

0362/3.



Reflexiós szeizmogramok szűrése

MESKÓ ATTILA

A geofizikai kutatás egyik legnagyobb problémája a kívánt jelek elválasztása a felesleges zajoktól. Az információelmélet módszereket ad ezen elválasztás, azaz a szűrés lehető legjobb megvalósítására. A szűrés a felhasználható szűrőtípus, az elérni kívánt cél, a bemenetekről való ismeret, a jóság kritérium pontos megfogalmazása után optimalizálható. A dolgozat rögzített paraméterű lineáris szűréssel foglalkozik. Megállapítja, hogy az automatikus kiértékelés szempontjából a lineáris szűrés nem jelent végső megoldást. Egymagában nem végezheti el a jelek detektálását. Hasznos lehet e jel/zaj arány növelésében, a detektálás megkönnyítésében, előkészítésében.

Одной из самых больших проблем геофизической разведки является отделение полезных сигналов от ненужных шумов. Информационная теория дает методы для наилучшего осуществления такого отделения, т. е. фильтрации. Оптимальные условия фильтрации определяются с учетом имеющегося фильтра, намеченной задачи, особенностей входа, после точного изложения критерия добротности. В статье обсуждается вопрос о линейной фильтрации с заданным параметром. Устанавливается, что с точки зрения автоматической интерпретации линейная фильтрация не означает окончательного решения. Она не может сама по себе производить выделение сигналов. Она может оказаться полезной в увеличении отношения сигнал/шум, в облегчении и подготовке выделения сигналов.

Eines der grössten Probleme der geophysikalischen Erkundung ist die Trennung der nützlichen Signale von den unnötigen Geräuschen. Die Informationstheorie gibt Methoden für die möglichst beste Verwirklichung solcher Trennung, bzw. der Filtration. Die optimalen Bedingungen der Filtration können auf Grund des verwendbaren Filtertyps, des gewünschten Zweckes und des Kentnisses von Eingänge nach der exakten Formulierung des Gütekriteriums bestimmt werden. In der Arbeit wird die lineare Filtration mit festem Parameter beschrieben. Es wird festgestellt, dass von dem Gesichtspunkt der automatischen Auswertung aus betrachtet die lineare Filtration keine endgültige Lösung bedeutet. Sie kann die Detektierung der Signale allein nicht vollführen, jedoch der Steigerung des Signalstörverhältnisses, der Erleichterung und Vorbereitung der Detektierung beitragen.

1. Bevezetés

W. T. Born egy előadásában [1], amelyben a geofizikai eszközök korlátairól beszélt, a legfontosabbnak a zajt jelölte meg. Valóban: a zaj a legváltozatosabb formában minden mérésnél jelen van. Nemcsak a műszerhibák, leolvasási hibák stb. miatti zajok hátrányosak, sőt azok a „veszélyesebbek”, amelyek a módszer, a kutatás céljának szükségszerű velejárói. A geofizikában használt „zaj” kifejezés általánosabb, hogysen beleférjen valamilyen – vagy

néhány – matematikai definícióba. Azt, hogy egy hatás zaj^e vagy sem, sokszor a konkrét feladat dönti el. Könnyű példát mondani a relatív jellegre. Ha felszínközletről akarunk gravitációs anomália térképet kapni, kívánatos eltávolítani a nagyobb mélységű anyagtömegek regionális hatását; míg ha mélybeli viszonyok tisztázása a cél, a sekély sűrűség-inhomogenitások a nem-kívánatos tényezők.

Zajnak fogunk nevezni minden nem óhajtott információt az adataink között. Jelnek mindazokat, amelyeket egyedül szeretnénk látni, amelyeket az adott szempontból hasznosítani akarunk. Minden eljárást, ami az éppen szükséges jelet – a kívánt információt – elválasztja a szükségtelen zajtól – a felesleges információtól – *szűrésnek* nevezhetünk.

