

Horizontálisan rétegzett szerkezetek elméleti vertikális elektromos szondázási görbéinek számítása

SALÁT PÉTER

A viszonylag kisszámú elméleti görbe és a szondázási eredmények sokrétűsége szükségessé teszi új szondázási görbék kiszámítását. A gyors számítógépek elterjedése lehetőséget ad, hogy a vertikális elektromos szondázás eredményeinek értelmezésére egyre inkább felhasználják a mért görbék elméleti görbékkel való megközelítését számítógépek segítségével (Kunetz, 1967. szóbeli közlés). A dolgozat az elektromos szondázási gyakorlat zömét képező három, négy és ötréteges szelvények elméleti görbéinek számítására ad könnyen programozható eljárást és programvázlatot.

Теоретических кривых кажущегося сопротивления относительно мало, а разных результатов вертикального электрического зондирования относительно много. Поэтому нужно вычислить новые графики зондирования. Вычислительные машины дают возможность интерпретировать данный полевой график с приближением теоретическими кривыми. Доклад даёт простой вычислительный метод и блок-схему программы вычисления трёх, четырёх и пяти-слойных теоретических графиков ВЭЗ.

Die relativ kleine Anzahl der theoretischen Kurven und die Mehrfaltigkeit der Resultaten der Tiefsondierungen verursachen die Notwendigkeit der Rechnung neuer theoretischen Kurven. Mit Rechenmaschinen ist es möglich, die gemessenen geoelektrischen Kurven mit vielen gerechneten theoretischen Kurven zu vergleichen (Kunetz, 1967, wörtliche Mitteilung). — Die vorliegende Arbeit gibt ein leicht programmierbares Verfahren und Programm skelett, für die Rechnung theoretischer Kurven für drei, vier und fünfschichten-Modelle, welche in Tiefsondierungspraxis am meisten vorkommen.

Horizontálisan rétegzett szerkezetekre, az elektródák szimmetrikus gradiens (Schlumberger) elrendezése mellett (1. ábra) a látszólagos fajlagos ellenállás Stefanescu eredményei alapján a következő integrál kifejezéssel adható meg (Flathe, 1955):

$$\varrho_L(r) = \varrho_1 \left\{ 1 + 2r^2 \int_0^{\infty} K_i(m) \cdot J_1(mr) m \, dm \right\}. \quad (1)$$

Itt $K_i(m)$ az úgynevezett i rétegre vonatkozó magfüggvény (kernel function), J_1 , az elsőfajú elsőrendű Bessel-függvény.

- ϱ_i — a rétegenállások
- h_i — a réteghatármélységek
- d_i — a rétegvastagságok
- k_i — a visszaverődési koefficiensek

$$k_i = \frac{\varrho_{i+1} - \varrho_i}{\varrho_{i+1} + \varrho_i}. \quad (2)$$

A magfüggvény kiszámítására Flathe (1955.) adott rekurziós képleteket.

Az

$$u = e^{-2m} \quad (3)$$

helyettesítéssel az $(i+1)$ rétegre vonatkozó magfüggvény

$$K_{i+1}(u) = \frac{P_{i+1}(u)}{H_{i+1}(u) \cdot P_{i+1}(u)}, \quad (4)$$

ahol $P_{i+1}(u)$ és $H_{i+1}(u)$ a következő rekurzív formulákból nyerhetők:

$$P_{i+1}(u) = P_i(u) + H_i(u^{-1}) \cdot k_i u^{d_1+d_2+\dots+d_i} \quad (5)$$

$$H_{i+1}(u) = H_i(u) + P_i(u^{-1}) k_i u^{d_1+d_2+\dots+d_i}. \quad (6)$$

Az első tagok pedig

$$P_2(u) = k_1 u^{d_1} \quad (7)$$

$$H_2(u) = 1. \quad (8)$$

Az adott összefüggések segítségével írjuk fel a három, négy és ötréteges magfüggvényeket, mint a görbék számításának kiindulási alapjait:

$$K_3(u) = \frac{k_1 u^{d_1} + k_2 u^{d_1+d_2}}{(1 + k_1 k_2 u^{d_2}) - (k_1 k_2 u^{d_1} + k_2 u^{d_1+d_2})} \quad (9)$$

$$K_4(u) = \frac{k_1 u^{d_1} + k_2 u^{d_1+d_2} + k_3 u^{d_1+d_2+d_3} + k_1 k_2 k_3 u^{d_1+d_3}}{(1 + k_1 k_2 u^{d_2} + k_1 k_3 u^{d_2+d_3} + k_2 k_3 u^{d_3}) - (k_1 u^{d_1} + k_2 u^{d_1+d_2} + k_3 u^{d_1+d_2+d_3} + k_1 k_2 k_3 u^{d_1+d_3})} \quad (10)$$

