Kvadratikus detektáló szűrő tervezése és analizálási lehetőségei

KÉSMÁRKY ISTVÁN

Egy nemlineáris detektáló szűrő tervezését és alkalmazhatóságát vizsgáltuk meg. A szűrő kimenete a bemenet kvadratikus alakjaként állítható elő. Alkalmazásának előnye az, hogy tervezése csupán a jel autokorrelációs függvényének ismeretét kívánja meg. A fázisinformációt az így nyert kimeneti csatorna elveszti, de a jel/zaj arány javulása jelentős.

Рассматриваются разработка и возможности применения нелинейного детектирующего фильтра. Выход фильтра получается в квадратичной форме входа. Преимущество такого фильтра заключается в том, что дял его разработки трегуется знать только автокорреляционную функцию сигнала. Получаемые таким образом выходной канал теряет информацию о фазах, но за то в значительной мере улучшается отношение сигнал/шум.

Es werden Entwurf und Anwendungsmöglichkeiten eines nichtlinearen Filters untersucht, dessen Ausgangssignal als eine quadratische Form des Eingangssignals dargestellt werden kann. Ein Vorteil seiner Anwendung wird dadurch gegeben, dass sein Entwurf nur die Kenntnis der Autokorrelationsfunktion des Signals erfordert. Der so gewonnene Ausgangskanal verliert zwar die Phaseninformation, aber eine bedeutende Besserung des Signal/Geräusch-Verhältnisses wird erhalten.

Bevezetés

Számos, időben megfigyelt fizikai mennyiség hasznos jelek és rendezetlen ingadozások, zajok összegének tekinthető. Az ilyen regisztrátumok kiértékeléséhez általában szükséges, hogy a hasznos jeleket jobban felismerhetővé tegyük. A szűrések feladata olyan eljárások alkalmazása, melyek a jelek és zajok statisztikai jellemzőinek ismeretében a jeleket kiemelik, a zajokat pedig elnyomják. Egyes esetekben szükséges lehet olyan detektáló szűrési eljárások alkalmazása, melyek a jel alakjától függetlenül a jel létéről, vagy nem létéről adnak felvilágosítást. Természetes követelmény a tervezendő szűrőkkel szemben, hogy a bemenetet alkotó jelre és zajra minél kevesebb előzetes ismeretet kívánjanak meg.

A statisztikai tárgyalásmód jól alkalmazható a szeizmikus adatok feldolgozásánál is. Természetesen ekkor a jelet *(reflexiót)* nem a hullámegyenlet bizonyos határfeltételeket kielégítő megoldásának tekintjük, hanem csupán a rendezetlen zajoktól eltérő viselkedését vizsgáljuk. A továbbiakban a detektálás műveletével foglalkozunk, melynek célja tehát a *jel/zaj* arány növelése és statisztikai hipotézisvizsgálat a jel létére vonatkozóan.

Milyen tulajdonságok alapján különíthetők el a jelek a zajoktól?

a) jelalak *b)* energianövekedés *c)* frekvencia *d)* szelvénybeli oldalirányú fázisfolytonosság (szeizmikában fontos).

A továbbiakban az *a)* és *b)* ponttal foglalkozunk.

Ismeretes, hogy a $W(t)$ jelalak felhasználásával tervezhető a kimeneti jel/zaj energiaarányt maximalizáló szűrő (matched filter), mely éppen a W jel időbeli fordítottja. A kimenet a bemeneti csatorna és a $W^{(-1)}$ szűrő konvoluciójaként áll elő:

$$y^*(t) = \int_0^T y(t-\tau)\overset{(-1)}{W}(\tau)\,d\tau,$$

ahol *y(t)* és *y*(t)* a be-, illetve kimenet. Ez megfelel annak, hogy a bemenetet a *(jel+zaj)* várható értékével súlyozzuk. (A zaj várható értéke zéró.) A szűrő tervezéséhez tehát előre kell ismerni a jel alakját, ami általában nem adható meg.

