A felszíni és karottázs elektromágneses szondázások interpretációjának az információelméleten és a lineáris rendszerek elméletén alapuló stratégiája*

*SALÁT PÉTER – DREHOS DEZSŐ***

Az előadás a felszíni egyenáramú szondázások, a magnetotellurikus szondázások, az elektromágneses frekvencia szondázások, az elektromágneses térbeállásos szondázások, valamint az elektromos és indukciós karottázs szelvényezések interpretációjának automatizálásával foglalkozik. A nevezett geofizikai eljárások interpretációjának stratégiáját célszerű a mérésekből kapható információ és az információ kinyerésére fordított költség viszonyának maximalizálására alapozni. Az információ mértékéül az interpretáció során becsülhető paraméterek együttes valószínűségi eloszlásának entrópiáját lehet tekinteni. Vizsgálataink szerint az elektromágneses szondázások direkt feladatának és inverz transzformációjának numerikus megoldását a lineáris rendszerek elméletére felépített algoritmusok 10÷100-szor meggyorsítják a hagyományos számítási módszerekhez képest. Az előadás megmutatja, hogy

a) a geofizikai interpretáció statisztikai, információelméleti eredményei és

b) a lineáris rendszerek elméletére felépített diszkrét konvolúciós algoritmusok

alapján a fent nevezett geofizikai mérések interpretációjának közel optimális eredményt szolgáltató stratégiája valósítható meg. Az ajánlott stratégiával kapható eredmények a következők:

1. *A kutatott geofizikai struktúrát jellemző paraméterek információ-elméletileg optimális száma.*
2. *A paraméterek becslése a legkisebb négyzetek általánosított elve szerint.*
3. *A becsült paraméterek hibáinak becslése valószínűségszámítási módszerrel.*
4. *Az interpretáció effektivitásának mértéke statisztikai vizsgálatok alapján.*

В докладе рассматриваются вопросы об автоматизации интерпретации данных, получаемых методами наземных стационарних электрических зондирований, магнитотеллурических зондирований, электромагнитных частотных зондиродваний, становления электромагнитного поля, а также электрическим и индукционным методами каротажа. В основу стратегии интерпретации данных получаемых вышеперечисленными методами, целесообразно положить максимум отношения получаемой по наблюдениям информации к расходам, связанным с выявлением этой информации. Параметром информативности может служить нег энтропия совместного распределения вероятностей параметров, изучаемых в процессе интерпретации. Проведенные исследования показывают, что численное решенипрямой е задачи и обратной трансформации данных элэктромагнитных зондирований осуществляется в 10–100 раз быстрее при помощи алгоритмов, основывающихся на теории линейных систем, по сравнению с стандартными методами. В докладе показано, что

а) *статистические, информационные результаты интерпртации геофизических данных, и*

б) *алгоритмы дискретной свертки, основывающиеся на теории линейных систем позволяют реализовать стратегию интерпретации геофизических наблюдений по вышеуказанным методам, приводящую к почти оптимальным результатам. При применении предлагаемой стратегии получаются следующие результаты:*

1. Оптимальное по теории информации число параметров, характеризующих изучаемую геофизическую структуру;

2. Оценка параметров по обобщенному принципу наименьших квадратов;

3. Оценка погрешностей изучаемых параметров по методу исчисления вероятностей;

4. Степень эффективности интерпретации по статистическим анализам.

---

* Elhangzott 1974. szeptemberben a XIX. Szimpóziumon Torunban.

** Salát Péter – Drahos Dezső; Eötvös Loránd Tudományegyetem Geofizikai Tanszék

In the paper automatization of interpretation of surface DC soudings, magnetotelluric soudings, electromagnetic frequency soundings, elektromagnetic transient soundings as well as of electric and induction borehole soundings is dealt with. It is advisable to build up the interpretation strategy of the said geophysical procedures on the basis of maximalization of the ratio between the quantity of inforun mation obtainable from the mesaurements and the expenditure applied for gaining the informations. As a measure of information the negentropy of the total probability distribution of parameters which can be estimated during the interpretation should be taken. According to our investigations the numerical solution of the direct problem and of the inverse transformation of electromagnetic soundings can be speeded up by algorithms built up on the basis of the theory of linear systems against the conventional processing methods. It is shown that on the basis of

a) the statistical information-theoretical results of geophysical interpretation and of the

b) discrete convolution- algorithms built up on the theory of linear systems

one can realize a strategy of interpretation of the said geophysical measurements furnishing a nearly optimal result. Using the recommended strategy we can obtain

1. *the information-theoretically optimal number of parameters characterising the geophysical structure under investigation,*
2. *an estimate of the errors of the parameters by means of a probability-theoretical method,*
3. *an estimate of the values of the parameters according to the generalized principle of least squares, and*
4. *the effectivity- mass of the interpretation based on statistical considerations.*

Az alkalmazott geofizikai kutatómódszerek között széles körben használatosak a felszínen és fúrólyukban végzett elektromágneses szondázások. A szondázási módszerek csoportjába sorolhatók a következő jól ismert geofizikai eljárások:

a vertikális elektromos szondázások (VES),
a magnetotellurikus szondázások (MTS),
az elektromágneses frekvencia-szondázások (FRS),
a tranziens, vagy térbeállásos szondázások (TRS),
a stacioner karottázs szondázások (SKS),
a fókuszált áramterű karottázs szondázások (FKS),
az indukciós karottázs szondázások (IKS).

A geofizikai gyakorlatban mintegy 20—30 különféle elektromágneses szondázási módszer rutinszerű alkalmazása terjedt el.

