Homogén és inhomogén testek tömeghatásának kifejezése felületi integrálok segítségével

KOLBENHEYER TIBOR, Kosice (Csehszlovákia)

Általános alakú testek által keltett nehézségi és mágneses erőtérnek potenciálját és térerősségét, valamint ezek parciálisait térfogati integrálképletek szolgáltatják. Minthogy ezek gyakorlati megoldása általában háromszori bonyolult integráláshoz vezet, e térfogati integrálokat Gauss tétele segítségével felületi integrálokra lehet visszavezetni. Ezáltal a szükséges integrációk számát eggyel csökkenthetjük, ami a gyakorlati számítások szempontjából jelentős előny.

A szerző ebben az előadásában régebbi vizsgálataihoz kapcsolódva, amikor homogén testek tömeghatásának meghatározásával foglalkozott, ezúttal olyan inhomogén testekkel foglalkozik, amelyek tömegeloszlása a mélységgel együtt lineárisan változik. Speciálisan, a tetszőleges keresztmetszetű függőleges alkotójú egyenes hasábok erőfüggvényeinek kiszámítását olyan vonalmenti integrálásokra vezeti vissza, amelyeknél az integrálás útja az alapfelületek kerülete.

Потенциалы и напряженность гравитационного и магнитного полей, вызываемых телами обычной формы, а также их частные производные, выражаются обьемными интегралами. Ввиду того, что практическое решение последних требует проведения трехкратного сложного интегрирования, с использованием теоремы Гаусса эти обьемные интегралы сводятся к интегралам по поверхности. Благодаря этому количество необходимых операций по интегрированию снижается, что представляет собой значительное преимущество при практическом проведении вычислений.

Исходя из своих предыдущих исследований, направленных на определение возмущающего эффекта однородных тел, в настоящей статье автор рассматривает однородные тела, распределение массы которых изменается с глубиной по линейному закону. Вычисления функций прямых призм с вертикальной образующей и любого поперечного сечения сводятся к линейному интегрированию, при котором путь интегрирования совпадает с окружностью основной плоскости.

Potentiale, Feldstärken des durch allgemein geförmter Körper erregten gravimetrischen und magnetischen Kraftfeldes und deren partielle Derivierten sind durch Volumenintegralformeln gegeben. Da aber deren praktische Lösung durch dreifache komplizierte Integrierungen gemacht werden sollte, führt man diese Volumenintegrale mit Hilfe eines Gaussischen Satzes auf Flächenintegrale zurück, wodurch die Anzahlt der notwendigen Integrationen mit eins vermindert werden kann, was vom Gesichtspunkte der praktischen Rechnung einen bedeutenden Vorteil hat.

Sich an seine frühere Untersuchungen über die Bestimmung der Massenwirkungen homogener Körper anknüpfend, beschäftigt sich der Verfasser in diesem Vortrag mit inhomogenen Körpern, wo auch die Massenverteilung mit der Tiefe linear ändert. Speziell, führt er die Berechnung gerader Prismen mit vertikalen Erzeugenden und beliebigen Querschnitten auf Linienintegrale zurück, wo der Weg der Integrale längs der Umfänge der Grundflächen vorangeht.

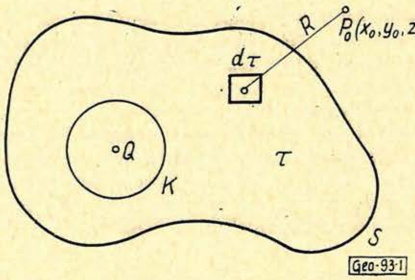
A geofizikai kutatómódszerek mai állásánál a kiértékelés módszereinek fontos szerepük van a különböző testek gravitációs és mágneses terének kiszámításában. Ismeretes, hogy a nehézségi tér szigorú megoldását az