A szeizmikus csatorna energiája képezhető (Baranov 1964) az

$$E = v^2 - \frac{\partial v}{\partial t}\int v\,dt$$

kifejezés alapján, ahol v a regisztrált sebesség. Az eljárás hátránya, hogy a fázisinformáció elvész, ugyanakkor a *jel/zaj* arány nem nő meg. Az egyszerű energia-kritérium tehát nem kielégítő.

Mivel a jel autokorrelációs függvénye viszonylag egyszerűen becsülhető általános esetben is (Dash 1970), célszerű lenne olyan kimeneti *jel/zaj* aránymaximalizáló szűrőt tervezni, amelyhez csupán ezt kell ismerni.

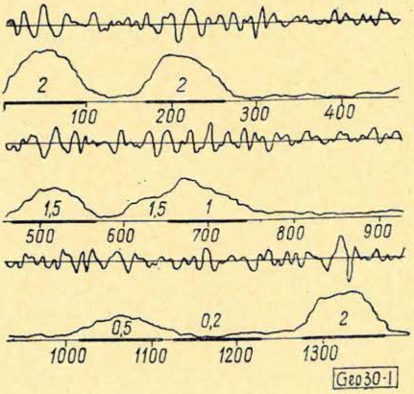
A kvadratikus szűrésről általában

A kvadratikus szűrő bevezethető olyan nem konstans együtthatójú konvoluciós operátorként, ahol a szűrő függ a bemenettől. Emiatt a szűrő nem jellemezhető egyértelműen átviteli függvényével.

A szűrt kimenet kifejezhető az

$$y^*(t) = \int_{-T}^{+T}\int_{-T}^{+T} y(t-\alpha)\,A(\alpha,\beta)\,y(t-\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

alakban.



1. ábra. A bemenet és a szűrt csatorna. A kimeneten fel van tüntetve a jelek elhelyezése és a megfelelő *jel/zaj* energia

Фиг. 1. Вход и фильтрованный канал. На выходе указаны распределение сигналов и соответствующее отношение *сигнал/шум*

Fig. 1. Der Eingang und der gefilterte Kanal. Beim Eingang werden die Lage der Signale und die entsprechende *Signal/Geräusch* – EnergieVerhältnis dargestellt

Áttérve digitálisan adott függvényekre: legyen $t = k\tau$, ahol τ a mintavételi távolság.

Ekkor az $\alpha = i\tau$ és $\beta = j\tau$ jelölést bevezetve és az integrálokat szummákká alakítva

$$y^*(k\tau) = \tau^2 \sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} y(k\tau + i\tau)\, A(i\tau, j\tau)\, y(k\tau + j\tau)$$

adódik. Legyen $\tau = 1$,

$$y_k^* = \sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} y_{k+i} A_{ij} y_{k+j} = \sum_{i=-N}^{N} y_{k+i} \sum_{j=-N}^{N} A_{ij} y_{k+j}.$$

A fenti kifejezés mátrix alakban:

$$y_k^* = [y_{k+N} \ldots y_k \ldots y_{k-N}] \begin{bmatrix} A_{-N-N} & \ldots & A_{-NN} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ A_{N-N} & & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{K+N} \\ . \\ . \\ . \\ y_{K-N} \end{bmatrix}$$

Végül szimbólikusan:

$$y^* = Y' \mathbf{A}\, Y = Y' K^*$$

alakba írható fel az y^* kimenet egy eleme, ahol $\mathbf{A}$ a kvadratikus szűrőmátrix, Y a bemenet (' a transzponálást jelenti), K^* a változó együtthatójú konvoluciós szűrő.

