

sen und ganzen den gleichen Verlauf. Charakteristisch ist der bevorzugte Durchlass bei 500–600 Hz, 1100 Hz und 2000 Hz. Die Spektrogramme wurden bei gleicher Aufnahme- und Wiedergabeverstärkung gewonnen. Um die unterschiedlichen Schlagintensitäten zu eliminieren, wurden alle Übertragungsfunktionen $Y(f)$ auf die bei 2 m bezogen. Das Ergebnis zeigt *Bild 9*. Auf der Ordinate ist hier zusätzlich die Übertragungsdämpfung b in Neper angegeben. Die Kurven weisen auf den Bandfiltercharakter des im Untersuchungsbereich anstehenden Gneises hin. Als Resonanzfrequenz kann 2,2 kHz abgelesen wer-

den. Auf die Deutung der Oberschwingungen soll in diesem Zusammenhang nicht eingegangen werden, da nur die sich durch die Registrierung der Abbremsvorgänge ergebenden neuen Möglichkeiten der Hammerschlagseismik angedeutet werden sollten.

Herrn Prof. Dr Meisser danke ich für seine Anregungen und die Genehmigung, diese Arbeit aus dem Institut für Angewandte Geophysik der Bergakademie Freiberg hier veröffentlichen zu dürfen.

Litteratur:

Grammel, R.: Das Abbremsen drehsymmetrischer Körper beim Fall auf Sand. Ing. Arch. 17 (1949), S. 219–222.

Néhány megjegyzés a nehézségi erő második deriváltjainak számítási képleteihez

Az előadás első része a második deriváltak azon számítási képleteinek általános levezetését mutatja be, melyeknél a második deriváltat koncentrikus körök mentén mért nehézségi értékek középértékének bizonyos együtthatókkal szorzott összegével képezik. Ilyen általános képletből a számításba kerülő körök számának, sugarának és együtthatójának különböző megválasztásával az irodalomból ismert és számos más formula kiadódik. E formulának alapján nyert értékeket az előadó összehasonlítja gömb és henger alakú testek hatásával.

A második részben az előadó az együtthatók határait adja meg, amikor a formulák kiszámítása Peters és Elkins mintája szerint a legkisebb négyzetek módszerével történik, miközben a súlyegyütthatókat változónak tekinti. Megmutatja, hogy az 1. táblázatban felsorolt 25 formula a súlyegyütthatók megfelelő megválasztásával nyerhető.

В первой части доклада рассматривается общий вывод формул для вычисления вторых производных, при помощи которых вторые производные получаются умноженной на определенные коэффициенты суммой средних величин силы тяжести, измеренных по концентрическим окружностям. Показано, каким образом получается ряд формул, известных из литературы, а также и некоторые другие формулы, путем соответствующего подбора количества, радиуса и коэффициентов используемых окружностей. Привод сопоставления величин, получаемых этими формулами, с эффектом сферических и цилиндрических тел.

Во второй части доклада определяются пределы коэффициентов для случаев, когда формулы выводятся методом наименьших квадратов по способу Петерса и Элькинса, а весовые коэффициенты принимаются переменными. Показано, что 25 формул, приведенных в таблице 1 можно получить соответствующим подбором весовых коэффициентов.

Der erste Teil des Vortrags beschäftigt sich mit der allgemeinen Ableitung solcher Berechnungsformeln der zweiten Derivierten, bei denen man die mit gewissen Koeffizienten multiplizierten Mittelwerte der an den einzelnen konzentrischen Kreisen erhaltenen Schwerewerte summiert. Es wird ausgeführt, wie man eine Reihe der in der Literatur angegebenen Formeln und auch andere bekommt, wenn man die Anzahl und Halbmesser der Kreise, und die Koeffizienten entsprechend wählt. Die durch diese Formeln erhaltenen Zahlenwerte werden mit den Wirkungen kugelförmiger und zylindrischer Körper verglichen.

