

Szűrőelmélet alkalmazása a gravitációs interpretációban

MESKÓ ATTILA

ÖSSZEFOGLALÁS

Az utóbbi években mind nagyobb jelentőséget kapott a gravitációs értelmezésben a Bouguer anomália-térképek további átalakítása. Fontos feladattá vált a javasolt eljárások objektív, kísérletezéstől független jellemzése, összehasonlítása. Erre szükségünk van annak megállapításában, hogy adott esetben melyiket használjuk. Mindegyik eljárás lineáris transzformáció. Emiatt az eljárás analóg lineáris szűrők működésével. A bemenetnek az átalakítandó, a kimenetnek az átszámított térkép felel meg. A szűrő kétdimenziós átviteli függvénye, vagy – mivel az eljárások zérus fázistolásúak – amplitúdó-karakterisztikája alkalmas az egyértelmű jellemzésre.

A dolgozat a szűrőelmélet hasznosításának alapjait tartalmazza. Kiszámítjuk néhány módszer és eljárás átviteli függvényét, meghatározzuk a vizsgálandó frekvenciatartományt, ezzel kapcsolatban foglalkozunk diszkrét pontokban való mérés hatásaival. Alkalmazásként bebizonyítottunk egy aszimptotikus összefüggést a reziduál és második derivált számítás között. Meghatározzuk a körálagképzésben felhasználható pontok számát és összehasonlítjuk néhány, második derivált számításra adott képlet átlagos amplitúdó-karakterisztikáját.

За последние годы в интерпретации данных гравиметрической разведки все большее значение приобретает дальнейшее преобразование карт аномалий Буге. Важной задачей стала объективная, независимая от экспериментации характеристика предложенных способов, сравнение их. Это нужно нам для определения того, какой из них будет применен в каждом данном случае. Каждый способ является линейным преобразованием. Поэтому способ аналогичен работе линейных фильтров. Входу фильтра соответствует подвергаемая перестройке, а выходу – пересчитанная карта. Двумерная функция преобразования фильтра или – т.к. способы имеют нулевой фазовый сдвиг – амплитудная характеристика пригодны для однозначного определения.

Работа содержит основы применения теории фильтров.* Вычислена зависимость функций преобразования нескольких методов и способов, определен подвергаемый исследованию диапазон частот, в связи с чем разбирается влияние измерений в дискретных точках. В качестве применения доказывается асимптотическая зависимость между вычислением остаточных аномалий и второй производной. Определяется количество точек необходимых в составлении осреднения по окружности и сравниваются средние амплитудные характеристики нескольких формул данных для вычисления второй производной.

In den letzten Jahren hat in der gravimetrischen Interpretation die weitere Umformung der Bouguer Anomalie-Karten immer grössere Bedeutung gewonnen. Die objektive, von Versuchen unabhängige Charakterisierung und der Vergleich der vorgeschlagenen Verfahren wurde eine wichtige Aufgabe. Dies ist notwendig in der Wahl, welches Verfahren im gegebenen Fall benutzt werden soll. Jedes Verfahren ist eine lineare Transformation. Deshalb ist ein solches Verfahren der Wirkung der linearen Filtern analog. Dem Eingang entspricht die zu transformierende, dem Ausgang die umgerechnete Karte. Die zwei dimensionale Übertragungsfunktion des Filters oder – da die Verfahren keine Phasenverschiebung besitzen – die Amplitudencharakteristik ist zum eindeutigen Kennzeichnen geeignet.

Die Abhandlung enthält die Grundlagen der Anwendungsmöglichkeit der Filtertheorie. Wir berechnen die Übertragungsfunktion einiger Methoden und Verfahren, bestimmen das zu untersuchende Frequenzbereich, und im Zusammenhang damit befassen wir uns mit der Wirkung der in diskreten Punkten erfolgten Messungen. Als Anwendung beweisen wir einen asymptotischen Zusammenhang zwischen der Residualberechnung und der Rechnung der zweiten Derivierten. Wir bestimmen die Anzahl der Kreismitteverbildung anzuwendenden Punkte und vergleichen die durchschnitlichen Amplituden-Charakteristiken einiger für die Berechnung der zweiten Derivierten gegebenen Formeln.

1. Bevezetés

A gyakorlati gravitációs kutatások célja: szerkezetek kimutatása. A mért értékrendszerből tehát eltávolítandók azok a hatások, amelyek nincsenek kapcsolatban szerkezetekkel. Ennek végrehajtására mérési eredmények alapján megrajzolt izo-térképeinket új térképpé kell transzformálnunk. Az elmúlt tizenöt-húsz év alatt különböző grafikus, majd numerikus eljárások alakultak ki a transzformáció végrehajtására. Ezek egy-egy nagy csoportja valamilyen elvi átalakítás megvalósítását tűzi ki célul. *Módszernek* nevezem a továbbiakban az elvi átalakítást: pl. második derivált számítás, analitikai folytatás számítás stb. *eljárásnak* a megvalósítására konstruált együtthatosorozat alkalmazását. Ezzel a szóhasználattal élve pl. a második derivált módszer végrehajtására ismeretesekek a *Henderson–Zietz, Peters, Elkins, Baranov, Rosenbach, Haalck, Sharpe* stb. eljárások.

Az együtthatosorozatok alkalmazásának sikere változó. Lényegesen eltérő térképeket adnak, még ha ugyanazt a célkitűzést óhajtják is megvalósítani. Néhány ábrát mutatok be Grosse (1957) nyomán. Az 1. ábrán az eredeti térkép, a 2., 3., 4., 5. ábrákon a *Henderson–Zietz, Rosenbach, Haalck, Elkins* levezette eljárások együtthatosorozatával átalakított térképek láthatók. Mindegyik szerző a második derivált számítását tűzte ki célul, a transzformált térképek között mégis jelentősek a különbségek.

A módszerek, illetve eljárások összehasonlításához, értékük megbecsüléséhez eddig számított vagy ténylegesen mért térképekre való alkalmazásuk sikerét szokták vizsgálni. (Nettleton, 1954; Grosse, 1957; Facsinay, 1958; Rosenbach, 1957; Jung, 1961; Daneš, 1962.) A kísérletek két sorozatát szokták elvégezni, arra vonatkozóan, hogy a konstruált együtthatosorozat

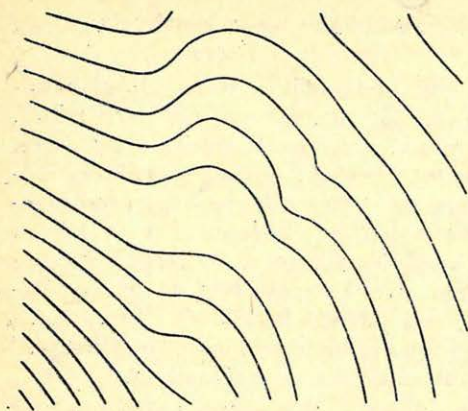
1. milyen jól közelíti a módszer célkitűzését – szintetizált térképekre való alkalmazással;

2. hogyan válik be a gyakorlatban: milyen kapcsolat található az eljárással átalakított térkép és a kutató szerkezet között – tényleges, mért térképekre való alkalmazással.

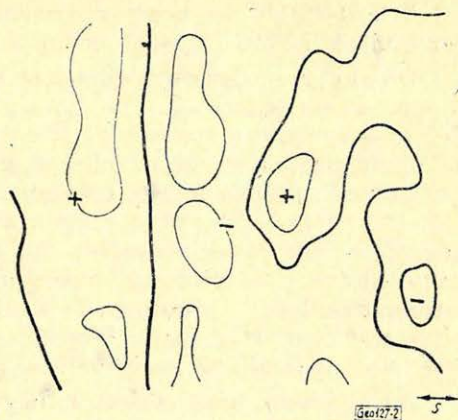
Részletesebben:

1. Kiszámítják valamilyen egyszerű alakú ható terét (gömb, henger, hasáb) a hatótól bizonyos távolságban felvett vonatkoztatási síkban. Ezt a síkot tekintik x, y síknak. Miután a $g(x, y, z)$ analitikai alakját ismerik, nem okoz nehézséget a *módszernek megfelelő* térkép analitikai alakjának előállítását. Ezután a teret a vonatkoztatási síkban leíró folytonos függvényt diszkrét adatrendszerre alakítják. Alkalmazva az egyes *eljárásokat* a közelítő értékek diszkrét pontokban számított adatrendszerét kapják. Ezt összevetve az exakt értékekkel következtetnek az egyes eljárások közelítésének „jószágára”.

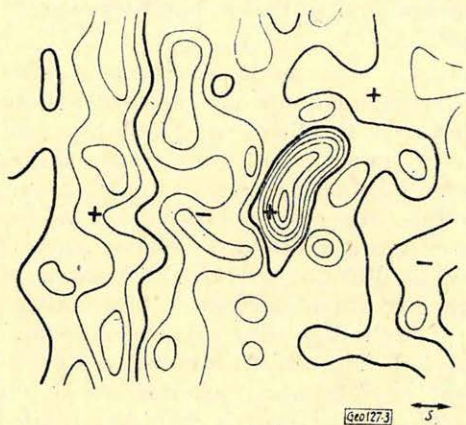
2. Olyan területet választanak ki, ahol fúrással – vagy más geofizikai módszerekkel – kielégítő ismereteket szereztek a szerkezetekről. A különböző eljárásokkal átalakított térképeket a szerkezet képével vetik össze. Azt a képletet nevezik legjobbnak, amelyik a szerkezethez legjobban hasonlító térképet szolgáltatja.



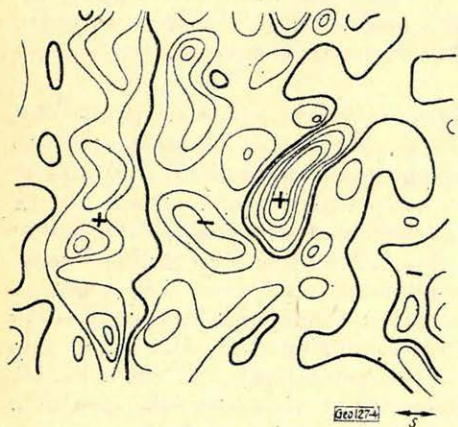
1. ábra



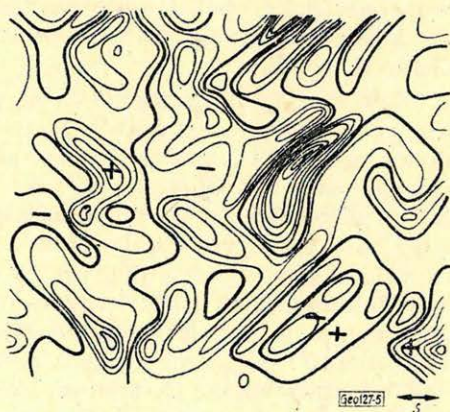
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

A tapasztalat az, hogy a vizsgálatok eredménye nem egyértelmű. Az átalakítások sikere magától az átalakítandó térképtől is függ.