A szondázások általános feladata a kutatott geofizikai objektumok struktúrájának felderítése. A felderítés két szorosan összefüggő stádiuma a mérés és a kiértékelés.

Az elektromágneses szondázások mérése során az elektromágneses tér jellemzőinek térbeli és/vagy időbeli eloszlását kell meghatározni a vizsgált objektum környezetében.

A szondázások terepi méréseinek kiértékelése során pedig matematikai számításokkal lehet az eredményekből a kutatott objektumok struktúrájára vonatkozó információkat kinyerni.

A szondázások terepi mérési eredményeit — az úgynevezett szondázási görbéket — az esetek nagy többségében mind a mai napig elméleti görbeseregekkel való grafikus egyeztetés útján szokás kiértékelni. Az interpretáció jól ismert hagyományos módszerei rendkívül munkaigényesek, többnyire lassúak, korlátozott effektivitásúak, gyakran szubjektívek, hiányos információt szolgáltató, közvetett módszerek. A fenti elégtelenségek következtében nehezen automatizálhatók.

A jelen előadás célja az elektromágneses szondázások interpretációjának egy optimális stratégiáját ismertetni. A bemutatandó interpretációs stratégia két alappillére:

a) a geofizikai interpretáció információelméleti, statisztikai eredményei,
b) a lineáris rendszerek elméletére épített diszkrét konvolúciós interpretációs algoritmusok.

Az előadás vázlatosan megmutatja, hogy a fenti alapokon kis munkaigényű, nagyon gyors, magas effektivitású, teljesen objektív, közel maximális információt szolgáltató, közvetlen interpretációs algoritmusok dolgozhatók ki. A felsorolt előnyök következtében a számítások könnyen automatizálhatók.

Az elektromágneses szondázások interpretációjának optimális stratégiáját célszerű a mérésekből kinyert információ és az információ kinyerésére fordított költség viszonyának maximalizálására felépíteni.

Az információ/költség arány maximalizálásának igénye azt jelenti, hogy a kutatott geofizikai objektumot jellemző paramétereknek minél effektívebb becslését kell elérni, minél kevesebb méréssel és számítással, azaz minimális számú operációval.

Az interpretáció effektivitásának mértékeként F. M. Golcman „*Az interpretáció statisztikus modelljei*" című ismert könyvének nyomán a következő képlet szolgálhat tájékoztatásul:

$$H(\hat{\vec{p}}) \approx -\log\sqrt{(2\pi e)^m \cdot \left(\det\left\|D(\hat{\vec{p}})\right\|\right)},$$

$H(\hat{\vec{p}})$ az interpretáció során becsült $\hat{\vec{p}}$ paraméterek együttes valószínűségi eloszlásának negentrópiája, amit kézenfekvő az interpretációval nyert információtartalom mennyiségének tekinteni,

m a $\hat{\vec{p}}$ paraméter-vektor komponenseinek a száma, a becsült paraméterek száma,

$\left\|D(\hat{\vec{p}})\right\|$ a becsült paraméterek hiba-mátrixa, vagy más néven a kovariációmátrix.

A maximális negentrópiájú, effektív interpretációt a minimális hibákkal rendelkező paraméterbecslés szolgáltatja, precízen fogalmazva az a becslés, amelynek a hiba-mátrixa adott m számú paraméter esetén a legkisebb determinánssal rendelkezik.

Nyilvánvaló, hogy minden interpretációs stratégiának az effektivitás maximalizálását kell céloznia, még ha ezt elérni nem is egyszerű feladat. Különösen nem egyszerű, ha egyúttal a számítási munkák minimalizálásának követelményét is teljesíteni kell.

Az optimális interpretációs stratégia lényegének megvilágításához érdemes röviden áttekinteni az elektromágneses szondázások interpretációjának három alapvető momentumát.

I. Az interpretáció bázisának meghatározása a kutatott geofizikai stuktúrára vonatkozó információk alapján.
Két fázis különíthető el:

a) a geofizikai modell feltételezése és kiválasztása,
b) a választott modellnek megfelelően a terepi mérési eredmények felvétele.

II. Az információt hordozó mennyiségek transzformációi.
Két fázis különböztethető meg:

a) az egyenes feladat megoldásának transzformációi,
b) a mérési adatok feldolgozásának transzformációi.

III. A modelljellemzők és a mérési eredmények közötti illeszkedés, megegyezés megkeresése. Itt is két fázis különböztethető meg egymástól:

a) az illesztés kritériumának megválasztása,
b) a választott kritériumot kielégítő megoldás meghatározása.

A következőkben megmutatjuk, hogy az interpretáció különböző fázisaiban miképpen lehetséges az optimalizáció szempontjait figyelembe venni. Rámutatunk, hogy az információ/operáció arány növelése az egyes interpretációs fázisokban milyen követelmények teljesítésével érhető el. Vizsgáljuk sorra az interpretáció fázisait.

I/a. A modellválasztás

A modellválasztás azt jelenti, hogy az interpretáció a rendkívül bonyolult reális világot idealizálja, leegyszerűsíti, matematikailag kezelhetővé alakítja. Az interpretáció egy modellt „*húz rá*" a valóságra. A választott modell akkor jó, ha a valóság leglényegesebb, legjellemzőbb, átlagos vonásait helyesen tükrözi vissza, és matematikailag viszonylag egyszerűen kezelhető.

A modellválasztás kétféle idealizációt jelent:

a) Az elektromágneses tér gerjesztésének és megfigyelésének idealizációi.