Im zweiten Teile werden die Grenzen der Koeffizienten bestimmt, falls man die Formeln mittels der Methode der kleinsten Quadrate in der von Peters und Elkins angegebenen Weise ableitet, und die Gewichts-Koeffizienten als veränderliche betrachtet werden. Es wird gezeigt, dass man die in Tabelle I. angeführten 25 Formeln durch entsprechende Wahl der Koeffizienten erhalten kann.

Einige Bemerkungen zu den Formeln für die Berechnung der zweiten Schwereableitungen

B. BERÁNEK*

In den letzten Jahren erschien in der geophysikalischen Literatur eine Reihe von Arbeiten, welche sich mit Ableitung und Bewertung der Formeln für die Berechnung der zweiten Ableitungen befassen. Die Anwendbarkeit der einzelnen Formeln wird an verschiedenen Modellen des Schwerfeldes bewiesen. Die vorliegende Arbeit bringt einen Versuch eine mehr allgemeine und anschauliche Bewertung der einzelnen Formeln derart durchzuführen, dass die Beziehungen zwischen den Koeffizienten in den Formeln gesucht werden und einen Versuch die Formeln in einer allgemeineren Weise abzuleiten.

Eine Reihe von Formeln für die Berechnung der zweiten Ableitungen der Schwere lässt sich in nachstehender Form schreiben:

$$(g_{zz})_p = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^N A_i \bar{g}_i(k_i r), \quad (1)$$

- wobei r = die Maschenweite des quadratischen Gitternetzes (Gitterabstand),
 $k_i r$ = Radius des i -ten Kreises, wenn $k_0=0$, $k_1=1$,
 $\bar{g}_i(k_i r)$ = der mittlere Schwerewert auf dem Kreise mit dem Radius $k_i r$,
 A_i = numerische Konstanten, die die einzelnen Formeln charakterisieren,
 N = Anzahl der Kreise.

Das Limit der Gleichung (1) für $r \rightarrow 0$ konvergiert zum wahren Werte der zweiten Schwereableitung g_{zz} . Aus dieser Bedingung kann die Abhängigkeit zwischen den Koeffizienten A_i ($i=0, 1, 2 \dots N$) abgeleitet werden.

* RN Dr Břetislav Beránek
Hauptgeophysiker der ČND, Nationalunternehmen,
Betrieb Geofysika, Pobebradova 102 - B r n o.

Der mittlere Schwerewert auf dem Kreise mit dem Radius r kann durch die bekannte Entwicklung ausgedrückt werden:

$$\bar{g}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i} r^{2i}, \quad (2)$$

wobei

$$c_2 = -\frac{1}{4}g_{zz}, \quad c_0 = g(0).$$

Wenn man Gleichung (2) in Gleichung (1) einsetzt und zum Limit für $r_N \rightarrow 0$ übergeht, erhält man:

$$(g_{zz})_p = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{g_0}{r^2} \sum_{i=0}^N A_i - \frac{g_{zz}}{4} \sum_{i=0}^N A_i k_i^2 + \sum_{j=2}^{\infty} c_{2j} r^{2(j-1)} \sum_{i=0}^N A_i k_i^{2j} \right\} \quad (3)$$

Das dritte Glied in der Klammer (3) konvergiert offenbar nach Null. Das zweite Glied ist endlich. Will man erreichen, dass das erste Glied nicht über alle Grenzen wächst ist es erforderlich, dass

$$\sum_{i=0}^N A_i = 0 \quad (4)$$

sei.

Vom zweiten Glied ergibt sich dann

$$\sum_{i=0}^N A_i k_i^2 = -4 \quad (5)$$

Ausdrücke (4) und (5) sind die Grundbeziehungen zwischen den Koeffizienten A_i . In Gleichung (1) gibt es daher $N-1$ unabhängige Koeffizienten.

Die gefundene Beziehung zwischen den Koeffizienten A_i gewährt manche Adjustierungen der Gleichung (1) für die Berechnung der zweiten Ableitungen.