De akkor az összehasonlításához nem alkalmazhatjuk, mint jósági kritériumot a transzformálás eredményességét. *Az összehasonlítás térképektől, kísérletektől független módszerét kell kidolgoznunk.* Ezzel az 1. típusú vizsgálatok esetlegességeit, kísérletező jellegét megszüntethetjük, végleges választ adhatunk arra: milyen jellegzetességei vannak az egyes eljárásoknak (módszereknek); adott módszerhez melyik eljárás a legjobb közelítés. A 2. kérdés megválaszolása jóval nehezebb. Az átalakítások sikere a térképből kiemelendő, illetve eltávolítandó hatásoktól függ. Konkrét esetben az az együttműködési rendszer lesz a legjobb, amelyik a felesleges hatást a legjobban eltávolítja, a szükségeset megtartja, illetve kiemeli. A legjobb eredményt a legjobb „illesztés” adja. Nem is található univerzálisan legjobb eljárás a 2. értelemben.

Az eljárások kísérletezéstől független összehasonlítására a szűrőelméletet használhatjuk. Az eredeti térképet is az átalakított térképet is egyértelműen jellemzi Fourier-transzformáltja vagy spektruma. (Schwarz, 1954.) Szemléletesen: annak megadása, hogy adott irányú és frekvenciájú „elemi” síkhullámfelületeket milyen amplitúdóval és fázissal kell összegeznünk ahhoz, hogy az eredeti térképet kapjuk.

A jelenleg használatos módszerek és eljárások alkalmazása az eredeti térkép *lineáris* transzformációját jelenti. Emiatt az eredeti és átalakított térkép Fourier-transzformáltjai között nagyon egyszerű kapcsolat van: az átalakított térkép Fourier-transzformáltja az eredeti térkép Fourier-transzformáltjának és a műveletre jellemző (általában komplex értékű) *átviteli függvénynek* a szorzata. Az átviteli függvény leírja a különböző frekvenciájú és irányú elemi síkhullám felületek amplitúdóinak és fázisainak a transzformáció során fellépő változásait. Az amplitúdó változásokról az *amplitúdókarakterisztika*: a komplex átviteli függvény abszolútértéke; a fázis változásokról a *fáziskarakterisztika*: a komplex átviteli függvény arkusza ad számot. A műveletekhez sokszor valós értékű átviteli függvények tartoznak. Ilyenkor a fázistolás zérus, az átviteli sajátosságokat egyértelműen jellemzi az amplitúdókarakterisztika. A térkép átalakítása *kétdimenziós lineáris szűrésnek* tekinthető. A dolgozatban tárgyalt módszerek és eljárások zérus fázistolású szűréssel egyenértékűek. A szűrőelmélet részleteinek ismertetése után az eddig számított amplitúdókarakterisztika görbéket mutatom be. Ezek a módszerek és eljárások lényeges tulajdonságaira hívják fel a figyelmet, kísérletezéstől független, egyértelmű jellemzést adnak.

Egy megjegyzés szükséges, hogy világosan lássuk, mit várhatunk egy térkép bármiféle átalakításától. A „regionális” és „reziduális” tér szétválasztása minden geofizikai, potenciáletteret mérő módszerben kívánatos. Az ideális természetesen az volna, ha a teret olyan összetevőkre bonthatnánk, amik különböző geológiai szerkezetek hatásai. Ha ezt el lehetne végezni, külön-külön vizsgálhatnánk egyes szerkezetek képét. Ilyen felbontás *nem* adható meg. Ha valamilyen potenciálfüggvénynek egy felületen felvett értékét ismerjük (most tekintsünk el attól, hogy valójában csak a felület diszkrét pontjaiban ismerjük), nem lehet levezetni egyetlen, egyértelmű tömegeloszlást (vagy más módszereknél: mágnesezettséget, elektromos töltéseloszlást), ami ezt a hatást a felületen létrehozta. (Nettleton, 1954, Skeels, 1947). Következésképpen nem várhatjuk egyetlen módszertől sem, hogy ilyen felbontást elvégezzen.

2. Gravitációs izo-térképek leírása Fourier-transzformáltjaikkal

A kétváltozós Fourier-transzformációt jelöljük F -fel:

$$G(\omega, \psi) = F \left[g(x, y) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-i(\omega x + \psi y)} dx dy \quad (2.1)$$

az inverz transzformációt F^{-1} -nel:

$$g(x, y) = F^{-1} \left[G(\omega, \psi) \right] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \psi) e^{+i(\omega x + \psi y)} d\omega d\psi \quad (2.2)$$

A $G(\omega, \psi)$ függvényt, a Fourier-transzformáltat szokás a $g(x, y)$ komplex spektrumának is nevezni.

Vegyük fel térképünk vízszintes vonatkoztatási síkjában egy x, y derékszögű koordinátarendszert. A térképet egyértelműen jellemzi egy $g(x, y)$ kétváltozós függvény megadása. Méréseink: az eredeti térből diszkrét pontokban vett minták. A térkép csak akkor egyezhet az eredeti térrel, ha a mintavételi távolság megfelelően kicsiny. Erre a kérdésre még részletesen visszatérek, de már itt ki akarom hangsúlyozni, hogy $g(x, y)$ a térképet és nem az eredeti teret leíró függvény.

Mivel a (2.1) és (2.2) integrálok létezésére kirótt feltételek (ld. pl. *G. P. Tolszov*, 1951) gravitációs térképekre mindig teljesülnek; mind a $g(x, y)$, mind a $G(\omega, \psi)$ felhasználható a térkép egyértelmű jellemzésére.

A (2.2) szemléletes jelentésének megmutatására írjuk ki a $G(\omega, \psi)$ komplexér tékű függvény valós és képzetes részét:

$$G(\omega, \psi) = P(\omega, \psi) - i \cdot Q(\omega, \psi) \quad (2.3)$$

$P(\omega, \psi)$ az eredeti függvény *koszinusz-spektruma*,

$Q(\omega, \psi)$ a $g(x, y)$ *szinuszos-spektruma*. A $P(\omega, \psi)$ páros,

a $Q(\omega, \psi)$ páratlan függvény.

Az exponenciális kifejezés az Euler-összefüggés szerint:

$$e^{i(\omega x + \psi y)} = \cos(\omega x + \psi y) + i \cdot \sin(\omega x + \psi y) \quad (2.4)$$

A (2.2) integrandusából ezekkel:

$$P(\omega, \psi) \cdot \cos(\omega x + \psi y) + Q(\omega, \psi) \cdot \sin(\omega x + \psi y) + i \cdot [P(\omega, \psi) \cdot \sin(\omega x + \psi y) - Q(\omega, \psi) \cdot \cos(\omega x + \psi y)] \quad (2.5)$$

adódik. A szögletes zárójelben páratlan függvény áll, emiatt a teljes frekvencia síkra vett integrálja zérus. El is hagyható az integrandusból. A megmaradó kifejezés így alakítható:

$$P(\omega, \psi) \cdot \cos(\omega x + \psi y) + Q(\omega, \psi) \cdot \sin(\omega x + \psi y) = \sqrt{P^2(\omega, \psi) + Q^2(\omega, \psi)} \cdot \sin[\omega x + \psi y + \Phi(\omega, \psi)] \quad (2.6)$$

amiben:

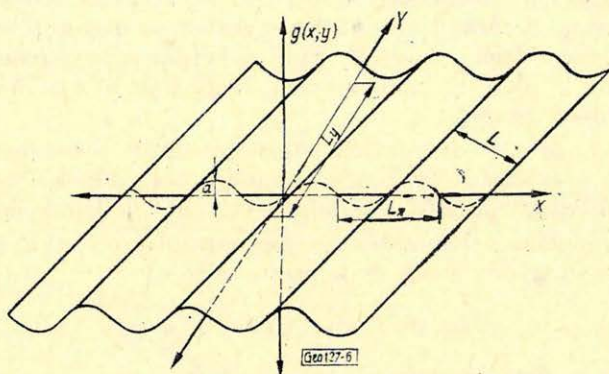
$$\Phi(\omega, \psi) = \operatorname{arctg} \frac{P(\omega, \psi)}{Q(\omega, \psi)} \quad (2.7)$$

A (2.2) integrál helyett a (2.6) felhasználásával

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{P^2(\omega, \psi) + Q^2(\omega, \psi)} \cdot \sin[\omega x + \psi y + \Phi(\omega, \psi)] d\omega d\psi \quad (2.8)$$

írható.

A (2.8) szerint a $g(x, y)$ felszín végtelen sok „elemi” hullámfelület szuperpozíciója. Utóbbiak egyenletei az $1/4\pi^2$ szorzótól eltekintve a (2.6)-tal megadott függvények.



6. ábra

Egy elemi síkhullám felület a 6. ábrán látható. Egyértelmű jellemzői a következő mennyiségek:

amplitúdó:
$$a(\omega, \psi) = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{P^2(\omega, \psi) + Q^2(\omega, \psi)} \quad (2.9)$$

fázisszög:
$$\Phi(\omega, \psi) = \operatorname{arctg} \frac{P(\omega, \psi)}{Q(\omega, \psi)} \quad (2.10)$$

hullámhossz:
$$L(\omega, \psi) = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 + \psi^2}} \quad (2.11)$$

(valódi)

irány (orientáció szöge):
$$\alpha(\omega, \psi) = \operatorname{arctg} \frac{-\omega}{\psi} \quad (2.12)$$

Az összes lehetséges (ω, ψ) értékpár a (2.11) és (2.12) egyenletekből láthatóan az összes lehetséges valódi hullámhosszú és irányítású felületeknek felel meg. Amikor a (2.1)-gyel a $G(\omega, \psi)$ transzformáltat képezzük és ezzel meghatározzuk a $P(\omega, \psi)$ és $Q(\omega, \psi)$ valós függvényeket; szemléletesen megfogalmazva: minden egyes hullámfelülethez – a (2.9)-cel leírt – amplitúdót és – a (2.10)-zel meghatározott – fázisszöveget rendelünk.