$$U = \varkappa \int \frac{\varrho d\tau}{R} \tag{1}$$

képlet fejezi ki, ahol U a nehézségi potenciált, $\varkappa$ a gravitációs állandót jelenti, továbbá τ a térfogat, ϱ a $d\tau$ térfogatelem által meghatározott P pontban a sűrűség és R e pontnak a P_0 ponttól való távolsága, amelyben a test nehézségi hatását vizsgáljuk *(1. ábra)*. A gravitációs hatást az

$$\vec{F} = \varkappa \int \frac{\varrho \vec{R}}{R^3} d\tau \tag{2}$$

vektoregyenlet fejezi ki, ahol $\vec{R} = \overrightarrow{P_0P}$ és $\vec{F}$ a térerősség vektora. A potenciálnak a derékszögű egyenesvonalú (x, y, z) koordináták szerinti második parciális differenciálhányadosait, amelyek a gravitációs módszerek gyakorlati alkal-



1. ábra

mazásában igen fontos szerepet játszanak, hasonló formulák fejezik ki. Ha a második parciálisokat ismerjük, akkor homogén mágnesezésű testekre a Poisson-féle egyenletrendszerrel a mágneses térerősséget könnyen kifejezhetjük.

A feladat gyakorlati megoldása, amint az (1) és (2) egyenletből látható, háromszoros integráláshoz vezet, ami erősen megnehezíti a számításokat. Egyes esetek kivételével, melyeknél az integrálás ismert, zárt formában adott függvények segítségével vagy zárt sorok alakjában végezhető el, általában közelítő eljárásokkal számítjuk ki a nehézségi, ill. mágneses anomáliákat. Jelenleg ilyen eljárások egész sora van gyakorlati alkalmazásban, de újabban Talwani – Ewing, valamint Goguel és Morgan – Grant eljárása került előtérbe.

A jelen dolgozat célja, hogy megmutassuk, hogyan lehet egyszerűbb esetekben, éspedig nem-homogén testek esetén az (1), (2) képletekben szereplő térfogati integrálokat az ismert Gauss-tétel segítségével felületi integrálokra visszavezetni és ezáltal a szükséges integrálások számát eggyel csökkenteni, ami gyakorlati számításoknál jelentős előnnyel járhat. Ha ui. tekintetbe vesszük, hogy a P_0 fixpontra vonatkozóan a távolságnak a változó P pont koordinátái szerint képzett Laplace-kifejezése

$$\Delta R = \frac{2}{R}$$

akkor a homogén test nehézségi potenciálját kifejező egyenlet a következő alakú:

$$U = \frac{\varkappa\varrho}{2} \int_\tau \Delta R d\tau = \frac{\varkappa\varrho}{2} \oint_S \frac{\partial R}{\partial n} dS \tag{3}$$

ahol S a test felszíne, dS egy eleme. A (2) képlet átalakításánál vegyük tekintetbe, hogy az integrandust az

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \mathrm{grad}_p \left(\frac{1}{R} \right)$$

alakban írhatjuk fel, ahol a P index azt jelenti, hogy a gradiens képzése a változó P pont koordinátái szerint történik. Ha ezt a kifejezést a (2) egyenletbe helyettesítjük, akkor a Gauss-tétel alkalmazásával a térerősség vektorát az

$$\vec{F} = -\varkappa\varrho \oint_S \frac{\vec{n}dS}{R} \tag{4}$$

egyenlettel fejezhetjük ki, ahol $\vec{n}$ az S felület külső normálisát jelenti. Ha $\vec{F}$-et X, Y, Z összetevőire bontjuk, a (4) egyenlet helyett az

$$\left. \begin{aligned} X = -\varkappa\varrho \oint_S \frac{\cos(nx)dS}{R}, \quad Y = -\varkappa\varrho \oint_S \frac{\cos(ny)dS}{R}, \\ Z = -\varkappa\varrho \oint_S \frac{\cos(nz)dS}{R} \end{aligned} \right| \tag{5}$$

skaláris egyenleteket nyerjük.