A linearitási feltételek nyilván nem teljesülnek:

a) ha a szűrés a kY bemenetre hat, a kimeneten $k^2 y^*$ jelenik meg,
b) ha az operátor az $Y = N + S$ bemenetre hat, a kimenet:

$$(N+S)' \mathbf{A} (N+S) = N' \mathbf{A} N + S' \mathbf{A} N + N' \mathbf{A} S + S' \mathbf{A} S$$

alakú, vagy részletesebben:

$$\sum_i \sum_j N_i A_{ij} N_j + \sum_i \sum_j S_i A_{ij} S_j + \sum_i \sum_j N_i A_{ij} S_j + \sum_i \sum_j S_i A_{ij} N_j.$$

A kimenet várható értékét képezve:

$$E(y^*) = \sum_i \sum_j A_{ij} E(N_i N_j) + \sum_i \sum_j A_{ij} E(S_i S_j) + \sum_i \sum_j A_{ij} E(N_i S_j) +$$

$$\sum_i \sum_j A_{ij} E(S_i N_j) = \sum_i \sum_j A_{ij} \Phi_{NN\,ij} + \sum_i \sum_j A_{ij} \Phi_{SS\,ij} +$$

$$+ \sum_i \sum_j A_{ij} \Phi_{NS\,ij} + \sum_i \sum_j A_{ij} \Phi_{SN\,ij}$$

ahol Φ a megfelelő auto-illetve keresztkorrelációs függvényeket jelenti.

Látható, hogy N és S korrelálatlansága esetén a kvadratikus szűrő rendelkezik a második *(b)* linearitási tulajdonsággal. Ekkor a keresztkorrelációs tagok eltűnnek ($\Phi_{NS\,ij} = \Phi_{SN\,ij} = 0$) és a kimenet várható értéke

$$E(y^*) = E(n_k^*) + E(s^*).$$

E tulajdonság alapján, korrelálatlan jel és zaj additiv keverékét megszűrve, a kimenet a szűrt jel és a szűrt zaj összegének tekinthető.

A kvadratikus szűrő kimenete energia jellegű mennyiség.

A nemlineáris szűrőkre általában jellemző, hogy $y(t)=n(t)+s(t)$ bemenet esetén (Davenport – Root, An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise 1958) az a. és b. tulajdonságok miatt, $s(t)$ jelenlétében a kimenet zajosodik és a túl kis jel/zaj arányú jelek elnyomódnak.

Kvadratikus detektáló szűrő

Legyen adva egy

$$y(t) = n(t)+s(t)$$

bemenet, ahol $n(t)$ valamilyen stacionárius stochasztikus folyamat, és $s(t)$ jel egy bizonyos tartományon $\{t-T, t+T\}$ szintén stacionárius. Ha $n(t)$ és $s(t)$ korrelálatlan, akkor a szűrt kimenet $y^*(t) = n^*(t)+s^*(t)$ alakú, ahol

$$y(\overset{*}{t}) = \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} y(t-\alpha)\, A(\alpha, \beta)\, y(t-\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

vagy mátrix írásmódban:

$$y(\overset{*}{t}) = Y' \mathbf{A}\, Y;$$

keresendő az az $\mathbf{A}$ operátor, ami az $E(s^*)\ /\ E\ (n^*)$ mennyiséget maximalizálja, ami a jel- és zaj-energiák várható értékeinek hányadosa.

$$\frac{E(s^*)}{E(n^*)} = \frac{\sum\limits_i \sum\limits_j A_{ij}\, \Phi_{ss\, ij}}{\sum\limits_i \sum\limits_j A_{ij}\, \Phi_{ss\, ij}} = \max.$$

Stacionárius jel és zaj folyamatokról lévén szó, Φ_{NN} és Φ_{SS} csupán $|i-j|$ függvényei. (Toeplitz típusú autokorrelációs mátrix)

Legyen az $\mathbf{A}$ spúrjában álló elemek értéke rögzített, pl. a jel átlagos energiája. Ekkor a maximálandó hányados nevezője fehér spektrumú zaj esetén konstans lesz. $(\Phi_{NN\, ij} = \Phi_{NN\, ij}\, \delta_{ij})$

Feladat tehát a számláló maximalizálása.

$$\sum_i \sum_j A\, ij\, \Phi_{ss\, ij} = \max.,$$

vagy szimbólikusan

$$\sum_k A_k\, \Phi_{ss\, k} = \max.$$

A Cauchy tétel értelmében

$$|(A, \Phi_{ss})| \leq \|A\| \cdot \|\Phi_{SS}\|.$$

Az egyenlőség $A_k = \Phi_{ss\,k}$ esetén áll fenn, tehát a kvadratiikus *jel/zaj* energiát maximalizáló szűrő a jel autokorrelációs mátrixával egyezik meg. (Egy konstans erejéig.)