Az ω és ψ a látszólagos szögváltozási arány (látszólagos körfrekvencia) radián/egységávolságban mérve az x , illetve az y tengely mentén. A látszólagos hullámhosszak a két tengely mentén:

$$L_x = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad L_y = \frac{2\pi}{\psi}$$

A (2.11)-ből látszik, hogy a frekvenciasík

$$\omega^2 + \psi^2 = \text{const.}$$

köréhez azonos valódi frekvenciájú;

$$\frac{\omega}{\psi} = \text{const.}$$

egyeneséhez azonos irányú síkhullámok tartoznak.

3. Módszerek és eljárások, mint lineáris szűrők

Legyen a $g(x, y)$ függvényen végrehajtott, L -lel jelölt lineáris művelet végeredménye $h(x, y)$

$$h(x, y) = L[g(x, y)] \quad (3.1)$$

Különböző módszerek, illetve eljárások más-más módon specializálják az L műveletet. Ha a jobboldal Fourier-transzformáltját két tényező szorzatává tudjuk alakítani és ezek közül az egyik az eredeti függvény Fourier-transzformáltja: bebizonyítottuk, hogy a művelet lineáris szűrés, s egyszersmind megkaptuk az átviteli függvényt is, a szorzat másik tényezőjét. Két példát számolunk végig.

a) Második derivált módszer

Ha feltesszük, hogy a gravitációs teret leíró függvény kielégíti a Laplace-egyenletet (ami általában jó közelítés)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0$$

a második vertikális derivált pusztán a $g(x, x)$ függvény ismeretében is meghatározható:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g(x, y) \quad (3.2)$$

A második vertikális derivált számítását szokás egyszerűen második derivált módszernek nevezni. A $g(x, y)$ -ra alkalmazandó lineáris művelet:

$$L = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (3.3)$$

Felhasználva a (2.2)-t, a (3.1) bal oldala:

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega, \psi) \cdot e^{i(\omega x + \psi y)} d\omega d\psi \quad (3.4)$$

míg a jobb oldal:

$$L[g(x, y)] = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \psi) e^{i(\omega x + \psi y)} d\omega d\psi \quad (3.5)$$

A deriválás és integrálás sorrendje felcserélhető:

$$L[g(x, y)] = - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega^2 + \psi^2) \cdot G(\omega, \psi) e^{i(\omega x + \psi y)} d\omega d\psi \quad (3.6)$$

A (3.4) és (3.6) összehasonlításával:

$$H(\omega, \psi) = (\omega^2 + \psi^2) \cdot G(\omega, \psi) \quad (3.7)$$

A mondott felbontást sikerült elvégezni. A szűrő átviteli függvénye:

$$W(\omega, \psi) = \omega^2 + \psi^2 \quad (3.8)$$

A (3.8) általánosítása is könnyen számítható. Csak a végeredményt közöljük, a levezetés menete azonos a most ismertetettel. Ha a művelet:

$$L = \sum_{j=1}^h \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k} \quad (3.9)$$

akkor az átviteli függvény:

$$W(\omega, \psi) = \sum_{j=1}^h \sum_{k=1}^m a_{jk} (i\omega)^j (i\psi)^k \quad (3.10)$$

b) Lineáris kombináció képzése az eredeti adatokból

A térképek transzformálásának általános eljárása: a függvényértéket minden (diszkrét, mérési) pontban olyan újjal helyettesítjük, ami a környezetben levő régi értékek valamilyen lineáris kombinációja. Például a pont körül rajzolt koncentrikus körökön átlagokat képzünk, az átlagokat súlyozzuk és a középponti értéket a súlyozott átlaggal helyettesítjük. A súlyokat úgy kell megválasztani, hogy végeredményünk a módszer célkitűzéseinek megfelelően. Miután minden értéket újjal helyettesítettünk, az új értékrendszerből megszerkeszthetjük a transzformált térképet.

Még általánosabban: ha nem írjuk elő, hogy a használt pontok különböző sugarú körökön legyenek, hanem a tetszőlegesen választott P_k ponthoz (koor-

dinátái x_k , illetve y_k értékekkel nagyobbak a vonatkoztatási pont koordinátáinál) az a_k súlyt rendeljük és tetszőleges, n számú pontot használunk a lineáris kombináció képzésében:

$$h(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot g(x + x_k; y + y_k) \quad (3.11)$$

A bal oldal a (2.2) szerint:

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \psi) e^{i(\omega x + \psi y)} d\omega d\psi \quad (3.12)$$

Ugyanakkor a jobb oldal:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k g(x + x_k, y + y_k) &= \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \psi) \cdot e^{i[\omega(x+x_k) + \psi(y+y_k)]} d\omega d\psi = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \psi) e^{i(\omega x_k + \psi y_k)} \cdot e^{i(\omega x + \psi y)} d\omega d\psi = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^n a_k \cdot e^{i(\omega x_k + \psi y_k)} \cdot G(\omega, \psi) \cdot e^{i(\omega x + \psi y)} d\omega d\psi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A (3.12) és (3.13) összevetéséből:

$$W(\omega, \psi) \underset{\text{lin. komb.}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \cdot e^{i(\omega x_k + \psi y_k)} \quad (3.14)$$

Egy r sugarú kör mentén, a $z=0$ síkban levő 4 pont, a 7. ábra A-val jelölt pontjai átlagát képezve a megfelelő átviteli függvény a (3.14) alapján:

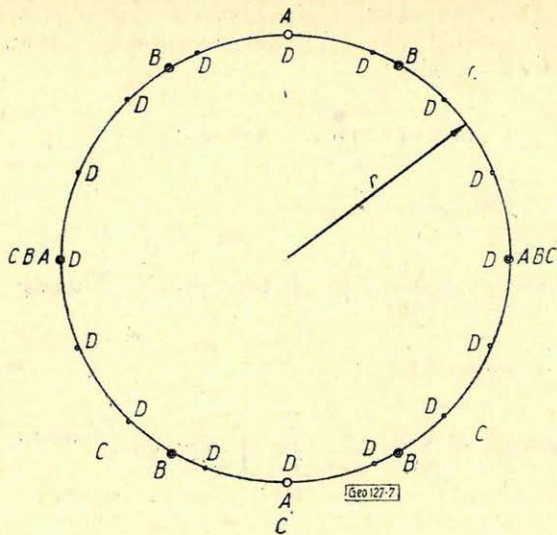
$$\begin{aligned} W_{4,r} &= \frac{1}{4} \left[e^{i(\omega \cdot r + \psi \cdot 0)} + e^{i(\omega \cdot 0 + \psi \cdot r)} + e^{i(-\omega r + \psi \cdot 0)} + e^{i(\omega \cdot 0 - \psi \cdot r)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i\omega r} + e^{-i\omega r}}{2} + \frac{e^{i\psi r} + e^{-i\psi r}}{2} \right] = \frac{1}{2} (\cos \omega r + \cos \psi r) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Hasonló számítással kapjuk, hogy 6 pontból (a 7. ábrán B-vel jelölt pontok) képzett átlagra:

$$W_{6,r} = \frac{1}{3} [\cos \omega r + 2 \cdot \cos(\omega r \cdot \cos 60^\circ) \cdot \cos(\psi r \sin 60^\circ)] \quad (3.16)$$

8 pontból számított átlagra (a 7. ábrán C-vel jelölt pontok):

$$W_{8,r} = \frac{1}{4} [\cos \omega r + \cos \psi r + 2 \cos(\omega r \cdot \cos 45^\circ) \cos(\psi r \cdot \sin 45^\circ)] \quad (3.17)$$



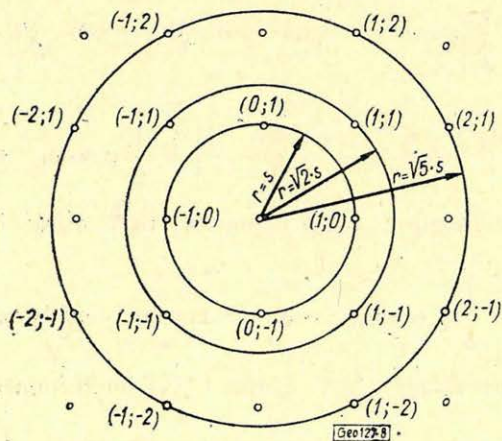
7. ábra

végül 16 pontból (a 7. ábra D-vel jelölt pontjai) számított átlagra:

$$\begin{aligned}
 W_{16;r} = \frac{1}{8} [& \cos \omega r + \cos \psi r + 2 \cos (\omega r \cdot \cos 45^\circ) \cos (\psi r \cdot \sin 45^\circ) + \\
 & + 2 \cos (\omega r \cdot \cos 22,5^\circ) \cdot \cos (\psi r \cdot \sin 22,5^\circ) + \\
 & + 2 \cos (\omega r \cdot \sin 22,5^\circ) \cdot \cos (\psi r \cdot \cos 22,5^\circ)] \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

érvényes.

Bizonyos esetekben a számításban felhasználható pontok derékszögű négyzetháló csúcspontjaiban helyezkednek el. A rácestávolságot jelöljük s -sel. A hálózatba berajzolható – és gyakorlati számításokban leggyakrabban alkalmazott – köröket a 8. ábra mutatja.



8. ábra

Az $r=s$ sugarú körön 4 pontból képzett átlag átviteli függvénye – a (3.15) szerint:

$$W_{4, r=s} = \frac{1}{2} (\cos \omega s + \cos \psi s) \quad (3.19)$$

Egyszerű számítással kapható, hogy az $r=\sqrt{2}\cdot s$ sugarú körön a megfelelő 4 pontból számított átlag:

$$W_{4, r=\sqrt{2}\cdot s} = \cos \omega s \cdot \cos \psi s \quad (3.20)$$

végül az $r=\sqrt{5}\cdot s$ sugarú körön levő 8 pontból számított átlag:

$$W_{8, r=\sqrt{5}\cdot s} = \frac{1}{2} (\cos 2\omega s \cdot \cos \psi s + \cos 2\psi s \cdot \cos \omega s) \quad (3.21)$$

Ha most a középpontra az a , az $r=s$ $r=\sqrt{2}\cdot s$ és $r=\sqrt{5}\cdot s$ sugarú körökön képzett körátlagokra az a_1, a_2, a_3 súlyokat alkalmazzuk a (3.19)–(3.21) felhasználásával a súlyozott átlag képzésének átviteli függvénye:

$$U(\omega, \psi) = a_0 + a_1 \frac{\cos \omega s + \cos \psi s}{2} + a_2 \cos \omega s \cdot \cos \psi s + \\ + a_3 \frac{\cos 2\omega s \cdot \cos \psi s + \cos 2\psi s \cdot \cos \omega s}{2} \quad (3.22)$$

Tételezzük fel, hogy a körátlagot *integrálással* képezhetjük. Ez természetesen csak közelítés, hiszen a valóságban nem állnak rendelkezésünkre tetszőleges sűrűn mérési pontok. De bizonyos esetekben – erre még részletesen visszatérünk a 6-ban – a feltevés megengedhető és hasznos egyszerűsítésekre vezet.