Vizsgálataink a szokásos idealizált gerjesztésekre terjednek ki mint:.
pontszerű egyenáramú forrás (VES, SKS, FKS),
pontszerű harmonikus dipól forrás (FRS, IKS),
pontszerű lépcsőfüggvény szerint változó forrás (TRS),
harmonikus síkhullám szuperpozíció (MTS).

b) A közeg modellje, a kutatott objektumok idealizációi. Vizsgálataink kizárólag a felszíni geoelektromos szondázások horizontálisan rétegzett ideális rétegsor modelljére és a karottázs szondázások koaxiális hengergyűrűkből álló ideális fúrólyuk modelljére terjednek ki.

Több évtizedes gyakorlati tapasztalatok szerint a fent említett interpretációs modellek kitűnően beváltak. Rendkívüli hatékonyságukat az magyarázza, hogy a reális elektromágneses gerjesztést és a gravitációs térben keletkezett üledékes rétegösszletet az adott modellek „*jól leírják*" és a modellekre vonatkozó számítások viszonylag egyszerűen elvégezhetők.

A közeg modelljét a $\vec{p}$ paraméter-vektorral szokás jellemezni.
Horizontálisan rétegzett rétegsor modellre:

$$\vec{p} = \vec{p}\,(\varrho_1, d_1, \varrho_2, d_2, \ldots, \varrho_{N-1}, d_{N-1}, \varrho_N)\,.$$

A koaxiális hengergyűrűkből álló fúrólyuk modelire:

$$\vec{p} = \vec{p}\,(\varrho_1, d'_1, \varrho_2, d'_2, \ldots, \varrho_{K-1}, d'_{K-1}, \varrho_K)\,.$$

ϱ_j a rétegek elektromos fajlagos ellenállása,
d_j a rétegek vastagsága,
d'_j a hengergyűrűk átmérője.

Az információ/operáció arány növelése szempontjából a modellválasztás során felmerülő kérdés, hogy a kutatott objektum milyen mértékben felel meg az ideális modellnak, és az interpretáció optimálisan hány rétegre képes felbontani a vizsgált rétegsort.

I/b. *A mérési eredmények terepi felvétele*

A modell-feltételezésnek megfelelő mérési eredmények meghatározása azt jelenti, hogy a szondázások terepi méréseit eleve a választott modell $\vec{p}$ paramétereinek optimális meghatározása céljából kell megtervezni és végrehajtani.

Fontos hangsúlyozni, hogy a szondázások terepi mérési eredményeit valószínűségi változók konkrét értékeinek kell tekinteni. Minden szondázási eljárás során több különböző fizikai mennyiség mérése szükséges. A különböző mérhető fizikai mennyiségeket reprezentáló valószínűségi változókat jelölje X_j, $(j = 1, 2, \ldots, J)$.

L. A. Halfin „*A geofizikai kutatások interpretációjának információelméleti teóriája*" című 1958-ban közölt alapvető cikkében kimutatta, hogy ha a geofizikai mérési eredményeket reprezentáló X_j valószínűségi változóknak csak az első momentuma (más szóval várható értéke) ismeretes, akkor a kutatott geofizikai objektumról elvileg lehetetlen információt kinyerni a mérési eredményekből. Információ csak akkor kapható, ha az X_j valószínűségi változók második momentumai is ismeretesek (például kovariancia-mátrix formájában).

Az idézett információelméleti eredmény azt jelenti, hogy csak azok a mérési eredmények interpretálhatók, amelyeknek a hibái is ismeretesek.

Az információ/operáció arány növelésének elengedhetetlen feltétele a mérési eredményeket reprezentáló valószínűségi változók várható értékének és hiba-mátrixának ismerete.

A mérési eredmények egyszerű statisztikai analízise alapján az $\hat{x}_j$ empirikus várható érték és a $\|\hat{D}(\vec{x})\|$ empirikus kovariancia-mátrix gyakorlatilag mindig meghatározható.

II/a. *Az egyenes feladat megoldása*

Az egyenes feladat transzformációinak

$$\vec{p} \longrightarrow F(\vec{p}, w) \longrightarrow g(\vec{p}, v)$$

A modell ismert $\vec{p}$ paraméter-vektorából kiindulva analitikus formában meg lehet határozni egy olyan alkalmas $F(\vec{p}, w)$ modellkarakterisztikát, amelynek lineáris integráltranszformációja a modell környezetében alkalmas konfigurációban megmérhető $g(\vec{p}, v)$ elektromágneses tér jellemző elméleti értékét szolgáltatja. Az elektromágneses szondázások egyenes feladata megoldásainak általános alakja:

$$g(v) = \int_0^\infty \{F(w)\} \cdot [K(w \cdot v)] \frac{1}{w} dw\,.$$

Az interpretáció hagyományos próbálgatásos módszerei ennek az integráltranszformációnak a többszöri elvégzésére vannak alapozva.

Az információ/operáció arány növelése szempontjából kívánatos az egyenes feladat transzformációinak minél kevesebbszer való elvégzése, és a számítások leegyszerűsítése, meggyorsítása.

II/b. *Az inverz transzformációk*

A mérési eredmények feldolgozása során az egyenes feladat transzformációinak sokszori elvégzése helyett igen gyakran célszerű a választott modellnek megfelelően a direkt transzformációk inverzét meghatározni. Az inverz transzformációk kiindulása tehát az elektromágneses tér megmért jellemzői. Az adatfeldolgozás inverz transzformációinak szkémája:

$$\{\vec{x}\} \longrightarrow g^*(\vec{x}, v) \longrightarrow F^*(\vec{x}, w) \longrightarrow \hat{\vec{p}}$$

$\{\vec{x}\}$ jelenti a közvetlenül megmért mennyiségek összességét, amelyekből rendszerint egyszerű számításokkal a további analízisre alkalmas $g^*(\vec{x}, v)$ közvetett mérési eredmények állíthatók elő. A $g^*(\vec{x}, v)$ mérési eredményekből az egyenes feladat transzformációinak inverzét véve meg lehet határozni egy $F^*(\vec{x}, w)$ modell-karakterisztikát. Az inverz transzformációk általános alakja:

$$F^*(w) = \int_0^\infty \{g^*(v)\} \cdot [K^*(w \cdot v)] \frac{1}{v} dv .$$

Az információ/operáció arány növelése szempontjából nyilvánvalóan kívánatos az inverz transzformáció számításait a lehető legkevesebb operációval elvégezni.