Bezeichnen wir die zweite Schwereableitung, die bloss aus den Schwerewerten auf dem i -ten Kreise berechnet wird, als

$$(g_{zz})_{pi} = \frac{4}{k_i^2 r^2} [g_0 - \bar{g}(h_i r)], \quad (6)$$

so lässt sich Gleichung (1) folgenderweise schreiben:

$$(g_{zz})_p = \sum_{i=1}^N e_i (g_{zz})_{pi}, \quad (7)$$

wobei

$$e_i = -\frac{k_i^2 A_i}{4}; \quad (8)$$

es gilt dann:

$$\sum_{i=1}^N e_i = 1. \quad (9)$$

Gleichung (7) bedeutet daher, dass die Formel für die Berechnung der zweiten Schwereableitungen eine Gewichtsumme der Werte der zweiten Ableitungen $(g_{zz})_{p_i}$ ist, die aus den Schwerewerten auf einzelnen Kreisen mit den Radien $k_i r$ für $i = 1, \dots, N$ berechnet werden. Die Gewichtskoeffizienten e_i können positiv oder negativ sein, aber die Summe derselben muss Eins sein. Einzelne Formeln lassen sich dann nach Grösse der Gewichtskoeffizienten e_i bewerten, denn diese Koeffizienten geben den Anteil der Schwerewerte auf einzelnen Kreisen an dem Totalwerte der Schwereableitung.

In der Praxis benutzt man meistens Formeln mit 3 Kreisen. Man wählt üblicherweise $k_2 = \sqrt{2}$, $k_3 = \sqrt{5}$. Mit Hinsicht auf die Beziehungen zwischen den Koeffizienten A_i lässt sich Gleichung (1) für $N = 3$ in Abhängigkeit bloss von zwei Koeffizienten, z. B. A_2, A_3 ausdrücken. Man kann diese folgenderweise schreiben:

$$(g_{zz})_p = \frac{1}{r^2} \{ (4 + A_2 + 4A_3)g_0 - (4 + 2A_2 + 5A_3)\bar{g}_1(r) + A_2\bar{g}_2(\sqrt{2}r) + A_3\bar{g}_3(\sqrt{5}r) \}. \quad (10)$$

Infolgedessen kann man auch die Eigenschaften der Formeln für die zweiten Ableitungen in Abhängigkeit bloss von zwei Koeffizienten untersuchen. Die einzelnen Formeln können in einem Koordinatensystem A_2, A_3 graphisch als Punkte dargestellt werden.

In Tabelle I sind einige Formeln angegeben, die in der Praxis benutzt werden. Sie sind durch ihre Koeffizienten A_i und e_i bestimmt.

Bei den ersten drei Formeln handelt es sich eigentlich um eine *Netteltonsche* Formel für verschiedene Radien.

Formeln 4, 5, 6 sind Mittelwerte der zweiten Schwereableitungen, die für einzelne Kreise obigen Beziehungen gemäss berechnet werden.

Formeln 8, 9, 10 werden immer aus zwei Gleichungen (2) von der Entwicklung für den mittleren Schwerewert berechnet, in welcher die ersten drei Glieder betrachtet werden, mit der Voraussetzung, dass $c_0 = g(0)$. Formel (8) wird von *Henderson-Zietz* angegeben.

Formel (11) wird aus drei Gleichungen (2) für den mittleren Schwerewert $\bar{g}(r)$ mit Berücksichtigung von 4 ersten Gliedern errechnet. Die Verfasser derselben sind *Henderson* und *Zietz*.

Ähnlicherweise werden Formeln 12, 13, 14, 15 berechnet mit der Voraussetzung, dass g_0 unbekannt ist. Das Verfahren für die Berechnung der Formeln 8–15 wird von *Rosenbach* angegeben.

Weitere Formeln 16–21 sind nach einzelnen Verfassern mit Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate angegeben. Formel 23 lässt sich berechnen durch die Kombination verschiedener Verfahren nach *Sharpe*, *Fullerton* und *Elkins* – mit Benutzung des quadratischen Gitternetzes (*Hergerdt*).