$$K_5(u) = \frac{k_1 u^{d_1} + k_2 u^{d_1+d_2} + k_3 u^{d_1+d_2+d_3} + k_1 k_2 k_3 u^{d_1+d_3} + k_4 u^{d_1+d_2+d_3+d_4} + k_1 k_2 k_4 u^{d_1+d_3+d_4} + k_1 k_3 k_4 u^{d_1+d_4} + k_2 k_3 k_4 u^{d_1+d_2+d_4}}{(1 + k_1 k_2 u^{d_2} + k_1 k_3 u^{d_2+d_3} + k_2 k_3 u^{d_3} + k_1 k_4 u^{d_2+d_3+d_4} + k_2 k_4 u^{d_2+d_4} + k_3 k_4 u^{d_4} + k_1 k_2 k_3 k_4 u^{d_2+d_4}) - (k_1 u^{d_1} + k_2 u^{d_1+d_2} + k_3 u^{d_1+d_2+d_3} + k_1 k_2 k_3 u^{d_1+d_3} + k_4 u^{d_1+d_2+d_3+d_4} + k_1 k_2 k_4 u^{d_1+d_3+d_4} + k_1 k_3 k_4 u^{d_1+d_4} + k_2 k_3 k_4 u^{d_1+d_2+d_4})} \quad (11)$$

Az (1) integrál kiszámításához a magfüggvény hatványsorba fejtésével lehet eljutni. A sorfejtési együtthatók egyszerűen kaphatók, ha feltesszük, hogy a d_i rétegvastagságok egész számok. Ez gyakorlatilag semmiféle korlátot nem jelent a rétegvastagságok viszonyára, mert megfelelő kicsiny hosszúság egységet választva a rétegvastagságok tetszőleges racionális értéket felvehetnek.

A magfüggvény sorfejtése:

$$K_i(u) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_i(n) u^n. \quad (12)$$

Ezzel a helyettesítéssel az (1) integrál átalakítható:

$$\varrho_L(r) = \varrho_1 \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Q_i(n) \int_0^{\infty} e^{-2nm} J_1(mr) m \, dm \right\}. \quad (13)$$

Az adott típusú integrálok pedig zárt formában megadhatók (Mooney et al., 1966):

$$\frac{\varrho_L(r)}{\varrho_1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_i(n)}{\left(1 + \frac{4n^2}{r^2}\right)^{3/2}}. \quad (14)$$

A sorfejtésről Mooney és munkatársai (1966) bebizonyították, hogy a $0 \leq u \leq 1$ tartományban érvényes minden olyan szerkezetre, amelyik nem tartalmaz O vagy ∞ ellenállású réteget. Ha pedig ilyen réteg van, akkor is, bár az $u = 1$ -re a sorfejtés nem konvergens, a látszólagos ellenállást mégis lehet az adott képletből számítani.

A $Q_i(n)$ sorfejtési együtthatók a (9), (10) és (11) magfüggvény kifejezésekből és a (12) képletből nyerhetők. Például három rétegre (9) és (12) egybevetéséből adódik, hogy:

$$k_1 u^{d_1} + k_2 u^{d_1+d_2} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_3(n) [(u^n + k_1 k_2 u^{n+d_2}) - (k_1 u^{n+d_1} + k_2 u^{n+d_1+d_2})] \quad (15)$$

A jobb oldali végtelen összegben szerepelnek a $Q_3(n)$ együtthatók. Közöttük olyan összefüggésnek kell fennállni, hogy az azonos kitevőjű u hatványok együtthatóinak összege zérus legyen. Ugyanis csak ekkor lehet igaz tetszőleges u mellett az egyenlőség. Az u^J együtthatóinak összehasonlításából:

$$Q_3(J) = k_1 Q_3(J-d_1) + k_3 Q_3(J-d_1-d_3) - k_1 k_2 Q_3(J-d_2) + k_0. \quad (16)$$

$$\text{Itt } k_0 = \begin{cases} k_1 & \text{ha } J = d_1 \\ k_2 & \text{ha } J = d_1 + d_2 \\ O & \text{ha a fenti egyenlőségek egyike sem igaz.} \end{cases} \quad (17)$$

A

$$Q_3(J) \equiv 0, \quad \text{ha } J \leq 0. \quad (18)$$

Ezek a rekurziós összefüggések lehetőséget adnak bármely $Q_3(J)$ együttható kiszámítására az előző $d_1 + d_2 = h_2$ darab együtthatóból.