III/a. Az illesztési kritérium megválasztása

Az ideális modellre csupán hasonló geofizikai objektum környezetében meghatározott mérési hibákkal terhelt mérési eredményeket jelölje $y_i^{(M)}$. Az ideális modellre vonatkozó elméletileg levezethető teoretikus eredményeket jelölje $y_i^{(T)}(\vec{p})$.

Illeszkedési kritériumon értendők azok a matematikai feltételek, amelyek alapján a mért $y_i^{(M)}$ értékek és az elméleti $y_i^{(T)}(\vec{p})$ értékek összehasonlításából, azok illeszkedéséből a kutatott geofizikai struktúrát jellemző $\vec{p}$ paraméterekre és azok hibájára becslést lehet adni.

Az elektromágneses szondázások gyakorlatában különböző nem korrekt és korrekt illesztési kritériumok használatosak. Például:

$$\left.\begin{array}{l} y_i^{(M)} - y_i^{(T)}\left(\hat{\vec{p}}\right) \approx 0 , \\ \text{vagy} \\ \sum \left| y_i^{(M)} - y_i^{(T)}\left(\hat{\vec{p}}\right) \right| \approx \min. \end{array}\right\} \text{ Ezek a grafikus illesztés kritériumai.}$$

$$\sum \left[y_i^{(M)} - y_i^{(T)}\left(\hat{\vec{p}}\right)\right]^2 \approx \min.$$

Ez a legkisebb négyzetek elvének egyszerű illesztési kritériuma.

$$L\left(\hat{\vec{p}}\right) = \max. \qquad \left(L(\vec{p}) \text{ a likelihood függvény}\right)$$

Ez a maximum likelihood becslés kritériuma.

$$\det \left\| D\left(\hat{\vec{p}}\right) \right\| = \min. \quad \left(\left\| D\left(\hat{\vec{p}}\right) \right\| \text{ a becsült } \hat{\vec{p}} \text{ paraméterek hiba mátrixa} \right).$$

Ez az effektív becslés kritériuma.

$$\frac{\sum \text{INFORMÁCIÓ}}{\sum \text{OPERÁCIÓ}} \rightarrow \max.$$

Ez a kritérium pedig az általunk optimális interpretációs stratégiának nevezett eljárás kritériuma.

III/b. Az illesztési kritériumokat kielégítő megoldások meghatározása

Az esetek nagy többségében az illesztési kritériumokat kielégítő megoldások számítása az $y_i^{(T)}(\hat{\vec{p}})$ függvények linearizálásával kezdődik:

$$y_i^{(T)}(\hat{\vec{p}}) \approx y_i^{(T)}(\hat{\vec{p}}) + \sum_{k=1}^{m} \left[\left(\frac{\partial y_i^{(T)}(\hat{\vec{p}})}{\partial p_k} \right)_{\overset{\circ}{\vec{p}}} \cdot d p_k \right]$$

$$y_i^{(T)}(\hat{\vec{p}}) \approx y_i^{(T)}(\overset{\circ}{\hat{\vec{p}}}) + \sum_{k=1}^{m} [a_{ik} \cdot \Theta_k], \qquad \Theta_k = d p_k = \hat{p}_k - {}^{\circ}\hat{p}_k .$$

$\overset{\circ}{\hat{\vec{p}}}$ a keresett paraméterek egy nulladik közelítő becslése. Az összes $y_i^{(T)}(\hat{\vec{p}})$ elméleti értékből alkotott $\vec{y}^{(T)}(\hat{p})$ vektorra vonatkozó lineáris egyenlet mátrix egyenlőség formájában a következő:

$$\vec{y}^{(T)}(\hat{\vec{p}}) \approx \vec{y}^{(T)}(\overset{\circ}{\hat{\vec{p}}}) + \|A\| \cdot \vec{\Theta}, \qquad \vec{\Theta} = \hat{\vec{p}} - {}^{\circ}\hat{\vec{p}} ,$$

Az $\|A\|$ mátrix elemei az $y_i^{(T)}(\vec{p})$ Taylor-sorfejtésének a_{ik} elsőrendű parciális deriváltjai, $\vec{p} = \overset{\circ}{\vec{p}}$-nál.

Az $y^{(T)}(\vec{p})$ függvény linearizálása után a választott illesztési kritériumnak megfelelően rendszerint lineáris egyenletrendszert lehet felállítani. A feladat végső megoldását pedig mátrix-invertálás szolgáltatja.

Az információ/operáció viszony növelése szempontjából kívánatos, hogy a számításigényes Taylor-sorfejtés és a mátrix-invertálás műveletét kevésszer kelljen elvégezni.

Ezzel áttekintettük az elektromágneses szondázások interpretációjának legfontosabb fázisait. Rámutattunk, mely fázisokban milyen követelmények figyelembevételével ajánlatos az információ/operáció arány növelését biztosítani.

Az interpretáció optimális stratégiájának ismertetése előtt a következőkben röviden összegezzük az elektromágneses szondázások ideális modelljein végzett vizsgálataink eredményeit.