Formel 24 und 25 folgt aus den Überlegungen im nachstehenden Absatz über den mittleren Fehler in der Berechnung von $(g_{zz})_p$.

Die einzelnen Formeln können den Gewichtskoeffizienten e_1, e_2, e_3 gemäss bewertet werden. Diese Koeffizienten geben – wenn wir erwägen, dass die Summe derselben nach Gleichung (9) der Eins gleich ist – den Anteil der einzelnen partiellen Ableitungen $(g_{zz})_{p_i}$ an dem Totalwerte von $(g_{zz})_p$. Die ersten 3 Formeln brauchen nicht einzeln analysiert werden. In Formeln 4–7 ist der Anteil

Nr	Bezeichnung	A_0	A_1	A_2	A_3	e_1	e_2	e_3
1	<i>Nettleton</i> (r)	4	-4	0	0	1	0	0
2	" (r $\sqrt{2}$)	2	0	-2	0	0	1	0
3	" (r $\sqrt{5}$)	$\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	0	1
4	Mittelwert: (r; r $\sqrt{2}$)	3	-2	-1	0	0,5	0,5	0
5	(r $\sqrt{2}$; r $\sqrt{5}$)	$\frac{7}{5}$	0	-1	$-\frac{2}{5}$	0	0,5	0,5
6	(r; r $\sqrt{5}$)	$\frac{12}{5}$	-2	0	$-\frac{2}{5}$	0,5	0	0,5
7	(r; r $\sqrt{2}$; r $\sqrt{5}$)	$\frac{34}{15}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{10}{15}$	$-\frac{4}{15}$	0,3333	0,3333	0,3333
8	Direkte Ausrechnung, g_0 bekannt:							
	(r; r $\sqrt{2}$)	6	-8	2	0	2	-1	0
9	(r; r $\sqrt{5}$)	$\frac{24}{5}$	$-\frac{25}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1,25	0	-0,25
10	(r $\sqrt{2}$; r $\sqrt{5}$)	$\frac{42}{15}$	0	$-\frac{50}{15}$	$\frac{8}{15}$	0	1,6667	-0,6667
11	(r; r $\sqrt{2}$; r $\sqrt{5}$)	$\frac{102}{15}$	$-\frac{150}{15}$	$\frac{50}{15}$	$-\frac{2}{15}$	2,5	-1,6667	0,1667
12	Direkte Ausrechnung, unbekanntes g_0							
	(r; r $\sqrt{2}$)	0	4	-4	0	-1	2	0
13	(r; r $\sqrt{5}$)	0	1	0	-1	-0,25	0	1,25
14	(r $\sqrt{2}$; r $\sqrt{5}$;	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	-0,6667	1,6667
15	(r; r $\sqrt{2}$; r $\sqrt{5}$)	0	7	-8	1	-1,75	4	-1,25
16	<i>Elkins</i> I.	$\frac{16}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{10}{15}$	0,0333	0,1333	0,8333
17	II.	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{6}{7}$	-0,0714	0	1,0714
18	III.	$\frac{22}{31}$	$\frac{8}{31}$	$-\frac{6}{31}$	$-\frac{24}{31}$	-0,0645	0,0967	0,9678
19	<i>Grosse</i> I.	$\frac{558}{163}$	$-\frac{254}{163}$	$-\frac{374}{163}$	$\frac{70}{163}$	0,3896	1,1472	-0,5368
20	II.	$\frac{558}{181}$	$-\frac{128}{181}$	$-\frac{518}{181}$	$\frac{88}{181}$	0,1768	1,4309	-0,6077
21	<i>Rosenbach</i>	$\frac{12}{3}$	$-\frac{9}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{1}{3}$	0,75	0,6667	-0,4167
22	<i>Baranov</i>	$\frac{144}{25}$	$-\frac{185}{25}$	$-\frac{40}{25}$	$\frac{1}{25}$	1,85	-0,8	-0,05
23	<i>Elkins, (Sharpe und Fullerton)</i>	$\frac{102}{33}$	$-\frac{24}{33}$	$-\frac{94}{33}$	$\frac{16}{33}$	0,1818	1,4242	-0,6060
24		0,201	0,540	0,278	-1,019	-0,1351	-0,1390	1,2741
25		0,352	0,468	0,122	-0,942	-0,1165	-0,0612	1,1781