Teljesen hasonló megfontolással kaphatók a négy réteges szelvény $Q_4(n)$ együtthatói:

$$Q_4(J) = k_1 Q_4(J-d_1) + k_2 Q_4(J-d_1-d_2) + k_3 Q_4(J-d_1-d_2-d_3) + \\ + k_1 k_2 k_3 Q_4(J-d_1-d_3) - k_1 k_2 Q_4(J-d_2) - k_1 k_3 Q_4(J-d_2-d_3) - k_1 k_2 k_3 Q_4(J-d_1-d_3) + k_0. \quad (19)$$

Itt

$$k_0 = \begin{cases} k_1 & \text{ha } J = d_1 \\ k_2 & \text{ha } J = d_1 + d_2 \\ k_3 & \text{ha } J = d_1 + d_2 + d_3 \\ k_1 k_2 k_3 & \text{ha } J = d_1 + d_3 \\ k_2 + k_1 k_2 k_3 & \text{ha } J = d_1 + d_2 = d_1 + d_3 \\ O & \text{ha a fenti egyenlőségek egyike sem igaz.} \end{cases} \quad (20)$$

A

$$Q_4(J) \equiv 0 \quad \text{ha } J \leq 0 \quad (21)$$

Végül pedig az ötréteges magfüggvény sorfejtési együtthatói:

$$Q_5(J) = k_1 Q_5(J-d_1) + k_2 Q_5(J-d_1-d_2) + k_3 Q_5(J-d_1-d_2-d_3) + k_1 k_2 k_3 Q_5(J-d_1-d_3) + \\ + k_4 Q_5(J-d_1-d_2-d_3-d_4) + k_1 k_2 k_3 Q_5(J-d_1-d_3-d_4) + k_1 k_3 k_4 Q_5(J-d_1-d_4) + \\ + k_2 k_3 k_4 Q_5(J-d_1-d_2-d_4) - k_1 k_2 Q_5(J-d_2) - k_1 k_3 Q_5(J-d_2-d_3) - k_2 k_3 Q_5(J-d_3) - \\ - k_1 k_4 Q_5(J-d_2-d_3-d_4) - k_2 k_4 Q_5(J-d_3-d_4) - k_3 k_4 Q_5(J-d_4) - \\ - k_1 k_2 k_3 k_4 Q_5(J-d_2-d_4) + k_0 \quad (22)$$

$$k_0 = \begin{cases} k_1 & \text{ha } J = d_1 \\ k_2 & \text{ha } J = d_1 + d_2 \\ k_3 & \text{ha } J = d_1 + d_2 + d_3 \\ k_1 k_2 k_3 & \text{ha } J = d_1 + d_3 \\ k_4 & \text{ha } J = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ k_1 k_2 k_4 & \text{ha } J = d_1 + d_3 + d_4 \\ k_1 k_3 k_4 & \text{ha } J = d_1 + d_4 \\ k_2 k_3 k_4 & \text{ha } J = d_1 + d_2 + d_4 \\ 0 & \text{ha egyik fenti egyenlőség sem teljesül.} \end{cases} \quad (23)$$

Ha J két vagy több vastagság-kombinációval is egyenlő egyszerre, akkor k_0 a megfelelő koefficiensek összege, amint ezt a (20)-nál láttuk és szintén igaz, hogy

$$Q_5(J) \equiv 0, \quad \text{ha } J \leq 0. \quad (24)$$

A következőkben megvizsgáljuk, hogy a látszólagos fajlagos ellenállás megadott pontossága hány tagig történő sorfejtéssel érhető el. Mooney és munkatársai (1966) a hibára egy felső korlátot adnak meg.

Ha n tag után befejeződik a sorfejtés, akkor az első n részletösszeg eltérése $q_L < (r)$ valódi értékétől kisebb, mint

$$\varepsilon_k = r^3/8n^2. \quad (25)$$

Ugyancsak az említett szerzők állapították meg, hogy a valódi hiba körülbelül az ε_k hibakorlát négyzete

$$\varepsilon_v \approx \varepsilon_k^2. \quad (26)$$

Háromréteges görbéken végzett próbaszámításaink azt mutatták, hogy ezt a feltételt használva az albumokban található görbektől erősebb az eltérés, különösen a nagyobb görbeletű szakaszokon. Tapasztalataink szerint jobb egyezés kapható, ha a valódi hibának (26) helyett az

$$\varepsilon_v \approx \varepsilon_k^{3/2} = r^{9/2}/8^{3/2}n^3 \quad (27)$$

értéket tekintjük.