Ha egy r sugarú körön számítjuk az átlagot, egy, az átlagképzésben szereplő pont koordinátái:

$$x_0 + r \cos \varphi ; y_0 + r \sin \varphi$$

ahol x_0, y_0 a középpont koordinátáit jelenti.

Ha az átlagképzés:

$$\overline{g(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) d\varphi \quad (3.23)$$

Akkor a (3.12) szerint:

$$W_{\overline{g(r)}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\omega r \cos \varphi + \psi r \sin \varphi)} d\varphi \quad (3.24)$$

Ha a frekvencia-síkon polárkoordinátákra térünk át:

$$\omega = \rho \cos \theta ; \psi = \rho \sin \theta$$

a (3.24)-ből:

$$\begin{aligned} W(\omega, \psi) &\equiv W(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(er \cos \vartheta \cos \varphi + er \sin \vartheta \sin \varphi)} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ier \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi \end{aligned} \quad (3.25)$$

De:

$$\int_0^{2\pi} e^{iz \cos \varphi} d\varphi = 2\pi \cdot J_0(z) \quad (3.26)$$

— ahol $J_0(z)$ első fajú, zérus rendű Bessel-függvény — (pl. Petiau, 1956) és így a (3.25)-ből:

$$W_{f(r)}(\varrho, \vartheta) = J_0(\varrho \cdot r) \quad (3.27)$$

Ahogy ez várható is integrálással képzett átlag csak egy „sugarmenti” frekvenciaváltozóra érzékeny. A szűrőhatás iránytól függetlenné válik.

Integrálással számított körátlagok súlyozott összegének átviteli tulajdonságait

$$W(\varrho, \vartheta) = \sum_{i=0}^n a_i J_0(\varrho \cdot r_i) \quad (3.28)$$

írja le.

Mint ismeretes a

$$H(\omega, \psi) = W(\omega, \psi) \cdot G(\omega, \psi) \quad (3.29)$$

kapcsolatnak a tértartományban

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (3.30)$$

összefüggés felel meg.

A $w(x, y)$ függvény a szűrő súlyfüggvénye. A műveletek jellemzésére és összehasonlítására tulajdonképpen a súlyfüggvényeket is felhasználhatnánk. De a bemenet — kimenet összefüggések sokkal egyszerűbben kaphatók az átviteli függvény alkalmazásával. A $W(\omega, \psi)$ -nek könnyen látható szemléletes jelentése van; ezért választjuk mindig a (3.29) alakú megadást — bár nem ez az egyetlen lehetőség.

4. Aszimptotikus összefüggés a reziduál- és második derivált számítás módszere között

A szűrőelmélet alkalmazásának első példajaként egy gyakran tárgyalt összefüggést bizonyítunk be.

Jelölje a gravitációs erő értékét az $x_{01}y_0$ pontban g_0 ; a pont körüli r sugarú körön felvett értékek átlagát $g(r)$. A reziduális hatást tekintsük a

$$g_{\text{rez.}} = g_0 - \overline{g(r)} \quad (4.1)$$

mennyiségnek. Ennek kapcsolata a második derivált számításának műveletével:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4}{r^2} \left\{ g_0 - \overline{g(r)} \right\} \quad (4.2)$$

A (4.2) összefüggés egy bizonyítását adta Egyed L. (1955). Most egységes tárgyalásunknak megfelelően más úton fogjuk megmutatni érvényességét: a két oldal átviteli tulajdonságairól látjuk be, hogy azonosak. Ez a műveletek azonosságát is bizonyítja.

A baloldali átviteli függvénye a (3.8) szerint:

$$\omega^2 + \psi^2$$

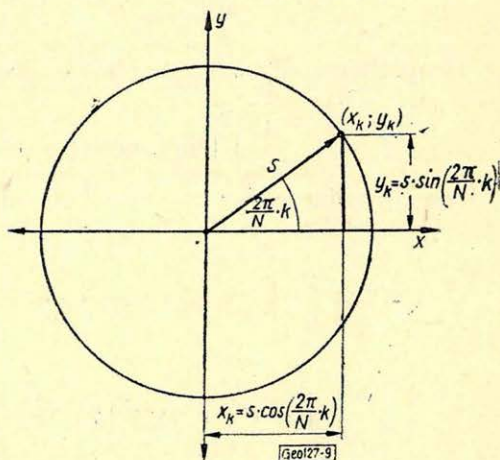
Számítsuk az átlagot — egyelőre N számú pontból! A 9. ábra jelöléseivel:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

$$x_k = s \cdot \cos [(\Delta\varphi) \cdot k]$$

$$y_k = s \cdot \sin [(\Delta\varphi)k]$$

$$a_k = \frac{1}{N}$$



9. ábra

A (3.12)-ből:

$$W(\omega, \psi) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\{\omega s \cdot \cos [(\Delta\varphi)k] + \psi s \cdot \sin [(\Delta\varphi)k]\}} \quad (4.3)$$

Legyen N páros szám. Akkor minden pontnak van olyan párja, amelynek mindkét koordinátája ellentétes előjelű (pl. P és P'). Az összeg akkor így alakítható:

$$\begin{aligned} W(\omega, \psi) &= \frac{2}{N} \frac{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{i\{\omega s \cdot \cos [(\Delta\varphi)k] + \psi s \cdot \sin [(\Delta\varphi)k]\}} + e^{-i\{\omega s \cdot \cos [(\Delta\varphi)k] + \psi s \cdot \sin [(\Delta\varphi)k]\}}}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \cos \{ \omega s \cos [(\Delta\varphi) \cdot k] + \psi s \cdot \sin [(\Delta\varphi) \cdot k] \} \Delta\varphi \end{aligned} \quad (4.4)$$

Amiben felhasználtuk, hogy:

$$\frac{2}{N} = \frac{\Delta\varphi}{\pi}$$

Ha $N \rightarrow \infty$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W(\omega, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\omega s \cdot \cos \varphi + \psi s \cdot \sin \varphi) d\varphi \quad (4.5)$$

Ezzel a (4.2) jobboldalának frekvenciaválasza:

$$W(\omega, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4 \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\omega s \cos \varphi + \psi s \sin \varphi) d\varphi \right]}{s^2} \quad (4.6)$$

A l'Hospital szabály kétszeri alkalmazásával:

$$\begin{aligned} W(\omega, \psi) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(\omega s \cos \varphi + \psi s \sin \varphi)] \cdot [\omega \cos \varphi + \psi \sin \varphi] d\varphi}{2s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\omega s \cdot \cos \varphi + \psi s \cdot \sin \varphi) [\omega \cos \varphi + \psi \sin \varphi]^2 d\varphi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\omega \cos \varphi + \psi \sin \varphi]^2 d\varphi = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \omega^2 + \frac{\pi}{2} \psi^2 \right) = \omega^2 + \psi^2 \quad (4.7) \end{aligned}$$

Ezzel a (4.2)-t bizonyítottuk.

5. A vizsgálandó frekvenciatartomány. A diszkrét pontokban való mérés hatásai

Az előző pontban úgy bizonyítottuk két művelet azonosságát, hogy megmutattuk átviteli függvényeik egyenlőségét. Közben nem tettünk semmiféle korlátozást az ω és ψ értékeire. Azonban a

$$H(\omega, \psi) = W(\omega, \psi) \cdot G(\omega, \psi)$$

összefüggésből világos, hogy adott esetben két művelet hatása akkor is azonos, ha karakterisztikáik csak abban az (ω, ψ) tartományban egyeznek meg, amelyben $G(\omega, \psi)$ zérustól különbözik. Ezen a tartományon kívül a két karakterisztika viselkedése közömbös. Rendkívül lényeges ez a megjegyzés a módszerek hatásának eljárásokkal való approximációja szempontjából. Pl. a második derivált számításának átviteli függvénye (3.8) olyan, hogy

$$\text{vagy } \begin{array}{l} \omega \longrightarrow \infty \\ \psi \longrightarrow \infty \end{array} \quad \text{esetén: } W(\omega, \psi) \longrightarrow \infty$$

Az ilyen karakterisztikát nem lehet semmiféle, a mérési pont körüli értékekből képezett lineáris kombinációval megközelíteni a teljes (ω, ψ) síkon. De el lehet azt végezni, ha csak egy tartományon való megközelítésről van szó. Különböző

módszerek, eljárások karakterisztikáit csak abban a (ω, ψ) tartományban érdemes összehasonlítani, amiben $G(\omega, \psi)$ nem zérus. Meg kell állapítanunk, hogy mi a legnagyobb frekvencia ami szerepelhet a $G(\omega, \psi)$ -ben.

A mintavétel-elmélet eredményeit használhatjuk fel a legeredményesebben (Shannon, Weaver, 1949; Blackman, Tukey, 1958). Az elmélet tulajdonképpen folytonos függvények digitális adatrendszerrel való jellemzésével és a digitális adatok folytonos függvénné való vissza-transzformálásával foglalkozik. A mi problémánkban a folytonos függvény: maga a mérendő gravitációs tér; a digitális adatrendszer: a térből diszkrét pontokban vett minták, a mérések eredményei.

A következőkben — pusztán az egyszerűbb írásmód kedvéért — egy változóra térünk át.

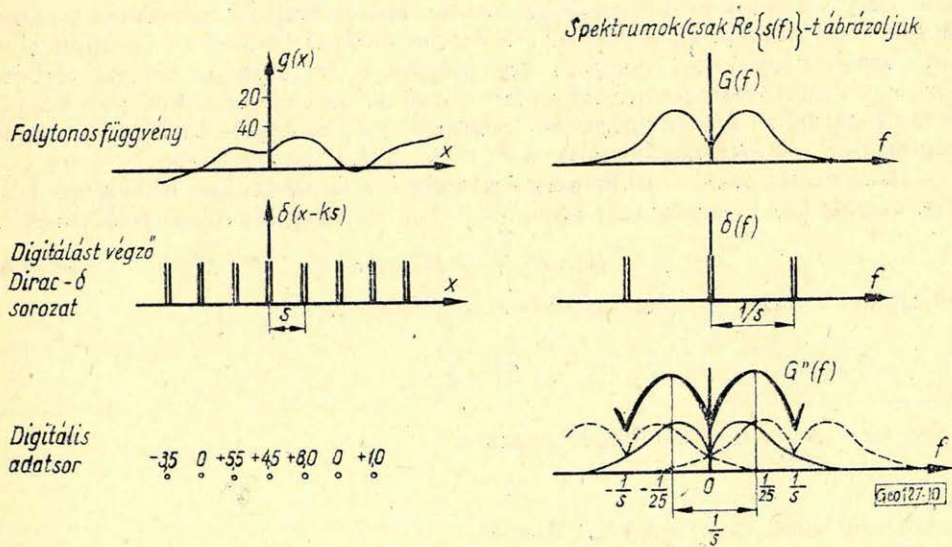
A mintavételi távolság (mérésköz) legyen: s .