der einzelnen Kreise gleichmässig. In Formeln 8, 9, 11 ist der Wert $(g_{zz})_p$ insbesondere durch den mittleren Schwerewert von dem ersten Kreise beeinflusst. Von den bekannten *Elkinsschen* Formeln ist es ersichtlich, dass von grösster Bedeutung für den Totalwert der zweiten Ableitung der dem dritten Kreise entsprechende Wert $(g_{zz})_p$ ist. Bei den Formeln von *Grosse* äussert sich der Einfluss des zweiten Kreises. In der Formel von *Rosenbach* und besonders von *Baranov* ist der Wert des ersten und zweiten Kreises von grösster Bedeutung.

Die Zweckmässigkeit der einzelnen Formeln lässt sich weiter daraus bewerten, welchen Teil des wahren Wertes der zweiten Schwereableitung sie an geben in den Höhepunkten der Schwereanomalien, die durch einen kugel- oder zylinderförmigen Körper hervorgerufen werden, ähnlich wie es *Elkins*, *Hergerdt*, *Grosse* durchführen.

Man berechnet das Verhältnis des angenäherten und wahren Wertes der zweiten Schwereableitung mit Bezug auf $t = \frac{r}{h}$, wobei $r =$ Gitterabstand, $h =$ Tiefe des Mittelpunktes einer Kugel oder der Achse eines horizontalen Zylinders. Für den Fall einer Kugel bezeichnet man dieses Verhältnis $\alpha(t)$, für eine Zylinder $\beta(t)$. $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ sind lineare Funktionen der Werte A_2, A_3 die graphisch dargestellt ein System von Geraden ergeben.

Ähnlicherweise lässt sich die Anwendbarkeit der einzelnen Formeln dem Fehler gemäss bewerten, den man in der Berechnung der zweiten Ableitung mit Hinsicht auf die Genauigkeit des ursprünglichen Schwerfeldes begeht. Dabei betrachtet man die Anzahl der Punkte auf den einzelnen Kreisen, die Grösse des Gitterabstandes r und den Fehler in Ablesung des Schwerwertes $\pm e$. Man kann den Fehler mit Beziehung auf die Koeffizienten A_2, A_3 ausdrücken.

Die Formeln, die den wahren Werten nahe Ergebnisse leisten, — d.h. die Formeln, welchen grosse Werte von α und β entsprechen — besitzen gleichzeitig grosse Fehler δ in der Berechnung der zweiten Ableitung. Für die geeignetsten Formeln ist es erforderlich, dass das Verhältnis des Mittelwertes und der Grösse von α oder β am geringsten ist. Zum Zwecke der Vereinfachung wurde das Verhältnis

$$k(A_2, A_3) = \frac{\delta^2}{\alpha(1)} \text{ betrachtet.}$$

Es sind die *Elkinsschen* Formeln, Formeln 3 und 13, bzw. die abgeleitete Formel 24 und Formel 25, welche dem kleinsten Werte von k entsprechen. Als wenig geeignet für die Berechnung der zweiten Ableitungen erscheinen die Formeln vom *Henderson-Zietz* Nr. 8, 11 und Formel 22 von *Baranov*.

Im zweiten Teil befasst sich die vorliegende Arbeit mit der Aufgabe, in welchen Grenzen sich die Koeffizienten A_i ändern können, falls man die Formeln für die Berechnung der zweiten Ableitungen mittels der Methode der kleinsten Quadrate in der von *Peters* und *Elkins* angegebenen Weise ableitet, wenn man die variablen Gewichtskoeffizienten betrachtet.