Az ideális rétegsor modelleket két különböző tartományban lehet jellemezni:

a) A rétegsor experimentális-tartománybeli jellemzői

Az experimentális tartományban a struktúrát a mérésekkel közvetlenül meghatározható mennyiségek jellemzik. Ilyenek a $g(v)$ és $g^*(v)$ -vel jelölt függvények. Leggyakrabban használt képviselőik a különféle *„látszólagos fajlagos ellenállás görbék"*:

$$\bar{\bar{\varrho}}_K(r), \quad \tilde{\bar{\varrho}}_K(t), \quad \tilde{\varrho}_K(w, r), \quad \bar{\bar{\varrho}}_K^{-}(t, r), \quad \bar{\bar{\varrho}}_K^{P}(r), \quad \bar{\bar{\varrho}}_K^{G}(r), \quad \tilde{\varrho}_K^{(I)}(\omega, r) \quad \text{stb.}$$

Itt $v = r$, vagy $v = t$. (r a távolság t az idő).

b) *A rétegsor frekvencia-tartománybeli jellemzői*

A frekvencia-tartományban a struktúrát a korábban $F(w)$ és $F^*(w)$-vel jelölt függvények jellemzik. Ezeknek a modell-karakterisztikáknak közös tulajdonságuk, hogy a $\vec{p}$ paraméter vektoron kívül kizárólag csak a térbeli frekvenciától és az időbeli körfrekvenciától függenek:

$$w = m\,, \quad \text{vagy} \quad w = \omega\,,$$

$$F(w) = F(\vec{p}, m, \omega)\,, \quad F^*(w) = F^*(\vec{p}, m, \omega)\,.$$

Az F és F^* függvények a p, m, w változóknak viszonylag egyszerű analitikai formában megadható függvényei.

Az experimentális tartomány és a frekvencia-tartomány közötti átmenetet lineáris konvolúció típusú integráltranszformációk írják le.

Korábbi publikációinkban és előadásainkban megmutattuk, hogy az elektromágneses szondázások modelljeinek g vagy g^* experimentális karakterisztikái egyik oldalról, és a modell F vagy F^* frekvencia karakterisztikái a másik oldalról úgy tekinthetők, mint lineáris szűrő rendszerek kimenetei és bemenetei, vagy pedig bemenetei és kimenetei.

A fentebb bemutatott lineáris integráltranszformációk konvolúció jellegét igen egyszerű belátni.

Az egyenes feladat transzformációjában hajtsuk végre a következő behelyettesítéseket:

$$u = \log(w)\,, \qquad t = \log\left(\frac{1}{v}\right), \qquad du = \frac{dw}{w}\,, \qquad w = e^u\,, \qquad v = e^{-t}\,,$$

$$g(e^{-t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(e^u)\} \cdot [K(e^{-(t-u)})]\, du\,,$$

ami átjelölésekkel:

$$\bar{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{F}(u)\} \cdot [\bar{K}(t-u)]\, du\,;$$

ez a jól ismert konvoluciós integrál.

Az adatok feldolgozásának inverz transzformációjában hajtsuk végre a következő behelyettesítéseket:

$$u = \log(v)\,, \qquad t = \log\left(\frac{1}{w}\right), \qquad du = \frac{dv}{v}\,, \qquad v = e^u, \qquad w = e^{-t},$$

$$F^*(e^{-t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \{g^*(e^u)\} \cdot [K^*(e^{-(t-u)})]\, du\,,$$

ami átjelölésekkel:

$$\bar{F}^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{g}^*(u()\} \cdot [\bar{K}^*(t-u)]\, du\,;$$

ez szintén konvolúciós integrál.

A bemutatott helyettesítésekből kiindulva kidolgoztunk egy univerzális eljárást az elektromágneses szondázások interpretációjához elengedhetetlenül szükséges speciális integráltranszformációk diszkrét konvolúciókkal való optimális közelítésére.
A közelítés általános formája:

$$\bar{g}_i \approx \sum_{j=ja}^{jb} \bar{F}_{l-j} \cdot S_j, \quad \text{illetve} \quad \bar{F}_l^* \approx \sum_{j=ja}^{jb} \bar{g}_{l-j}^* \cdot S_j^*.$$

Itt l és j egész számok, $\bar{g}_l$, $\bar{g}_{l-j}^*$ és $\bar{F}_{l=j}$, $\bar{F}_l^*$ a $\bar{g}(t)$, $\bar{g}^*(t)$ és $\bar{F}(t)$, $\bar{F}^*(t)$ függvények egy meghatározott Δ lépésközzel diszkretizált értékei, S_j és S_j^* a lineáris átalakítás koefficiensei, röviden szűrőkoefficiensek.

A diszkrét konvolúciós algoritmusok alapján megírt programokat a gyakorlatban kipróbáltuk és más eljárásokkal is összehasonlítottuk.

A vertikális elektromos szondázások látszólagos fajlagos ellenállás görbéinek számítására Van Dam közölt egy ALGOL programot, amit a jól ismert Standard Graphs for Resistivity Prospecting (1969 EAEG) című görbesereg számítására használtak. Az általunk a diszkrét konvolúciók algoritmusára felépített ugyancsak ALGOL program 30 – 300-szor gyorsabban számolja a publikált programmal megyegyező kb. *0,1%-os* pontosságú eredményeket.

Az általunk konstruált programmal *10 – 15* réteges VES görbéket számoltunk a Geofizikai Kutatási Üzem megbízásából. Az említett publikált programmal *3 – 4* jegyre azonos eredményeket annál 100 – 300-szor gyorsabban kaptuk meg.