Érvényes a következő összefüggés:

$$G^*(f) = \frac{1}{s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G\left(f - \frac{k}{s}\right) \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.1)$$

Amiben $G(f)$ az eredeti folytonos függvény, $G^*(f)$ a digitális adatrendszer spektruma.

A digitális adatsor spektrumát tehát úgy kaphatjuk, hogy az eredeti spektrumot s -sel osztjuk, $0, 1/s, -1/s, 2/s, -2/s, \dots$ értékekkel eltoljuk, majd az összes görbét összegezzük (10. ábra).



10. ábra

Ha a spektrumban jelenlevő legnagyobb frekvencia f_h és a mintavételi távolság viszonya:

$$f_h < \frac{1}{2s} \quad (5.2)$$

akkor a $[-1/s, 1/s]$ tartományban az eredeti függvény és a digitális adatrendszer spektrumai csak egy konstans-szorzóban térnek el egymástól. Ezen az intervallumon kívül az eredeti függvény spektruma zérus, a digitális adatsoré $1/s$ periódussal ismétlődő.

Ha az (5.2) nem teljesül a spektrum torzul. Látható a 10. ábrából, hogy ha $f_h \cong 1/s$ a digitális adatrendszerben minden frekvenciához más amplitudósűrűség tartozik, mint a folytonos függvényben. Ez nagyon fontos méréstervezési követelményekkel jár: az (5.2)-t teljesíteni kell, ha azt akarjuk, hogy méréseink adatsora valóban jellemző legyen a mérendő térre.

A digitális adatrendszerből a folytonos függvény visszaállításához végzendő művelet:

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(ks) \frac{\sin \frac{\pi(x-ks)}{s}}{\pi(x-ks)} \quad (5.3)$$

Az (5.3) a $g(ks)$ mért értékeken átmenő görbét ad meg, amelyben $1/2s$ -nél nagyobb frekvenciák nem szerepelnek. A digitált adatsorból a függvényvisszaállítás grafikus módszere: „sima” vonallal összekötni a mért értékeknek megfelelő pontokat, ennek az összefüggésnek ösztönös megvalósítása. A megrajzolt görbében emiatt *nincsen az $1/2s$ -nél nagyobb frekvencia*. Ha a mérendő mennyiséget leíró függvényben voltak az $1/2s$ -nél nagyobb frekvenciák, a megrajzolt görbe és a mérendő függvény nem lehet azonos. Ha s nő, az adatsor egyre kevesebbet mond a mérendő mennyiségről. A „sima” vonalak berajzolása, vagy az exakt jel-visszaállítás csak az $1/2s$ -ig terjedő frekvencia komponenseket rajzolhatja fel a $g(x)$ -ből. A jelvisszaállítás művelete „semmit sem tud” arról, hogy ennél nagyobb frekvenciák is léteztek az eredeti térben. Másrészt a mintavétel folyamata a térben levő összes frekvenciákra „érzékeny”. Nem tünteti el az $1/2s$ -nél nagyobb frekvenciákat, hanem – az (5.1) képletnek megfelelően – áttranszformálja a $(-1/2s, 1/2s)$ tartományba.

Másrésztől: csak a mért adatrendszerrel dolgozhatunk. Ebben az $1/2s$ frekvenciáig kell vizsgálatokat végeznünk. Ha bevezetjük a *relatív frekvenciát* az

$$f_{\text{relatív}} \equiv f' = f_{\text{valódi}} \cdot s \quad (5.4)$$

definícióval, akkor a relatív frekvenciában mindig az

$$|f'| < \frac{1}{2}$$

vagy az $f \cdot 2\pi = \omega'$ összefüggés miatt az

$$|\omega'| < \pi$$

tartományt kell csak megvizsgálnunk.

Kétváltozós esetben az (ω', ψ') relatív frekvencia síkon a $K: [-\pi \leq \omega' \leq \pi; -\pi \leq \psi' \leq \pi]$ négyszögön kell megvizsgálni a frekvencia-függvények viselkedését. Egyszerűbb írásmód kedvéért a π és törtrészei helyett a 180° -ot és törtrészeit fogjuk használni. A számított karakterisztikák gyakorlati alkalmazását a következő módon végezhetjük.

A konkrét térképeken megállapítjuk a felső határfrekvenciákat. Ha ezek $1/2s$ közelében mozognak, feltehetjük, hogy mérési hálózatunk túlságosan ritka

volt és az, hogy gyorsabb változásokat nem találunk pusztán a mérési módszerből következnek. Ilyen esetben nem mondhatunk semmit a térkép és a mérendő tér kapcsolatáról. Lehetséges, hogy jelentéktelen; de lehet, hogy igen nagy torzulások léptek fel. A kérdést eldönteni csak sűrített mérésekkel lehet. Mindenesetre ilyenkor *kétesértékű a térkép további átalakítása*. Éppen a leginkább torzult nagyfrekvenciás komponenseket emelnénk ki, azt hagynánk el, ami talán még az eredeti térre jellemző.

Ha azt találjuk, hogy a térképen levő felső határfrekvencia kisebb $1/2s$ -nél, akkor a mérési közöket (állomástávolságokat) helyesnek fogadhatjuk el. Az s ismeretében és az (5.4) felhasználásával meghatározhatjuk, hogy a tényleges frekvenciákra a relatív frekvenciákban megadott karakterisztika milyen részei vonatkoznak. Pl. ha a tényleges felső határfrekvencia $0,2$ ciklus/km és az állomástávolság $0,5$ km; akkor az (5.4) szerint:

$$f'_h = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$$

Ez azt jelenti, hogy a megadott karakterisztikáknak csak az első $1/5$ -ét kell figyelembe venni. Ha két eljárás ebben a tartományban közel azonos hatású, a velük átalakított térképek is nagyon hasonlók lesznek. Ha összehasonlítási alapnak elfogadnánk térképekre való alkalmazás végeredményeinek vizsgálatát azt következtethetnénk, hogy a két eljárás közel azonos hatású. De a karakterisztikák további $4/5$ részén jelentős eltérések lehetnek! Az ilyen típusú félreértések lehetősége miatt sem megfelelő térképekre való alkalmazás végeredményét vizsgálni. Ezt legfeljebb illusztrációnak használhatjuk.

Szimmetriatulajdonságok miatt – ezek az amplitúdó-karakterisztikákból láthatók – vizsgálandó tartománynak a K négyszög helyett annak a pozitív negyedbe eső részét választhatjuk. Azaz:

$$0 \cong \omega' \cong 180^\circ; \quad 0 \cong \psi' \cong 180^\circ.$$

6. Körátlag képzésében felhasználandó pontok száma

A kérdést nagyon sok szerző tárgyalta. A vizsgálat módszere mindenütt a kísérletezés volt. Különböző pontszámmal, különböző sugarú körökön számítottak körátlagokat mért vagy szintétizált térképek felhasználásával. Közös tapasztalat: amikor még kevés pontot alkalmazunk, az átlag értéke a pontszám növelésével változik; majd később lényegében konstanssá válik. Különböző sugarú körökön más-más pontszám mellett közelítjük meg a konstans értékét. Bizonyos határon túl felesleges a pontszám további növelése. Csak a számítások idejét hosszabbítja meg, miközben ugyanolyan értékeket ad, mint a kevesebb pontot alkalmazó átlagolás. A gyakorlat számára lényeges, hogy azt a minimális pontszámot alkalmazzuk, amivel a számított átlag lényegében eléri a konstans értéket.

A szűrőelmélet lehetővé teszi a térképektől, kísérletektől független összehasonlítást és így módot ad a feladat végleges megoldására. Megszabadulhatunk a – minden kísérletezésben kétségtelenül jelenlevő – esetlegességektől, ha az egyes műveletek átviteli tulajdonságait hasonlítjuk össze.

Nevezzük „valódi” átlagértéknek a kör menti integrálással (másféleképpen: végtelen sok pontot alkalmazva) kapott értéket. Rendeljük ezt az átlagot a középponthoz. Ha az összes lehető pontban elvégezzük a számítást majd a helyettesítést, a „valódi” átlag térképekhez jutunk. A 3. szerint a műveletsor lineáris szűrés. Átviteli függvénye a (3.27) szerint:

$$W_{\overline{g(r)}} = J_0(\rho r)$$

Ha az átlagot különböző sugarú körökön, különböző pontszám felhasználásával számoljuk; majd az átlagokat a középponthez rendelve új térképeket szerkesztünk szintén lineáris transzformációt végzünk. A transzformációk átviteli függvényeit a 4, 6, 8, 16 pontok esetén a (3.15)–(3.18) képletek adják meg. A megfelelő átviteli függvények a frekvenciának, mint független változónak; továbbá a körsugar nagyságának és az átlagolásban szerepeltetett pontok számának, mint paramétereknek a függvényei. Azt kell tehát megvizsgáljunk a gyakorlatban számbajövő ω , ψ , r értékekre, hogy az

$$J_0(\varrho r) \approx \frac{1}{2} [\cos \omega r + \cos \psi r] \quad (6.1)$$

$$J_0(\varrho r) \approx \frac{1}{3} [\cos \omega r + 2 \cos (\omega r \cos 60^\circ) \cos (\psi r \sin 60^\circ)] \quad (6.2)$$

$$J_0(\varrho r) \approx \frac{1}{4} [\cos \omega r + \cos \psi r + 2 \cos (\omega r \cos 45^\circ) \cdot \cos (\psi r \sin 45^\circ)] \quad (6.3)$$

$$J_0(\varrho r) \approx \frac{1}{8} [\cos \omega r + \cos \psi r + 2 \cos (\omega r \cos 45^\circ) \cdot \cos (\psi r \sin 45^\circ) + \\ + 2 \cos (\omega r \cos 22,5^\circ) \cos (\psi r \sin 22,5^\circ) + \\ + 2 \cos (\omega r \sin 22,5^\circ) \cdot \cos (\psi r \cos 22,5^\circ)] \quad (6.4)$$

egyenlőségek milyen közelítéssel teljesülnek.