Ez megfelel annak, hogy a bemenet kvadratikus alakját a jel kvadratikus alakjának várható értékével (autokorrelációs mátrixával) súlyozzuk. A kimenet χ^2 eloszlású, ha a jel autokorrelációja $\delta_{(0)}$ alakú, más esetben bonyolultabb. Az y^* kimenet jellemzi a Hilbert tér n dimenziós alterében a jelnek és a bemenetnek megfelelő *(„jel+zaj”*, vagy *„zaj”)* pontok távolságát, amennyiben a jel és a zaj autokorrelációs függvénye különböző. (Nem preciz távolság-fogalom.)

A hipotézis-vizsgálatoknál a jel $y^*\ (Y)\ \geq C$ egyenlőtlenséggel definiált környezetébe eső Y bemenetnél fogadhatjuk el a jel hipotézisét, ahol C egy rögzített konstans.

A kvadratikus szűrő kimenete tehát felfogható a Hilbert tér (bemenetek alkotta) poligonján értelmezett függvénynek.

Az $y^*(t)$ kimenetnek a Weierstrass tétel értelmében a jel fent definiált környezetében létezik maximuma; célszerű ezt a maximumot *„jel”*-nek minősíteni. A döntési küszöb egyszerűen megállapítható Monte-Carlo módszerrel úgy, hogy $1-\varepsilon$ valószínűséggel legyen $y^*(x)\ \geq\ C$, ahol ε egy kis szám. A szűrő (jel+zaj) bemenet esetén a waveletek fázisára nem érzékeny.

A kvadratikus szűrő előnye, hogy tervezéséhez csak a jel autokorrelációs függvényét kell ismerni, ami reális esetben is becsülhető. Fehér spektrumú jel esetén a szűrő azonos az irodalomból ismert burkolódetektorral (kvadratikus jelfeldolgozás).

Eredmények

A kvadratikus detektáló szűrőt műszeizmogram-csatornákon próbáltam ki. A zajt számítógép véletlenszámgenerátorával előállított fehér spektrumú Gauss folyamat *20* és *100 Hz* közti sáváteresztő szűrésével nyertem. Ehhez adtam hozzá különböző *jel/zaj* energia arányú *8*-ad fokú csonkított Hermit polinom waveleteket *(1. ábra)*.

$$W_8(t) = H_8(t) \cdot e^{-kt^2}$$

Az eredmények azt mutatják, hogy a kvadratikus szűrő a *0,5* és annál nagyobb *jel/zaj* arányú jeleket igen jól kiemeli. Nagy *(45×45-ös)* szűrőmátrix esetén a Φ_{NS} és Φ_{SN} valóban kis szórással nulla, a kimeneten alig jelentkeznek magasabb frekvenciájú zajok. (Ezeket célszerű simítással eltüntetni.) A konvoluciós szűréshez képest a számítási idő a mátrix méreteinek megfelelően hosszabb, ($\geq$ kétszeres) bizonyos esetekben előnyei miatt mégis hasznos lehet az alkalmazása: *0,5 jel/zaj* energia-arány esetén a lineáris detektáló szűrőnél közelítőleg kétszer olyan nagy *jel/zaj* arány javulást eredményez. Fehér spektrumú zaj esetén az eljárás különösen hatásos.

IRODALOM

Baranov, Picou: Energy and vector record-sections Geophysics, v. 29 p. 17–37 (1964).
Dash, Obaidullah: Determination of signal and noise statistics using correlation theory, Geophysics, v. 35, No. 1 (1970.)
J. A. Srejgyer: Monte-Carlo módszerek. Műszaki könyvkiadó (1965).