ebben Márton Péter második megállapítása, amely szerint különböző sűrűségű félgömbökből összerakott gömb gravitációs nívófelülete továbbra is nagy közelítéssel gömb marad, vagyis nagy térfogatra kiterjedő jelentős inhomogénitás sem okoz lényeges földalak-változást.