Emlékeztetünk arra, hogy:

$$\varrho = \sqrt{\omega^2 + \psi^2}$$

Áttérve relatív frekvenciákra, mind a ϱ radiális, mind az ω és ψ , x , illetve y tengelyek menti frekvenciaváltozóban; továbbá az $r = \mu s$ jelölést alkalmazva a (6.1)–(6.4) közelítő egyenlőségek helyett a

$$J_0(\varrho' \mu) \approx \frac{1}{2} [\cos \omega' \mu + \cos \psi' \mu] \quad (6.5)$$

$$J_0(\varrho' \mu) \approx \frac{1}{3} [\cos \omega' \mu + 2 \cos (\omega' \mu \cos 60^\circ) \cdot \cos (\psi' \mu \sin 60^\circ)] \quad (6.6)$$

$$J_0(\varrho' \mu) \approx \frac{1}{4} [\cos \omega' \mu + \cos \psi' \mu + 2 \cos (\omega' \mu \cos 45^\circ) \cos (\psi' \mu \sin 45^\circ)] \quad (6.7)$$

$$J_0(\varrho' \mu) \approx \frac{1}{8} [\cos \omega' \mu + \cos \psi' \mu + 2 \cos (\omega' \mu \cdot \cos 45^\circ) \cos (\psi' \mu \sin 45^\circ) + \\ + 2 \cos (\omega' \mu \cos 22,5^\circ) \cdot \cos (\psi' \mu \sin 22,5^\circ) + \\ + 2 \cos (\omega' \mu \sin 22,5^\circ) \cdot \cos (\psi' \mu \cdot \cos 22,5^\circ)] \quad (6.8)$$

egyenlőségeket írhatjuk fel. Most már kijelölhetjük a vizsgálati tartományt is. Az 5. szerint ez a

$$0 \leq |\omega'| \leq \pi ; 0 \leq |\psi'| \leq \pi$$

négyszög.

Érvényes, hogy

$$\varrho' = \sqrt{\omega'^2 + \psi'^2}$$

A (6.5) – (6.8)-ból látható, hogy az összes átviteli függvények valós értékek: fázistolásuk zérus. Az átviteli függvényekből abszolútérték képzéssel kaphatjuk az amplitudó-karakterisztikákat. Az amplitudó-karakterisztikák a mondott négyszög feletti felületekkel szemléltethetők. Elegendő nagy k választással kiszámíthatnánk a (6.5) – (6.8) (közös) baloldalainak értékét, illetve a jobboldalokon álló függvények értékeit az

$$\omega' = \frac{\pi}{k} \cdot l_1 \quad (l_1 = 0, 1, 2, \dots, k)$$

$$\psi' = \frac{\pi}{k} \cdot l_2 \quad (l_2 = 0, 1, 2, \dots, k)$$

értékrendszerre – azaz a felületpontok magasságait az ω' , ψ' sík felett egy négyszögrács csúcspontjaiban. Az értékrendszereket táblázatosan is megadhatnánk, vagy a szemléltetéshez a pontokban felvett értékeket összekötve érzékeltethetnénk a karakterisztika felületek menetét. Megvizsgálhatnánk az értékrendszerek vagy a megfelelő felületek eltéréseit. Így azonban nehezen áttekinthető, illetve ábrázolható mennyiségekre jutnánk.

Emiatt a következő egyszerűsítést alkalmazzuk.

Kijelölünk egy irányt az origón átmenő $\psi' = m\omega'$ egyenessel. Az ω' , ψ' síkra merőleges és az egyenessel kijelölt irányon átmenő sikkal görbéket metszünk ki a felületekből. A görbéket – amelyek az irányra jellemző szűrőhatásról adnak számot – felrajzolva képet alkothatunk a felületek közötti eltérésekről is.

A baloldal értéke iránytól független.

A jobboldalakat két szélső esetben vizsgáljuk. Az egyik ($m = 0$) átlagolásban szereplő ponton átmenő irány. A másik (m a pontszámtól függően változó) két, átlagolásban szereplő pont közötti távolságot szimmetrikusan felező irány. Könnyen belátható, hogy *tetszőleges* iránynak megfelelő görbe ezen két iránynak megfelelő két görbe között helyezkedik el. Ha tehát ezek közel vannak a „valódi” átlag képzésének megfelelő (forgásszimmetrikus) amplitudó-karakterisztika felületből kimetszett (irányfüggetlen) görbéhez az összes irányokhoz tartozó görbék, azaz a teljes karakterisztika felület is jó közelítés.

Három μ választással végeztünk számításokat: $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 3$ (a körsugár az állomástávolsággal egyenlő, annak kétszerese, illetve háromszoros). Az alkalmazott képletek a (6.5) – (6.8) képletekből a megfelelő irányválasztások beírása után kaphatók:

$$a) \quad n = 4 \quad m = 0$$

$$W(\omega', m = 0) = \frac{1}{2} [\cos \omega' \mu + 1] \quad (6.10)$$

$$m = \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$W(\omega', m = 1) = \cos \omega' \mu \quad (6.11)$$

$$b) \quad n = 6 \quad m = 0$$

$$W(\omega', m = 0) = \frac{1}{3} [\cos \omega' \mu + 2 \cos (\omega' \mu \cos 60^\circ)] \quad (6.12)$$

$$m = \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$W_{n=6}(\omega', m = \operatorname{tg} 30^\circ) = [\cos \omega' \mu + 2 \cos (\omega' \mu \cos 60^\circ) \cdot \cos (\omega' \mu \sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ)] \quad (6.13)$$

$$c) \quad n = 8 \quad m = 0$$

$$W_{n=8}(\omega', m = 0) = \frac{1}{4} [\cos \omega' \mu + 1 + 2 \cos (\omega' \mu \cos 45^\circ)] \quad (6.14)$$

$$m = \operatorname{tg} 22,5^\circ$$

$$W_{n=8}(\omega', m = \operatorname{tg} 22,5^\circ) = \frac{1}{4} [\cos \omega' \mu + \cos (\omega' \mu \operatorname{tg} 22,5^\circ) + 2 \cos (\omega' \mu \cos 45^\circ) \cos (\omega' \mu \sin 45^\circ \operatorname{tg} 22,5^\circ)] \quad (6.15)$$

$$d) \quad n = 16 \quad m = 0$$

$$W_{n=16}(\omega', m = 0) = \frac{1}{8} [\cos \omega' \mu + 1 + 2 \cos (\omega' \mu \cos 45^\circ) + 2 \cos (\omega' \mu \cos 22,5^\circ) + 2 \cos (\omega' \mu \cdot \sin 22,5^\circ)] \quad (6.16)$$

$$m = \operatorname{tg} 11,25^\circ$$

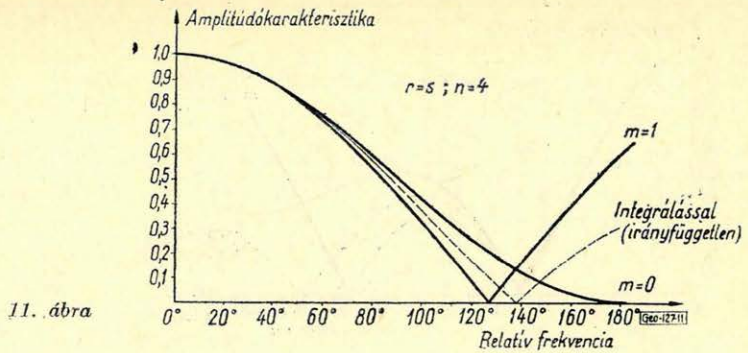
$$W_{n=16}(\omega', m = \operatorname{tg} 11,25^\circ) = \frac{1}{8} [\cos \omega' \mu + \cos (\omega' \mu \operatorname{tg} 11,25^\circ) + 2 \cos (\omega' \mu \cos 45^\circ) \cos (\omega' \mu \sin 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 11,25^\circ) + 2 \cos (\omega' \mu \cos 22,5^\circ) \cos (\omega' \mu \sin 22,5^\circ \operatorname{tg} 11,25^\circ) + 2 \cos (\omega' \mu \sin 22,5^\circ) \cos (\omega' \mu \cos 22,5^\circ \cdot \operatorname{tg} 11,25^\circ)] \quad (6.17)$$

A számítások végeredményeként kapott görbéket a 11–20. ábrákon mutatom be. A szaggatott vonal mindegyik ábrán az integrálással kapható „valódi” átlag számításának megfelelő görbe. Látható, hogy kis relatív frekvenciákra minden esetben megfelelő közelítéseket kapunk. A közelítés jósága a pontszám-tól, illetve körsugar nagyságától függő távolságban „romlik el”. (Megjegyzem, hogy az $r = s$ és $r = 2s$ választásoknak megfelelő görbék – ahogyan ez a képletekből is látszik – az $r = 3s$ „kinagyított” részletei.)

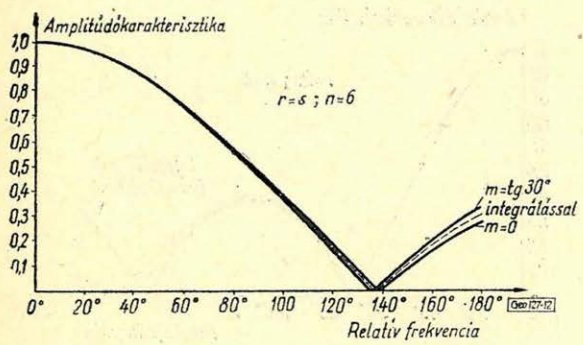
A 11–13. ábrák az $r = s$ sugarú körön $n = 4, = 6, = 8$ pontból történő átlagképzés amplitúdókaraktisztikái, a (6.10)–(6.15) képletek alapján a $\mu = 1$ értékkel számítva. Már 8 pont esetén is a teljes relatív frekvencia-tartományon sehol sincs rajzon ábrázolható különbség a „valódi” és az összeg-zéssel (8 pontból) számított átlag átviteli tulajdonságai között. Az $n = 16$ választás végeredményeit nem mutatom be; ugyanígy nincsen ábrázolható eltérés.

A 14–16. ábrák az $r = 2s$ sugarú körön ($\mu = 2$) különböző pontszámok-kal – a (6.10)–(6.15) képletek alapján – számított átlagok amplitúdókaraktisztikáit mutatják. Most sem mutatom be az $n = 16$ pontnak megfelelő esetet; az eltérés a „valódi” és az összegzéssel számított átlag átviteli tulajdonságai között ábrázolhatatlanul kicsiny.