Az elektromágneses frekvenciaszondázásokra vonatkozóan A. A. Kaufman és G. M. Morozova közölt eredményeket 1970-ben. Mágneses dipól-gerjesztés és mágneses komponensek regisztrálásának esetére kétréteges frekvencia szondázási elméleti eredményeket foglaltak táblázatokba. Az általunk a diszkrét konvolúciók algoritmusára felépített program a táblázatok eredményeit *4 – 5* jegy pontosan reprodukálta. Ugyanezt a pontosságot a klasszikus integrálszámítási módszerekkel, pl. a Simpson formulával becsléseink szerint kb. 10 – 100-szor több művelettel lehetne elérni.

Többréteges modellekre vonatkozó frekvencia szondázási eredményeket is rutinszerűen számoltunk a Geofizikai Kutatási Üzem megbízásából.

Két- és háromréteges egyenáramú karottázs szondázás esetére V. N. Dachnov közölt görbéket. Az általunk a diszkrét konvolúciók algoritmusára felépített program a közölt görbékkel teljesen egybeeső görbéket szolgáltatott. Becsléseink szerint a *0,5%*-os grafikus pontosság eléréséhez a klasszikus integrálszámítási módszerekkel kb. 10 – 100-szor több műveletre volna szükség.

Próbaszámításaink szerint az inverz transzformációk számításait is 10 – 100-szor meggyorsítják a diszkrét konvolúciós algoritmusok a hagyományos integrálási eljárásokhoz képest.

Vizsgálataink eredményét összegezve megállapíthattuk, hogy az elektromágneses szondázások direkt feladatának és inverz transzformációjának numerikus megoldását a lineáris rendszerek elméletére alapozott diszkrét konvolúciós algoritmusok 10 – 100-szor meggyorsítják a hagyományos számítási módszerekhez képest.

A lineáris rendszerek elméletére alapozott diszkrét konvolúciós algoritmusok indokoltan képezhetik az interpretáció optimális stratégiájának alappillérét.

A következőkben megmutatjuk az interpretáció ajánlható stratégiájának legfontosabb momentumait.

Ideális esetben az elektromágneses szondázások interpretációjának meg kellene kezdődnie már a terepi mérések megindulása előtt. A priori információk alapján a következő kérdésekre kell tudni a választ:

Mi a célja a méréseknek? A feltárandó szerkezet mennyiben felelhet meg az ideális modellnek? Milyen lehetőségek és milyen határok között változnak a kutatott szerkezetre várhatóan ráhúzható modell átlagos jellemző paraméterei? Milyen pontos mérőműszer áll a mérések rendelkezésére?

Az interpretáció mérések előtti fázisában ajánlatos a F. M. Golcman által információs mátrixnak nevezett információelméleti jellemző gondos analízise.

Az információ mátrix definíciója:

$$\|B\| = \|A^{TRP}\| \cdot \left\|D^{-1}(\vec{y}^{(M)})\right\| \cdot \|A\|.$$

A jelölések már korábbról ismeretesek $\|A^{TRP}\|$ az $\|A\|$ mátrix transzponáltja.

Az a priori információk ismeretében a következőket lehet meghatározni:

1. Az előre sejthető $\hat{\vec{p}}$ paraméter-vektorok néhány jellegzetes reprezentánsát.
2. A várható $\hat{\vec{p}}$ paraméter vektorokhoz tartozó $y_i^{(T)}(\vec{p})$ elméleti mérési eredményeket.
3. Adott mérőműszer esetén a $\left\|D(\vec{y}^{(M)})\right\|$ hiba-mátrix becsléseit.
4. Az $y_i^{(T)}(\hat{\vec{p}})$ függvények Taylor-sorfejtését, azaz az $\|A\|$ mátrix a_{ik} elemeit.

A fenti mennyiségek ismeretében a $\|B\|$ információs mátrix meghatározható minden előre sejtett $\hat{\vec{p}}$ paraméter-vektorhoz. Amint az az információ mátrix definíciós képletéből látható, a $\|B\|$ mátrix kiszámításához nem szükségesek az $y_i^{(M)}$ mérési eredmények. $\|B\|$ meghatározásához elégségesek a kutatott struktúrára és a kutatás eszközeire vonatkozó a priori információk.

Az információ mátrix inverze a $\hat{\vec{p}}$ paraméterek hiba mátrixa:

$$\left\|D(\hat{\vec{p}})\right\| = \|B^{-1}\|.$$

Ez azt jelenti, hogy már a mérések megkezdése előtt felbecsülhető az interpretáció effektivitásának mértéke a $H(\hat{\vec{p}})$ entrópia képlettel.

Az ajánlott interpretációs stratégia első lépése tehát az a priori információk gondos analízise. Ennek alapján meg lehet határozni azt az optimális Δ lépésközt, amellyel a szondázást végrehajtva az információk kinyerhetők a mérési eredményekből, valamint meg lehet adni azt a mérési tartományt, amely az információk zömét tartalmazza. Az előzetes analízis eredményeképpen már előzetesen meg lehet becsülni a $\vec{p}$ paraméter-vektor komponenseinek körülbelüli optimális számát, amely közel maximális információt szolgáltat.

Megjegyezzük, hogy már a mérések tervezésének fázisában sok számítási munkát lehet megtakarítani a diszkrét konvolúciós algoritmusok alkalmazásával.

Az előzetes analízis során vizsgált $y_i^{(T)}(\hat{\vec{p}})$ elméleti értékek a rétegsor két különböző karakterisztikáját szimbolizálhatják. A frekvencia-tartományban

$y_i^{(T)}(\vec{p}) \equiv F_i^{*(T)}(\vec{p}, w)$, az experimentális tartományban pedig $y_i^{(T)}(\vec{p}) \equiv$ $\equiv g_i^{(T)}(\vec{p}, v)$. A két tartomány között a diszkrét konvolúciók algoritmusa teremt gyors átmenetet.