Zuerst wird man diese Aufgabe allgemein lösen für den Fall, dass die Anzahl der Kreise mit den bekannten mittleren Schwerewerten dem N gleich ist. Benutzt man die Methode von *Peters*, bestimmt man von den bekannten Werten $\bar{g}(k_j r)$ für $j = 1, \dots, N$ mittels der Methode der kleinsten Quadrate den Koeffi-

zienten c_2 in der Entwicklung (2) für $\bar{g}(r)$, wo M Glieder betrachtet werden. Man kann zwei Fälle unterscheiden: in der Entwicklung $\bar{g}(r)$, 1. $g_0 = c_0$, 2. $g_0 \neq c_0$.

Falls $g_0 = c_0$, gibt es M unbekannte Koeffizienten c_{2i} ($i = 1, 2 \dots M$). Dabei muss man $M < N$ wählen. Die normale Gleichung (Summe der Quadrate der Korrekturen) W wird folgende Form haben:

$$W = \sum_{j=1}^N \alpha_j \left[\bar{g}_j(k_j r) - g_0 - \sum_{i=1}^M c_{2i} (k_j r)^{2i} \right]^2,$$

wobei $\alpha_j =$ Gewichtungskoeffizienten mit Voraussetzung, dass $\alpha_j \geq 0$.

Aus der Bedingung, dass der Wert W minimal sei, lässt sich ein System von M Gleichungen ableiten, von welchen man den Koeffizienten c_2 berechnen kann. Für den Koeffizienten A_i erhält man folgende Ausdrücke:

$$A_0 = \frac{4}{\Delta} \sum_{\pi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_M)} \alpha_{\varepsilon_1} \dots \alpha_{\varepsilon_M} \begin{vmatrix} k_{\varepsilon_1}^2 \dots k_{\varepsilon_M}^2 \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_M}^{2M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \dots 1 \\ k_{\varepsilon_1}^4 \dots k_{\varepsilon_M}^4 \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_M}^{2M} \end{vmatrix},$$

wobei $\pi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_M) =$ Kombinationen von M Elementen (Nummern) aus N Elementen (Nummern).

$$A_t = -\frac{4\alpha_t}{\Delta} \sum_{\substack{\pi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{M-1}) \\ \varepsilon_i \neq t}} \alpha_{\varepsilon_1} \dots \alpha_{\varepsilon_{M-1}} = 1 \begin{vmatrix} k_t^2, k_{\varepsilon_1}^2 \dots k_{\varepsilon_{M-1}}^2 \\ k_t^{2M}, k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_{M-1}}^{2M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{\varepsilon_1}^4 \dots k_{\varepsilon_{M-1}}^4 \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_{M-1}}^{2M} \end{vmatrix}.$$

In den angeführten Formeln bedeutet

$$\Delta = \sum_{\pi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_M)} \alpha_{\varepsilon_1} \dots \alpha_{\varepsilon_M} \begin{vmatrix} k_{\varepsilon_1}^2 \dots k_{\varepsilon_M}^2 \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_M}^{2M} \end{vmatrix}^2$$

Ähnlicherweise kann man für den Fall $c_0 \neq g_0$ folgende Ausdrücke für die Koeffizienten A_i ableiten.

$$A_0 = \frac{4\alpha_0}{\Delta} \sum_{\pi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_M)} \alpha_{\varepsilon_1} \dots \alpha_{\varepsilon_M} \begin{vmatrix} k_{\varepsilon_1}^2 \dots k_{\varepsilon_M}^2 \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_M}^{2M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \dots 1 \\ k_{\varepsilon_1}^4 \dots k_{\varepsilon_M}^4 \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_M}^{2M} \end{vmatrix}$$