E rövid bevezetés után, amelyben a homogén testekre vonatkozó legfontosabb alapképleteket foglaltuk össze, térjünk át néhány egyszerű nem homogén eset vizsgálatára. Természetesen a nehézségi anomáliák értelmezésénél csak ritkán alkalmazunk olyan elméleti modelleket, amelyeknél változó a sűrűség. Két megelőző értekezés azonban részletesen foglalkozott homogén testek tömeghatásának felületi integrálokkal való kifejezésével, ezért e téma további részletezése felesleges. Viszont néhány részleteredmény azt mutatja, hogy inhomogén testek nehézségi terének elméleti vizsgálata is vezethet gyakorlatilag felhasználható következtetésekre. E felismerés annál fontosabb, mert a nem homogén nehézségi probléma teljes megoldása a megfelelő mágneses probléma megoldását is tartalmazza és a gyakorlatban tényleg sokszor előfordulnak olyan képződmények, amelyeknek a mágnesezettsége nem egyenletes.

Egyszerűség kedvéért most azzal az esettel foglalkozunk, amelyben a $\varrho = \alpha + \beta z$ sűrűség a z mélység lineáris függvénye (α, β állandó) és a P_0 pont, amelyre a test tömeghatását kívánjuk kiszámítani, a testen kívül van. A sűrűség eloszlásának függvényét a

$$\varrho = \varrho_0 + \beta(z - z_0) \text{ vagy } \varrho_0 = \alpha + \beta z_0 \tag{6}$$

alakban fejezhetjük ki, amellyel a nehézség függőleges összetevőjére a (2) egyenlet szerint a

$$Z = \varkappa \oint_{\tau} [\varrho_0 + \beta(z-z_0)] \frac{z-z_0}{R^3} d\tau$$

$$= \varkappa\varrho_0 \int_{\tau} \frac{z-z_0}{R^3} d\tau - \varkappa\beta \int_{\tau} (z-z_0) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau \tag{7}$$

egyenletet nyerjük.

A levezetésnél tekintetbe vettük, hogy

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{z-z_0}{R^3}.$$

A (7) egyenlet jobb oldalának első tagja nyilvánvalóan a ϱ_0 sűrűségű homogén testnek megfelelő térerősség z menti összetevője és ezt a következőkben Z_0-val jelöljük. A jobb oldal második tagjában levő integrandust a következőképpen alakítjuk át:

$$(z-z_0) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_0}{R}\right) - \frac{1}{R}. \tag{8}$$

Tekintve, hogy a ϱ_0 sűrűségű test erőterének potenciálja a P_0 pontban

$$U_0 = \varkappa\varrho_0 \int_{\tau} \frac{d\tau}{R},$$

a (8) kifejezést a (7) egyenletbe téve, kapjuk:

$$Z = \frac{\beta}{\varrho_0} U_0 + Z_0 - \varkappa\beta \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_0}{R}\right) d\tau.$$

A jobb oldalon levő térfogati integrált a Gauss-tétel segítségével ismét felületi integrállá alakítjuk át és így kapjuk a

$$Z = \frac{\beta}{\varrho_0} U_0 + Z_0 - \varkappa\beta \oint_{S} \frac{z-z_0}{R} \cos(nz) dS \tag{9}$$

egyenletet.

A homogén test potenciálját és a függőleges összetevőket a (3) és (5) képlet adja meg. Ha tehát ismerjük már a homogén probléma megoldását az adott testre vonatkozólag, akkor konstans sűrűségi gradiens esetében a Z összetevő kiszámítása már csak a (9) egyenlet jobb oldalán levő felületi integrál kiszámításából áll.

Az X, Y vízszintes összetevők kiszámításánál hasonló módon lehet eljárni. A szóban forgó sűrűségeloszlásnál

$$X = \varkappa \int_\tau [\varrho_0 + \beta(z-z_0)] \frac{x-x_0}{R^3} d\tau = X_0 - \varkappa\beta \int_\tau \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z-z_0}{R}\right) d\tau, \tag{10}$$