Az eredeti integráltranszformációk kölcsönösen egyértelmű transzformációk, ennek következtében a diszkrét konvolúciók is azok. Mint ismeretes a kölcsönösen egyértelmű transzformációk az információ mennyiségét nem változtatják. Ez azt jelenti, hogy az interpretáció számításait tetszés szerint lehet végezni, akár az experimentális, akár a frekvencia-tartományban.

Nyilvánvaló, hogy minden analízist célszerű a frekvencia-tartományban a frekvencia-karakterisztikán végezni, minthogy az $F(\vec{p}, m, \omega)$ és $F^*(\vec{p}, m, \omega)$ karakterisztikák viszonylag egyszerű analitikai formában függnek a $\vec{p}$, m, ω változóktól.

Az előzetes vizsgálatok alapján már a mérések tervezésének fázisában ajánlatos gondoskodni arról, hogy az interpretáció során a diszkrét konvolúciók algoritmusát könnyen és hatékonyan lehessen használni. Az optimális stratégia második fontos momentuma az, hogy a mérési eredmények az előzőekben tárgyalt vizsgálatok szempontjainak megfelelően legyenek meghatározva.

A tényleges interpretáció kiindulása az X_j valószínűségi változók konkrét megmért értékeinek a sorozata $\{\vec{x}\}$, a mérőműszerek pontossági jellemzői és a paraméterek közel optimális száma.

Az adatfeldolgozás első lépése a $\{\vec{x}\}$ sorozat statisztikai analízise, a mért mennyiségek várható értékének és kovarianciáinak meghatározása:

$$\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_J\}, \quad \left\{\left\|\hat{D}\left(\hat{\vec{x}}\right)\right\|\right\}$$

A következő lépés a rétegsort jellemző alkalmas experimentális karakterisztikák várható értékének kiszámítása:

$$\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_J\} \longrightarrow g^{(M)}(\vec{x}, v), \quad g^{*(M)}(\vec{x}, v),$$

Majd az ismert hibaterjedési szabályok szerint meg kell határozni az experimentális karakterisztikák hiba-mátrixát is:

$$\left\|D\left(\vec{g}^{(M)}\left(\hat{\vec{x}}\right)\right)\right\|, \quad \left\|D\left(\vec{g}^{*(M)}\left(\hat{\vec{x}}\right)\right)\right\|,$$

Ezzel a számítás folyamata újabb döntő momentumához érkezik: Melyik tartományban érdemes tovább folytatni a mérési eredmények analízisét? Az optimális stratégia a frekvencia-tartományt részesíti előnyben. A diszkrét konvolúciók algoritmusának felhasználásával az experimentális tartományból át kell térni a frekvencia-tartományba:

$$F_l^{*(M)} \approx \sum_{j=ja}^{jb} g_{l-j}^{*(M)} \cdot S_j .$$

A hibaterjedési szabályok szerint a $\left\|D\left(g^{*(M)}\left(\hat{\vec{X}}\right)\right)\right\|$ hibák ismeretében az $F_l^{*(M)}(\vec{g}^{*(M)})$ függvény hiba-mátrixát $\left(\left\|D\left(\vec{F}^{(M)}(\vec{g}^{*(M)})\right)\right\|\right)$ szintén meg kell határozni.

Az $F^{*(M)}(w)$ frekvencia-karakterisztikák vizsgálata többféleképpen is lehetséges. Egyes esetekben a karakterisztikák aszimptotáinak analízise és fokozatos lebontásuk elvezet a keresett paraméterek $\overset{0}{\hat{\vec{p}}}$ nulladik közelítő becsléséhez. Más esetekben az a priori információk alapján véletlenszerűen felvett paraméter kombinációkkal Monte-Carlo módszerek adhatják meg a $\overset{0}{\hat{\vec{p}}}$ nulladik közelítést. Az $F^{*(T)}(\vec{p}, W)$ függvények egyszerű analitikai alakja miatt néha a klasszikus egyenlet megoldó algoritmusok is szolgálhatnak néhány $\overset{0}{\hat{\vec{p}}}$ nulladik közelítő becslést.

Az interpretáció következő etápjában a szóba jöhető $\overset{0}{\hat{\vec{p}}}$ nulladik közelítő becslések közötti válogatás, a becslések pontosítása a feladat. Erre a célra újból a $\|B\|$ információs mátrix vizsgálata és a legkisebb négyzetek általánosított elvének illesztési kritériuma nyújthat megoldást.
$\left\|D(\vec{y}^{(M)})\right\|$ hiba-mátrix esetén a legkisebb négyzetek elvének illesztési kritériuma a

$$Q = \left\|\left[\vec{y}^{(M)} - \vec{y}^{(T)}\left(\hat{\vec{p}}\right)\right]^{TRP}\right\| \cdot \left\|D^{-1}(\vec{y}^{(M)})\right\| \cdot \left\|\left[\vec{y}^{(M)} - \vec{y}^{(T)}\left(\hat{\vec{p}}\right)\right]\right\| = \min.$$

feltétel teljesítését írja elő.