$$A_i = -\frac{^i\alpha_i}{\Delta} \left\{ \alpha_0 \sum_{\substack{\pi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{M-1}) \\ \varepsilon_j \neq i}} \alpha_{\varepsilon_1} \dots \alpha_{\varepsilon_{M-1}} \begin{vmatrix} k_i^2, k_{\varepsilon_1}^2 \dots k_{\varepsilon_{M-1}}^2 \\ \vdots \\ k_i^{2M}, k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_{M-1}}^{2M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{\varepsilon_1}^4 \dots k_{\varepsilon_{M-1}}^4 \\ \vdots \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_{M-1}}^{2M} \end{vmatrix} - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{\pi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_M) \\ \varepsilon_j \neq i}} \alpha_{\varepsilon_1} \dots \alpha_{\varepsilon_M} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_i^2, k_{\varepsilon_1}^2 \dots k_{\varepsilon_M}^2 \\ \vdots \\ k_i^{2M}, k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_M}^{2M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ k_{\varepsilon_1}^4 \dots k_{\varepsilon_M}^4 \\ \vdots \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_M}^{2M} \end{vmatrix} \right\},$$

wobei

$$\Delta = \alpha_0 \sum_{\pi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_M)} \alpha_{\varepsilon_1} \dots \alpha_{\varepsilon_M} \begin{vmatrix} k_{\varepsilon_1}^2 \dots k_{\varepsilon_M}^2 \\ \vdots \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_M}^{2M} \end{vmatrix}^2 + \\ + \sum_{\pi(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{M+1})} \alpha_{\varepsilon_1} \dots \alpha_{\varepsilon_{M+1}} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ k_{\varepsilon_1}^2 \dots k_{\varepsilon_{M+1}}^2 \\ \vdots \\ k_{\varepsilon_1}^{2M} \dots k_{\varepsilon_{M+1}}^{2M} \end{vmatrix}^2$$

In allen Formeln setzt man voraus: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_M$.

Aus der Bedingung, dass die Gewichtskoeffizienten nur positive Werte annehmen können, findet man die Grenzen, in welchen sich die Koeffizienten $A_i (i=0, 1 \dots N)$ bewegen. Diese Aufgabe wird man für einen Sonderfall $N=3$ lösen.

Nachdem für $N=3$ nur zwei Koeffizienten A_i unabhängig sind, wird man nur die Beschränkung der Koeffizienten A_2, A_3 folgern. Die Ergebnisse — wie auch im ersten Teil dieser Arbeit — können in dem Koordinatensystem A_2, A_3 graphisch dargestellt werden. Die Beschränkung der Werte A_2, A_3 wird in der Ebene A_2, A_3 den Bereich begrenzen, in welchem die Formeln $(g_{zz})_p$ Abhängigkeit von den variablen Gewichtskoeffizienten α_j liegen.

Wenn man ein Bereich bezeichnet, in welchem die Formeln $(g_{zz})_p$ für $g_0 = c_0; M=1$ liegen, so der stellt Bereich ein Dreieck mit den Gipfeln von folgenden Koordinaten vor: $(-2, 0), (0, 0), (0, -\frac{4}{5})$.

Für den Fall $g_0 = c_0; M=2$. Es ist eine Gerade der Gleichung $A_2 + 10 A_3 - 2 = 0$, die mit den Punkten $(-\frac{10}{3}, \frac{8}{15}), (2, 0)$ begrenzt ist.

Für den Fall $M=3$ erhält man einen Punkt mit den Koordinaten $(\frac{10}{3}, -\frac{2}{15})$ welcher auf der vorhergehenden Geraden liegt und Formel 11 angibt.

Ebenso im Fall $c_0 \neq g_0$ ergibt sich für $M=1$ ein Bereich der Formeln $(g_{zz})_p$.

Für $M=2$ erhält man einen Bereich der Formeln $(g_{zz})_p$ in der Form einer Abszisse der Gleichung $A_2 + 10 A_3 - 2 = 0$, die durch die Punkte $(-8, 1)$ $(0,0)$ begrenzt ist.

Für den Fall $M=3$, der sich schon der Lösung durch die Methode der kleinsten Quadrate entzieht, ergibt sich Punkt $\left(\frac{10}{3}, -\frac{2}{15}\right)$ welcher auf der Geraden von dem vorhergehenden Falle liegt und Formel 11 darstellt.

Alle Formeln liegen in den gefundenen Bereichen und lassen, sich einheitlich mittels der Methode der kleinsten Quadrate ableiten wenn man geeignete Gewichtskoeffizienten α_j wählt.