ahol

$$X_0 = \varkappa\varrho_0 \int_\tau \frac{x-x_0}{R^3} d\tau$$

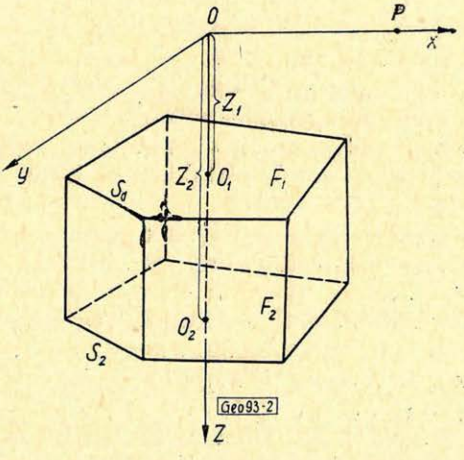
a ϱ_0 sűrűségű test gravitációs térerősségének x menti összetevőjét jelenti. A jobb oldali térfogati integrál átalakításával az

$$X = X_0 - \varkappa\beta \oint_S \frac{z-z_0}{R} \cos(nx) dS \tag{11a}$$

és

$$Y = Y_0 - \varkappa\beta \oint_S \frac{z-z_0}{R} \cos(ny) dS \tag{11b}$$

képleteket nyerjük.



2. ábra

Tetszőleges keresztmetszetű függőleges, egyenes hasábok vagy hengerek esetén a hasábok (hengerek) alapfelületére merőleges nehézségi erő összetevőinek (9) képlete igen egyszerű alakot ölt. Mivel a hasáb palástján mindenütt cos (nz) = 0 *(2. ábra)*, a felületi integrálhoz csak az F_1 felső és az F_2 alsó alapfelület járul hozzá. Mindkét felületen $z-z_0$ állandó. Legyen a felületek mélysége z_1 és z_2. A felső felületen cos (nz) = −1, az alsón cos (nz) = 1, ezért

$$\oint_S \frac{z-z_0}{R} \cos(nz) dS = (z_2 - z_0) \oint_{F_2} \frac{dS}{R} - (z_1 - z_0) \oint_{F_1} \frac{dS}{R}.$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy a homogén egységnyi felületi sűrűségű F_1, F_2 alapfelületek newtoni potenciálja a P_0 pontban

$$U_1 = \varkappa \oint_{F_1} \frac{dS}{R}, \quad U_2 = \varkappa \oint_{F_2} \frac{dS}{R} \tag{12}$$

akkor a (9) egyenletet így írhatjuk:

$$Z = \frac{\beta}{\varrho_0} U_0 + Z_0 + \beta[(z_1 - z_0)U_1 - (z_2 - z_0)U_2].$$

Megjegyezzük, hogy ebben az esetben még Z_0 is könnyen kifejezhető az U_1, U_2 pontenciállal. Ui. az (5), (9) egyenletek alapján, mivel a palást felületén most is $\cos(nz) = 0$,

$$Z_0 = \varrho_0(U_1 - U_2)$$

és így az inhomogén hasáb gravitációs intenzitásának függőleges összetevője

$$Z = \frac{\beta}{\varrho_0} U_0 + \varrho_1 U_1 - \varrho_2 U_2,$$

ahol ϱ_1, ϱ_2 a (6) sűrűségeloszlás szerint a z_1, z_2 mélységnek megfelelő sűrűséget jelenti.

A fenti U_1, U_2 potenciálok zárt görbék, mégpedig az F_1, F_2 alapfelületek kerülete mentén vett vonalas integrálokkal egyszerűen kifejezhetők. A kérdéses hasábokra tehát az inhomogén probléma általános megoldása alapján nehézség nélkül meg lehet kapni a függőleges erőösszetevőt. A vízszintes összetevők kiszámításánál figyelembe kell venni, hogy mindkét alapfelületen $\cos(nx) = 0$, $\cos(ny) = 0$ és így a (11*a*), (11*b*) képletekben az integrálás a hasáb (henger) palástjára korlátozódik.