A feladat linearizálása után a minimalizálandó kifejezés:

$$Q = \left\|\left[\underline{\vec{y}}^{(M)} - \|A\| \cdot \hat{\vec{\Theta}}\right]^{TRP}\right\| \cdot \left\|D^{-1}(\vec{y}^{(M)})\right\| \cdot \left\|\underline{\vec{y}}^{(M)} - \|A\| \cdot \hat{\vec{\Theta}}\right\|,$$

ahol $\quad \underline{\vec{y}}^{(M)} = \vec{y}^{(M)} - \vec{y}^{(T)}\left(\overset{0}{\hat{\vec{p}}}\right).$

Ez a feltétel differenciálás után a legkisebb négyzetek módszerének úgynevezett lineáris normál egyenleteihez vezet:

$$\left\|\left\{\|A^{TRP}\| \cdot \left\|D^{-1}(\underline{\vec{y}}^{(M)})\right\| \cdot \|A\|\right\}\right\| \cdot \hat{\vec{\Theta}} = \|A^{TRP}\| \cdot \left\|D^{-1}(\underline{\vec{y}}^{(M)})\right\| \cdot \underline{\vec{y}}^{(M)},$$

vagy rövidebben

$$\|B\| \cdot \hat{\vec{\Theta}} = \|A^{TRP}\| \cdot \left\|D^{-1}(\underline{\vec{y}}^{(M)})\right\| \cdot \underline{\vec{y}}^{(M)},$$

Vegyük észre, hogy a normál egyenletek rendszerének mátrixa a $\|B\|$ információs mátrix.

A $Q = min.$ feltételt biztosító $\hat{\vec{\Theta}}$ paraméter becslés a normál egyenletek rendszerének megoldása.

$$\hat{\vec{\Theta}} = \|B^{-1}\| \cdot \|A^{TRP}\| \cdot \left\|D^{-1}(\underline{\vec{y}}^{(M)})\right\| \cdot \underline{\vec{y}}^{(M)},$$

Egyszerű valószínűségi számítás várható érték képzéssel belátható, hogy a becsült $\hat{\vec{\Theta}}$ paraméterek hiba-mátrixa

$$\left\|D\left(\hat{\vec{\Theta}}\right)\right\| = \|B^{-1}\|$$

Az így nyert becslés torzítatlan, egyetlen feltétele, hogy az $y_i^{(M)}$ mért mennyiségek véges második momentummal rendelkezzenek. Normális hibaeloszlás esetén $\hat{\vec{\Theta}}$ optimum becslés.

Visszatérve az interpretáció számításaihoz, azokat továbbra is célszerű a frekvencia-tartományban folytatni. A legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása a frekvencia-tartományban azt jelenti, hogy

$$y_i^{(M)} \equiv F_i^*(\vec{g}^{*(M)}) \quad \text{és} \quad y_i^{(T)}(\vec{p}) \equiv F^{*(T)}(\vec{p}, w_i).$$

Az imént vázolt algoritmust alkalmazva a becslés végeredménye a szóba jöhető néhány $\overset{0}{\hat{\vec{p}}}$ nulladik közelítésből kiindulva néhány $\overset{1}{\hat{\vec{p}}}$ első közelítő becslés, és ezek hiba-mátrixa $D\left(\overset{1}{\hat{\vec{p}}}\right)$. A hiba-mátrixok determinánsait az entrópia képletbe helyettesítve kiválaszthatók a legeffektívebb becslést jelentő $\overset{1}{\hat{\vec{p}}}$ első közelítések.

Az interpretáció utolsó fázisa a közelítő becslések végső pontosítása az experimentális tartományban a legkisebb négyzetek elvének általános illesztési kritériuma szerint. A vizsgált y_i mennyiség legyen tehát a $g(v_i)$ experimentális karakterisztika:

$$y_i^{(M)} \equiv g^{(M)}(\vec{x}, v_i) \quad \text{és} \quad y_i^{(T)}(\vec{p}) \equiv g^{(T)}(\vec{p}, v_i).$$

A diszkrét konvolúciók algoritmusát ekkor kell újból használni a $g^{(T)}(\vec{p}, v_i)$ elméleti értékek és az a_{ik} parciális deriváltak meghatározására,

$$g_l^{(T)} \approx \sum_{j=ja}^{jb} F_{l-j}^{(T)} \cdot S_j$$

A normál egyenletek rendszerének felírása után mátrix invertálással adódnak a végeredmények.

A vázolt eljárás végeredménye a keresett $\vec{p}$ paraméter vektor legkisebb négyzetek elve szerinti becslése az experimentális tartományban.

A számítás folyamán a $\|B^{-1}\|$ formájában egyúttal a becsült paraméterek $\left\|D\left(\hat{\vec{p}}\right)\right\|$ hiba mátrixa is kiadódik. A hiba mátrix az interpretáció effektivitásának kvantitatív jellemzője. A $H\left(\hat{\vec{p}}\right)$ negentrópia, a becsült paraméterek hibái és a paraméterek páronkénti korrelációja a hiba-mátrixból egyszerűen megkapható. A $\hat{\vec{p}}$ paraméter becslés mellett ezek a mennyiségek teszik teljessé a mérésekből kinyerhető információkat.

Az interpretációs stratégia fontos eleme a számítások pontosságának beállítása, különösen a diszkrét konvolúciós algoritmusok esetében. Tapasztalataink szerint nagyon sok számítási munka takarítható meg úgy, hogy a számítások „*zajszintjét*" (a számítási hibákat) az egyéb előforduló zajok (geológiai zajok és mérési hibák) szintjénél egy-másfél nagyságrenddel kisebbre (azok 20 – 30-ad részére) állítjuk be.

Végezetül hangsúlyozni kívánjuk, hogy a fentiekben ajánlott interpretációs stratégia nem merev rendszer, hanem rugalmas stratégia, amelyet a konkrét esetekben mindig csak az alapelvek figyelembevételével konkrétan lehet alkalmazni.