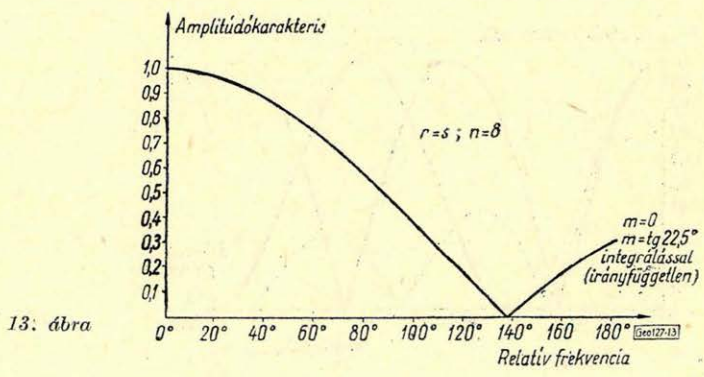
Végül a 17–20. ábrákon az $r = 3s$ sugarú körre vonatkozó eredmények láthatók. Itt a 16 pont alkalmazásával kapott karakterisztikát is érdemes közölni a relatív frekvenciatartomány végén levő kis eltérés miatt.



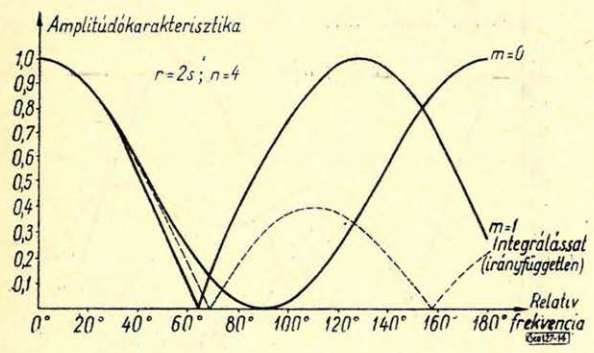
11. ábra



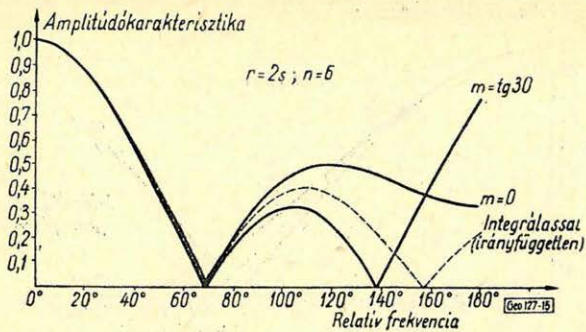
12. ábra



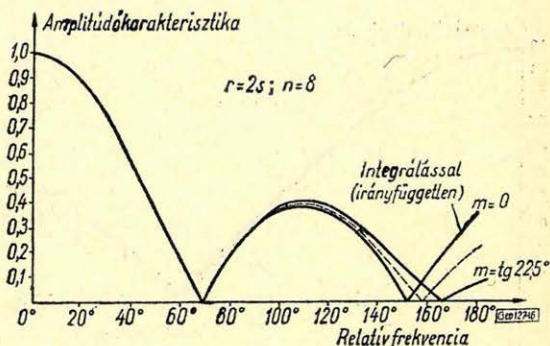
13. ábra



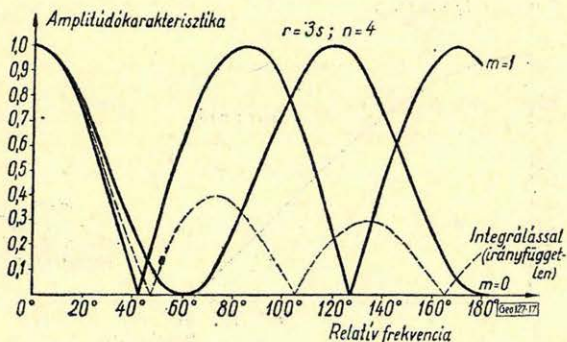
14. ábra



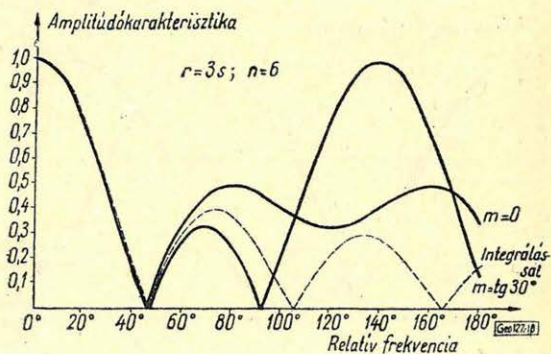
15. ábra



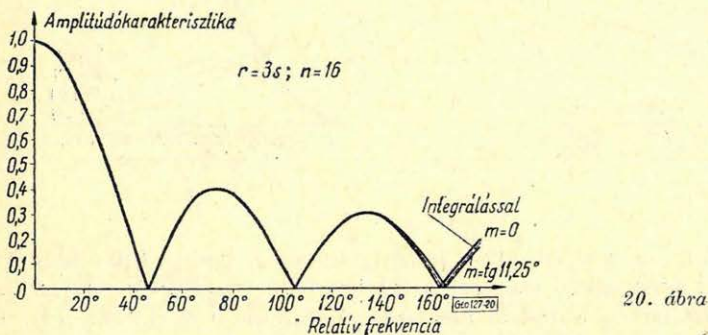
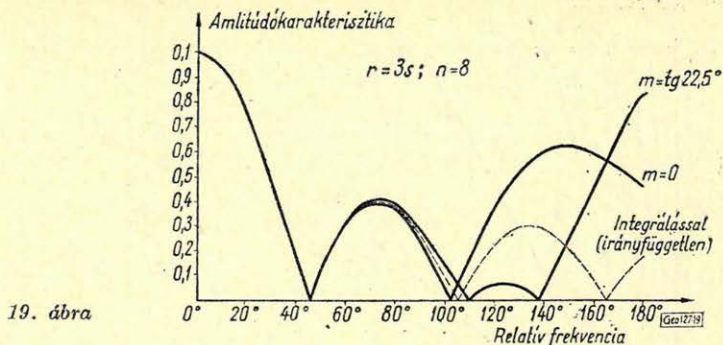
16. ábra



17. ábra



18. ábra

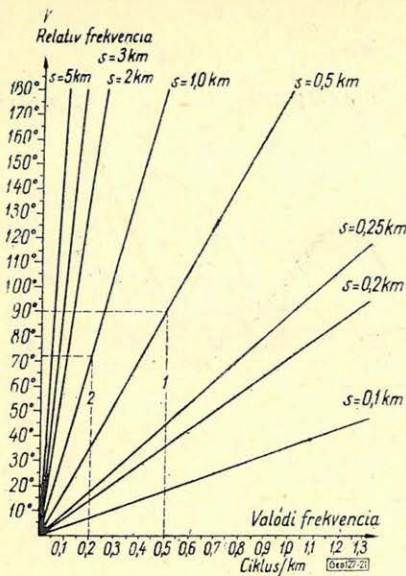


A bemutatott karakterisztika-sorozat *gyakorlati felhasználásához* a konkrét, átalakítandó térképen meg kell állapítanunk a tényleges felső határfrekvenciát. Ezután az (5.4) képlettel számítjuk a relatív felső határfrekvenciát, azaz kijelöljük a tartományt, amelyben a görbéket össze kell hasonlítanunk. Azt a minimális pontszámot választjuk, amelynek alkalmazásával, ebben a tartományban még elhanyagolhatóan kicsiny az eltérés a „valódi” átlagolás karakterisztikájától. Az átszámítást megkönnyíti a 21. ábra egyenes-serege, amely különböző állomástávolságok, mint paraméterek mellett a valódi és relatív frekvenciák összefüggését mutatja.

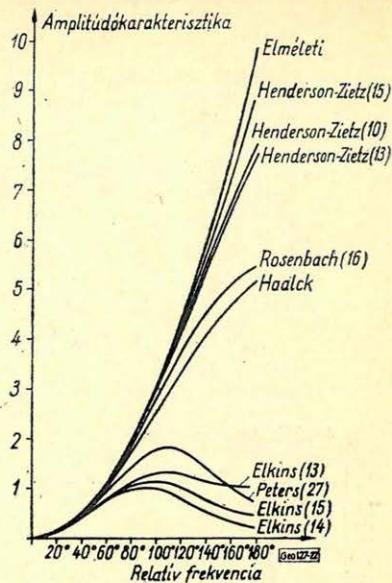
Miután a mérések sok esetben nem hálózatosan történnek legfeljebb egy átlagos állomástávolság adható meg. Ilyenkor óvatosságból az s értékét, éppen úgy, mint a tényleges felső határfrekvenciát felülről kell megbecsülnünk. Az irány rögzítése a frekvenciasíkon tulajdonképpen radiális frekvenciaváltozóra való áttérést jelent. A felső határfrekvencia célszerűen úgy határozható meg, hogy az átalakítandó térképen a leggyorsabb változásokon átfektetett (tetszőleges irányú) szelvénynek megfelelő görbe felső határfrekvenciáját állapítjuk meg.

Két példa:

a) állomástávolság: 0,5 km, felső határfrekvencia: 0,5 ciklus/km. A 21. ábrán szaggatott vonallal (1.) jelölt úton kapjuk, hogy a relatív felső határfrekvencia 90° -nak felel meg. A 12., 16., 19. ábrákból látható, hogy elegendő az $r = s$ sugarú körön 6, az $r = 2s$ sugarún 8, végül az $r = 3s$ sugarún 8 pontot használni az átlagképzésben.



21. ábra



22. ábra

b) Ha $s = 1$ km, a valódi felső határfrekvencia pedig: 0,2 ciklus/km, akkor (l. 21. ábra 2 szaggatott vonala) a relatív felső határfrekvencia: 72° . Ebben az esetben az egyes körökön elegendő 6, 6, 8 pontot (l. 12., 15., 19. ábrák karakterisztikái) használnunk.

7. Második derivált képletek közelítő vizsgálata

A képletek általános alakja:

$$D = \frac{1}{s^2} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \overline{g(r_i)} \quad (7.1)$$

amiben D a második deriváltat (pontosabban annak közelítő értékét), $\overline{g(r_i)}$ az i -edik körön képzett átlagot, a_i a hozzá tartozó súlyfaktort, az s – mint eddig is – az állomástávolságot jelenti.

Különböző szerzők képleteikben különböző a_i értékeket javasoltak. A jelen dolgozatban megvizsgált képletek felsorolása az I. táblázatban szerepel.