A látszólagos fajlagos ellenállás görbéit 62,5 mm egységű kettős logaritmi-kus léptékben szokás ábrázolni (lg 10-nek megfelel 62,5 mm). Ha h mm-nél kisebb hiba engedhető meg, azaz

$$62,5[\lg(q_L(r) + \varepsilon_v) - \lg(q_L(r))] < h \quad (28)$$

akkor, mivel a logaritmus-függvény teljes differenciálja:

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx \quad (29)$$

ezt figyelembe véve a (28) átalakítható:

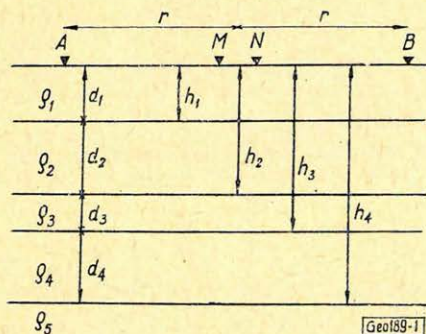
$$\ln[q_L(r) + \varepsilon_v] - \ln[q_L(r)] = \frac{\varepsilon_v}{q_L(r)} < \frac{2,3}{62,5} \cdot h. \quad (30)$$

Ezt pedig (27) felhasználásával átrendezve:

$$n > \frac{1,06}{h} \cdot \frac{r^{3/2}}{\sqrt[3]{Q_L(r)}} \quad (31)$$

Ezt tekintjük a sorfejtés befejezésének kritériumaként. Nagy r -eknél ez a számológép számára gazdaságtalanul nagy munka lehet. Tapasztalataink szerint háromréteges görbéknel körülbelül 100–200-szor ($d_1 + d_2$) az az optimális részletösszeg tagszám, amely nagy r -eknél is 0,5–1% pontosan megközelíti az aszimptotikus értéket és még nem használ fel aránytalanul hosszú időt az utolsó tagok kiszámítására.

A fentiekben vázolt algoritmus alapján állítottam össze a programokat, amelyek bloksémáját és kissé részletesebb vázlatát az alábbiakban közlöm:



1. ábra. Vízszintes rétegzett közeg

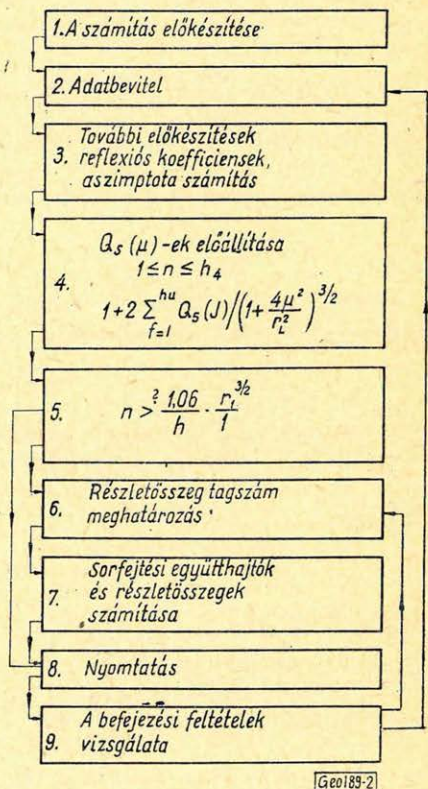
Фиг. 1. Горизонтально-слоистая среда

Fig. 1. Horizontelles Schichtprofil

2. ábra. A számítás bloksémája

Фиг. 2. Блок-схема программы

Fig. 2. Blockscheme der Rechnung



Programvázlat ötréteges esetre.

1. A számítás előkészítése. Bizonyos rekeszekbe raktározódnak az r_i távolságok, amelyeknél a $Q_L(r_i)$ értékek kiszámolandók. Továbbá az r_i^2 és $r_i^{3/2}$ értékeket, az n^2 értékeket 1-től egy bizonyos határig szintén előre kiszámoltatjuk, mint olyan adatokat, amelyekre többször is szükség lesz.

$Q_1 = 1$ beállítás.

2. Adatbeolvasás. Bemenő adatok a rétegpármeterek $Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, d_1, d_2, d_3, d_4$, valamint a görbe kiszámításának megállapítását vezérlő adatok Q_{max} , ill. Q_{min} ellenálláskorlát és r_{max} távolsághorlát, amely határokon túl nem kell számolni.