Amint említettük, most egyszerűség kedvéért azzal az esettel foglalkozunk, amikor a P_0 hatáspont a testen kívül van. Ha ui. a térerősséget egy belső Q pontban vizsgáljuk (1. ábra), akkor az (1), (2), (7) és a további egyenletekben előforduló térfogati és felületi integrálok végtelenek lesznek. Ebben az esetben azonban külön meg kell vizsgálni, hogy vajon az integrálok valóban léteznek-e vagy pedig a levezetett képletek módosulnak-e? Itt bizonyítás nélkül említjük, hogy a (9), (11*a*), (11*b*) és a belőlük levezetett képletek a test belsejére is érvényesek. Erről úgy lehet meggyőződni, hogy először egy megfelelő a sugarú K gömbfelülettel kirekesztjük a pontot az integrálás tartományából (1. ábra) és így csupán az S és K felülettől körülvett tér hatását vizsgáljuk.

Nézzük meg, hogyan állíthatók elő a potenciál második parciálisai a (6) szerinti sűrűségeloszlásnál felületi integrálok segítségével? Mindenekelőtt

$$\begin{aligned} U_{zz} = \frac{\partial^2 U}{\partial z_0^2} &= \varkappa \int_\tau [\varrho_0 + \beta(z - z_0)] \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \left(\frac{1}{R}\right) d\tau \\ &= U_{zz}^{(0)} + \beta\varkappa \int_\tau (z - z_0) \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \left(\frac{1}{R}\right) d\tau. \end{aligned} \tag{13}$$

ahol U_{zz} itt is a ϱ_0 sűrűségű homogén test megfelelő differenciál-hányadosát jelenti. Mivel azonban a távolság a koordináta különbségek függvénye,

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Továbbá a

$$\left(z-z_0\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{z-z_0}{R} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(z-z_0)^2}{R^3}\right]$$

összefüggés miatt a (13) egyenlet a következőre módosul:

$$U_{zz} = \frac{\beta}{\varrho_0} Z_0 + U_{zz}^{(0)} - \varkappa\beta \int_\tau \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z-z_0)^2}{R^3}\right] d\tau,$$

ahol Z_0 most is a ϱ_0 sűrűségű test függőleges térerősségének függőleges összetevője. A Gauss-tétel segítségével a jobb oldali integrált felületi integrállá alakítjuk át és így az

$$U_{zz} = \frac{\beta}{\varrho_0} Z_0 + U_{zz}^{(0)} - \varkappa\beta \oint_S \frac{(z-z_0)^2}{R} \cos(nz) dS \tag{14}$$

formulát nyerjük.

U_{zx} és U_{zy} levezetése sokkal egyszerűbb. Könnyű megmutatni, hogy

$$U_{zx} = U_{zx}^{(0)} - \varkappa\beta \int_\tau (z-z_0) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z-z_0}{R^3}\right) d\tau$$

és ha a térfogati integrált ismét felületi integrállá alakíjuk át, az

$$U_{zx} = U_{zx}^{(0)} - \varkappa\beta \oint_S \frac{(z-z_0)^2}{R^3} \cos(nx) dS$$

képletet nyerjük.

Hasonlóképpen mutathatjuk meg, hogy

$$U_{zy} = U_{zy}^{(0)} - \varkappa\beta \oint_S \frac{(z-z_0)^2}{R^3} \cos(ny) dS.$$

A többi három parciálisra is könnyű hasonló formulákat levezetni. Az előzőekhez hasonló eljárással meg lehet mutatni, hogy

$$U_{xx} = U_{xx}^{(0)} - \varkappa\beta \oint_S \frac{(x-x_0)(z-z_0)}{R^3} \cos(nx) dS,$$

$$U_{yy} = U_{yy}^{(0)} - \varkappa\beta \oint_S \frac{(y-y_0)(z-z_0)}{R^3} \cos(ny) dS,$$

$$U_{xy} = U_{xy}^{(0)} - \varkappa\beta \oint_S \frac{(y-y_0)(z-z_0)}{R^3} \cos(ny) dS.$$