A (7.1) jobboldalának átviteli függvénye – ha feltesszük, hogy a kör-átlagot integrálással számítjuk – a (3.28) szerint:

$$W_D = \frac{1}{s^2} \sum_{i=0}^n a_i J_0(\omega r_i) \quad (7.2)$$

A pontos második derivált számításának átviteli függvénye (3.8):

$$W_{\frac{\partial^2}{\partial z^2}} = \omega^2 + \psi^2$$

Második derivált számítására adott képletek összefoglalása (számozás az eredeti dolgozatokra vonatkozik).

Peters, 1949

$$\frac{1}{s^2} [1,156 \cdot g(0) + 0,256 \cdot \overline{g(s)} - 0,445 g(\sqrt{2} \cdot s) - 1,339 g(\sqrt{5}s) + \\ + 0,392 \cdot \overline{g(\sqrt{9,23} \cdot s)}]$$

Henderson - Zietz, 1949

$$(10) \text{ egyenlet} \quad \frac{1}{s^2} [6,185 \cdot g(0) - 8,374 \cdot \overline{g(s)} + 2,189 \cdot \overline{g(\sqrt{2}s)}]$$

$$(13) \text{ egyenlet} \quad \frac{2}{s^2} [3 \cdot g(0) - 4 \overline{g(s)} + \overline{g(\sqrt{2} \cdot s)}]$$

$$(15) \text{ egyenlet} \quad \frac{1}{3s^2} [21 \cdot g(0) - 32 \cdot \overline{g(s)} + 12 \overline{g(\sqrt{2}s)} - \overline{g(2s)}]$$

Elkins, 1951

$$(13) \text{ egyenlet} \quad \frac{1}{60s^2} [64 \cdot g(0) - 8 \cdot \overline{g(s)} - 16 \overline{g(\sqrt{2}s)} - 40 \overline{g(\sqrt{5}s)}]$$

$$(14) \text{ egyenlet} \quad \frac{1}{28s^2} [16 \cdot g(0) - 8 \cdot \overline{g(s)} - 24 \overline{g(\sqrt{5}s)}]$$

$$(15) \text{ egyenlet} \quad \frac{1}{62s^2} [44 \cdot g(0) + 16 \overline{g(s)} - 12 \overline{g(\sqrt{2}s)} - 48 \overline{g(\sqrt{5}s)}]$$

*Rosenbach, 1953

$$(16) \text{ egyenlet} \quad \frac{1}{24s^2} [96 \cdot g(0) - 72 \overline{g(s)} - 32 \overline{g(\sqrt{2}s)} + 8 \overline{g(\sqrt{5}s)}]$$

*Haalck, 1953

$$\frac{4}{s^2} [g(0) - \overline{g(s)}]$$

* A jobb áttekinthetőség kedvéért a képleteket a többiekhez hasonló alakra hoztuk.

vagy áttérve a ϱ radiális frekvenciaváltozóra:

$$W_{\frac{\partial^2}{\partial z^2}} = \varrho^2 \quad (7.3)$$

Azaz a

$$\varrho^2 \approx \frac{1}{s^2} \sum_{i=0}^n a_i J_0(\varrho r_i) \quad (7.4)$$

közelítő egyenlet „jóságát” kell megvizsgálnunk. Átszorozva s^2 -tel, majd áttérve relatív frekvenciákra:

$$q'^2 \approx \sum_{i=0}^n a_i J_0(q' \mu_i) \quad (7.5)$$

közelítő egyenlőségre jutunk. A képlet alapján elvégzett számítások végeredményeit a 22. ábrán mutatjuk be. Az átviteli függvények nemcsak valós, hanem emellett pozitív értékűek is: nemcsak a fázistolás zérus, hanem az átviteli függvény egyszermind az amplitúdó-karakterisztikát is megadja. Az exakt művelet átlagos megközelítésének sorrendje:

Henderson – Zietz képletei, Rosenbach, Haalek, Peters, Elkins képletei.

Hangsúlyozni kell az „átlagos” jelzöt. Előfordulhat ugyanis, hogy a tényleges pontelrendezésnek megfelelő képletek használata esetén különböző irányokban különböző eljárások adnak jobb közelítést.

Az eljárások három csoportra oszthatók:

- a) Henderson – Zietz féle eljárások,
- b) Rosenbach és Haalek eljárása,
- c) Elkins és Peters eljárásai.

A csoportok átlagos viselkedése hasonló. Mivel a levezetések (ld. Henderson – Zietz, 1949; Peters, 1949; Elkins, 1951; Rosenbach, 1953; Haalek, 1953) ugyanilyen három csoportba sorolhatók, látszik: lényegesen megszabja az átviteli tulajdonságokat, hogy a $g(x, y)$ -t milyen típusú sorba fejtjük, hogyan választjuk a függvényeket amiket a $g(x, y)$ közelítésére használunk.

Konkrét térképek vizsgálatánál is első lépés az, hogy a [6] végén leírt módon meghatározzuk a felső határfrekvenciákat és kijelöljük a relatív frekvencia-görbéken, hogy milyen intervallumba esnek a tényleges frekvenciák. Ha pl. a felső határfrekvenciáknak megfelelő relatív frekvencia: 90° , a Henderson – Zietz, Rosenbach, Haalek-féle képletek közel azonos végeredményeket fognak adni. Ha a relatív frekvencia-tartomány $1/3 - 1/4$ részén mozognak a tényleges frekvenciák az Elkins-féle eljárás hatása sem mutat lényeges eltérést a többiektől. Ezért fordulhat elő, hogy bizonyos kísérletekből úgy tűnik, alig van különbség az egyes eljárások között; másoknál viszont lényegesen eltérők a végeredményül kapott térképek.

Meg kell jegyezni, hogy a nagyfrekvenciás összetevők túlzott erősítése egyáltalán nem kívánatos. A gyors változások többnyire felszínközeli és így számukra érdektelen hatóktól erednek. A mérési hibák nagyfrekvenciás zajként jelentkeznek; végül nem megfelelő állomás távolság használata esetén is legelőször a nagyfrekvenciás tartomány torzul. Emiatt a nagyfrekvenciás kiemelés kedvezőtlen esetben azt hangsúlyozza ki (torzulások, zaj, érdektelen részek), amire nemcsak szükségünk nincsen, hanem aminek nem is felel meg fizikai valóság. A második derivált számítása átlagos megközelítésének sorrendje semmit sem mond a gyakorlati alkalmazás sikeréről. Ez utóbbi mindig a konkrét esettől függ. Ha felszínközeli hatásokat akarunk kiemelni és kellően sűrű, pontos műszerrel mért hálózatunk van a Rosenbach- vagy Haalek-féle képleteket alkalmazhatjuk. Ha viszonylag nagyobb mélységről akarunk képet alkotni vagy nagyobb állomástávolsággal készült térképet kell átalakítanunk az Elkins, Peters-féle képletek valamelyikét alkalmazhatjuk nagyobb sikerrel.

- Blackmann - Tukey, 1958*: The measurement of power spectra.
Dover publication, New York.
- Danes, Z. F. és Oncley, L. A., 1962*: An analysis of some second derivative methods.
Geophysics v. 27, no. 5, p. 611 - 615.
- Egyed L., 1956*: A regionális anomáliák elvi kérdéseiről.
Geofizikai Közlemények, V. kötet, 3 - 8. old.
- Elkins, T. A., 1951*: The second derivative method of gravity interpretation.
Geophysics v. 16, p. 29 - 50.
- Grosse, S., 1957*: Gravimetrische Auswerteverfahren für höhere Potentialableitungen.
Freiberger Forschungshefte, C. 40.
- Facsinay - Pintér - Pollhammeré, 1958*: A magasabb deriváltak számításának eredményei...
Geofizikai Közlemények, VII. kötet, 33 - 57. old.
- Haalck, H., 1953*: Lehrbuch der angewandten Geophysik, Teil I. Berlin.
- Henderson és Zietz, 1949*: Computation of second vertical derivatives of geomagnetic fields.
Geophysics v. 14, no. 4, p. 517 - 534.
- Jung, K., 1961*: Schwerkraftverfahren in der angewandten Geophysik.
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- Nettleton, L. L., 1964*: Regionals, residuals and structures.
Geophysics v. 19, no. 1, p. 1 - 23.
- Peters, L. J., 1949*: The direct approach to magnetic interpretation and its application.
Geophysics v. 14, no. 3, p. 290 - 320.
- Petiau, G., 1955*: La théorie de fonctions de Bessel, Paris.
- Rosenbach, O., 1953*: A contribution to the computation of „second derivative“ from gravity data.
Geophysics, v. 18, no. 4, p. 894 - 912.
- Shannon - Weaver, 1949*: The mathematical theory of communication.
Univ. of Illinois Press.
- Skeels, D. C., 1947*: Ambiguity in gravity interpretation.
Geophysics v. 12, no. 1, p. 43 - 56.
- Schwarz, C. A., 1954*: Some geometrical properties of residual maps.
Geophysics, v. 19, no. 1, p. 46 - 71.

EGYESÜLETI HÍREK

1965. dec. 9-én került megrendezésre az évvégi Záróülés és a Baráti Találkozó, melyen mintegy 70 fő vett részt. Itt került kiadásra első ízben az „Egyesület Emléklapja“, valamint itt adta át Bese Vilmos az Egyesület elnöke a tárgyjutalmakat.

*

A Központi Földtani Hivatal újjászervezésével a „Földtani Kutatás“ c. lap is új szerkesztésben jelent meg.

A lap elsősorban az alkalmazott földtani kutatás kérdéseivel foglalkozik, így beszámol a földtani tudomány, az ásványi nyersanyagkutatás hazai és nemzetközi legfontosabb eredményeiről.

A lap felelős szerkesztője *Dr. Kertai György*, a Központi Földtani Hivatal elnöke, szerkesztője *Lukács Jenő*, a Központi Földtani Hivatal Közgazdasági Főosztályának vezetője.

A szerkesztő bizottság a földtani kutatás vezető szakembereiből áll.

A szerkesztő bizottság tagjai: *Dr. Alföldi László*, *Ádám Oszkár*, *Dr. Barnabás Kálmán*, *Dr. Dank Viktor*, *Dr. Jantsky Béla*, *Dr. Juhász József*, *Dr. Kassai Ferenc*, *Morvai Gusztáv*, *Dr. Nemezz Ernő*, *Dr. Varju Gyula*, *D. Vitéz Sándor*.

A Földtani Kutatás c. lap évente négy alkalommal jelenik meg. Előfizetési és terjesztési ügyben felvilágosítást ad a Magyarhoni Földtani Társulat (Bp. V., Szabadság tér 17. Tel.: 124 - 116).