3. A k_i reflexiókoefficiensek és a nagy r_i -khez tartozó aszimptotikus $\varrho_L(r_i)$ értékek kiszámítása.

4. Az első $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = h_4$ darab $Q_5(n)$ sorfejtési együttható előállítására és ezek segítségével az első h_4 tagú részletösszegek kiszámítása minden r_i -re (22, 23, 24 és 14 képletek).

5. A pontossági kritérium (31) alkalmazása az r_i -hez számolt részletösszegekre a $\varrho_L(r_1) \approx \varrho_L(r_0) = 1$ feltevéssel. Ha (31) igaz, ugrás 8.-ra, ha nem

6. meg kell határozni, hogy hány h_4 tagú ciklus lefutása után teljesül a (31)-es pontossági feltétel az adott r_i távolságnál, feltéve, hogy $\varrho_L(r_i) \approx \varrho_L(r_{i-1})$

7. A sorfejtési együtthatók és a részletösszegek elkészítése az előző pontban megadott tagszámig, h_4 tagú ciklusokban (22 és 14 képletek).

8. Az adott r_i és a hozzá tartozó eredmény kinyomtatása. Áttérés a következő (r_{i+1}) távolságra.

9. A görbe kiszámolását szabályozó feltételek vizsgálata. Ha a befejezési feltételek egyike sem teljesül, ugrás 6-ra, ha egyik is teljesül, akkor ugrás 2-re.

A vázolt algoritmus és blokk-séma alapján készített MITRA autokódban írt programmal a Geofizikai Intézet számára háromréteges elméleti szondázási görbéket számoltam MINSZK II gépen. A gép 40–45 r_i távolságnál 4–5 perc alatt számolta ki a látszólagos fajlagos ellenállás értéket. A négy- és öt-réteges programok alkalmazhatók a terepen mért görbék fokozatos megközelítésére, beleértve az ekvivalencia problémák vizsgálatát is.

IRODALOM

- [1] H. Flathé, 1955: A practical method of calculating geoelectrical model graphs for horizontally stratified media. Geophys. Prosp. V. 3. pp. 269–294.
- [2] H. M. Mooney, — E. Orellana, — H. Pickett, — L. Tornheim, 1966.: A resistivity computation method for layered Earth models. Geophysics V. XXXI. No. 1. pp. 192–203.

EGYESÜLETI HÍREK A KÖZGYŰLÉSÉRŐL

Nagyrendezvények:

A beszámolási időszakban három szimpóziumot és két vándorgyűlést szerveztünk. Az első 1964. szeptember 14–20-a között, a X. Jubileumi Szimpózium volt, amelyen két, párhuzamosan ülésező szekcióban 60, köztük 25 külföldi előadás hangzott el. A szimpóziummal egyidejűleg a Technika Házában műszerkiállítást rendeztünk.

Az Elnökség 1963-ban hozott határozatának megfelelően 1965-ben nem rendeztünk szimpóziumot, hanem „Geofizikai módszerek alkalmazása a nyersanyagkutatásban, különösen tekintettel a délalföldi területre” tárgykörrrel Szegeden, szeptember 8–10 között vándorgyűlést szerveztünk, amelyen a felszíni és mélyfúrású geofizika aktuális problémáival foglalkozó 15 előadás hangzott el.

Az 1966. szeptember 12–14 között rendezett XI. Szimpóziumon a plenáris üléseken és a két szekcióban 42 előadás, ezek között 14 külföldi beszámoló hangzott el.

1967-ben, mivel itthon nem rendeztünk szimpóziumot, május 31–június 1 között „Geofizikai módszerek alkalmazása az ásványi nyersanyagkutatásban a Dunántúl felületén” tárgykörrrel Veszprémben tartottunk vándorgyűlést, amelyen 12 előadás hangzott el.

1967. szeptember 18–22 között rendeztük a Deutsche Gesellschaft für Geologische Wissenschaften Fachverband Geophysik-vel időközben létrejött megállapodás alapján Leipzigben az első közös szimpóziumot, ahol két szekcióban 32 előadás hangzott el. Ezek közül 10 magyar volt.

Az 1966. évi záróülés határozatának megfelelően kísérletképpen bevezettük az egésznapos több előadást felölelő szakosztályi ülést. Az eredmény azonban nem egészen felel meg a célkitűzésnek. Egyes esetekben ugyanis olyan sok előadás került a programba, hogy nem maradt kellő idő aktív vita kibontakozására.