A fenti hasábalakú test esetén (2. ábra) a (14) egyenlet felületi integrálja ismét a két alapfelületre vonatkozó integrálra fog redukálódni. De ebben az esetben, amint könnyen belátható, az F_i felületnek megfelelő gravitációs erő függőleges összetevője

$$Z_i = \varkappa \oint_{F_i} \frac{z_i - z_0}{R^3} dS \quad (i = 1,2) \tag{15}$$

lesz, ha a felületet homogénnek és egységnyi felületi sűrűségűnek tekintjük. A jelen esetben, amint könnyen kimutatható,

$$U_{zz}^{(0)} = \varrho_0(z_1 - z_2) \tag{16}$$

és végül a (14), (15), (16) egyenletek szerint

$$U_{zz} = \frac{\beta}{\beta_0} z_0 + \varrho_1 z_1 - \varrho_2 z_2$$

ahol ϱ_1, ϱ_2 ismét az alapfelületi mélységeknek megfelelő sűrűségek.

Láttuk, hogy Z_1, Z_2 a két poligon gravitációs erejének az alapfelületre merőleges összetevői. E mennyiség kiszámításán nyugszanak a Talwani – Ewing-féle, és a Goguel-féle módszerek. Az említett értekezések formulái igen alkalmasak a homogén és nem homogén hasábalakú testek függőleges gradienseinek meghatározására.

Gravitációs kutatás

Thyssen-Bornemisza, S.: Gravitational Exploration and the Principle of Equivalence. = Geophysics, 1964. 29. köt. 2. sz. 301 – 303. l.

Thyssen-Bornemisza, S.: Determination of Bouguer Density in Shallow Holes. = Geophysics, 1964. 29. köt. 3. sz. 445 – 446. l.

Naudy, H.: Propriétés de filtrage des formules utilisées pour la transformation des cartes gravimétriques. = Geophys. Prosp., 1964. 12. köt. 1. sz. 65 – 79. l.

Szelényi, Gy.: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Gravitations-Anomalien für beliebig geformte inhomogene Massen mit dem Digital-Rechner. = Geophys. Prospec., 1964. 12. köt. 2. sz. 225 – 227. l.

Groten, E.: On the Correlation of Gravity with Tidal Anomalies. = Geophys. Prospect., 1964. 12. köt. 4. sz. 434 – 439. l.

Golizdra, G. Ja.: Számítási rendszerek kétdimenziós potenciálterek analitikai folytatásához, Lagrange-féle interpolációval. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 2. sz. 228 – 235. l.

Golizdra, G. Ja.: Számítási rendszerek kétdimenziós potenciálterek analitikai folytatásához, interpolálás alapján. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 6. sz. 903 – 910. l.

Zsarkov, V. N.: A Föld gravitációs anomáliái és hőmérsékleti deformációi. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 4. sz., 441 – 455. l.

Kartvelisvili, K. M.: A gravitációs anomáliák átszámítása a vertikális gradiens anomáliáivá. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 8. sz., 1171 – 1177. l.

Bulah, Je. G. – Konsztantyinov, Sz. V.: Egyenletmegoldó szerkezet közvetlen gravitációs feladat megoldására. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 8. sz., 1221 – 1222. l.

Raszpopov, O. M.: A potenciál második vertikális deriváltjának kiszámítása az első derivált tere alapján. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 8. sz., 1213 – 1222 . l.

Gyevicin, V. M.: Numerikus módszer kétdimenziós potenciálterek alsó féltérbe való analitikus folytatására. I. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 9. sz., 1376 – 1388. l.

Gyevicin, V. M.: Numerikus módszer kétdimenziós potenciálterek analitikus folytatására. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 11. sz., 1645 – 1673. l.

Sztrahov, V. N.: A potenciálterek észlelt értékeinek kiegyenlítése. I. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 10. sz., 1479 – 1498. l.

Sztrahov, V. N.: A potenciálterek észlelt értékeinek kiegyenlítése. II. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 11. sz., 1634 – 1653. l.

Kazinszkij, V. A.: A Föld belső gravitációs terének vizsgálata. = Izv. Akad. Nauk, 1964. 12. sz., 1832 – 1836. l.