A szűrési folyamat mindenképpen információvesztés. Optimálisan végezzük el, ha a kívántból a lehető legkevesebbet hagyjuk el, a szükségtelenből a lehető legkevesebbet tartjuk meg. Működésének alapja a jel és zaj közötti különbségek, eltérő spektrumok, különböző látszólagos sebességek, a jel váratlansága (jósolhatatlansága) stb. Eleve kell valamilyen információval rendelkezni a szűrő bementét illetően. Minél pontosabbak ezek, annál több reményünk van az optimális szűrés elérésére. Az információkat egyrészt a szeizmikus hullám terjedésének elmélete, másrészt maga a szűrendő csatorna nyújtja.

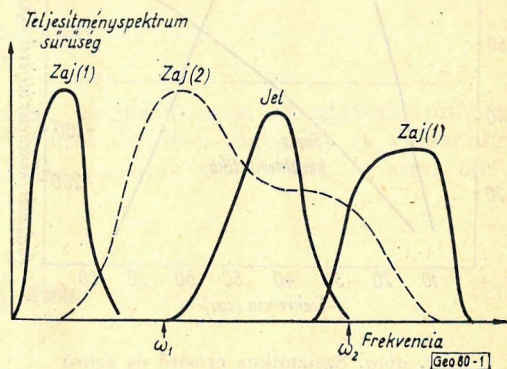
Az adott szűrő definíció igen átfogó. Tartalmazza természetesen a standard módszereket: elektromos szűrőkörök, keverés, korrelálás csatornák és felvételek között, csoportosítás a robbantásnál, illetve a felvevőnél stb. Az információelmélet mindezeket az eljárásokat, módszereket közös szempontból tárgyalja. Egy ilyen általános szempont akkor is nyereség, ha csak az eddigi, egymástól különbözőnek tűnő műveletek rendszerezését, összehasonlítását teszi lehetővé. De az információelmélet ennél sokkal többre képes. Lehetőséget nyújt az optimális választásra. Sok ellentmondást old fel azzal a felismeréssel, hogy a szűrési folyamat sikere a bemenetekről való információtól és a folyamat ezen információhoz való illesztésétől függ. Nem arra törekszik, hogy megtalálja „a” szűrési módot, ami „mindenütt” jó, hanem, hogy a változatos lehetőségek közül kiválassza az adott esetben legmegfelelőbbet. A körülmények és feltételek kiszabásával az optimum megkeresését exaktan megoldható feladattá teszi.

Ebben a dolgozatban a statisztikus jellegű zajok frekvencia tulajdonságok alapján történő eltávolításáról lesz szó, tudatában annak, hogy ez a szűrésnek csak egy részterülete.

A vizsgálatokat a szeizmikus kiértékelés tervezett automatizálása teszi aktuálissá. Nagysebességű elektronikus számítógépek bevezetése rendkívül változatos szűrési lehetőségeket nyújt. Lényeges áttekinteni, kritikailag megvizsgálni az irodalomban ismertetett módszereket, hogy közülük a legjobbat vagy ennek is valamilyen továbbfejlesztését választhassuk majd ki. Szükségesnek látszik a matematikai modell alkalmazhatóság szempontjából is végignézni a cikkeket: [8], [9], [10], [11], [12], [21]; mert a bevezetett egyszerűsítések, elhanyagolások létjogosultsága nem mindig meggyőző. Célunk az, hogy megfelelő segédeszközként alkalmazzuk a matematika eredményeit a konkrét geofizikai feladatra. Az optimum szűrő tervezés ismertetése alapjául az eredeti közleményeket választottam: főleg [6] és [23], továbbá [3], [4], [5], [22]. Kísérleti számításokat magyar magnetofonos regisztrátumokon végeztem.

2. A lineáris szűrés általános egyenletei

A zajok elnyomása a reflexiók szeizmikának kulcskérdése. Utóbbiak a legkülönbözőbb formájúak és eredetűek: felszíni hullám, talajnyugtalanág, apró reflexiók, diffraktált hullámok, ghostok, többszörösök stb. Már a kutatások kezdetén kihasználták, hogy a reflektált jel és a „zaj” frekvenciaspektruma eltérő. Ez a szűrés alapja lehet. Egyszerűsítve a tényleges helyzetet: a felszíni hullám a spektrum kisfrekvenciás részein, bizonyos háttérzajok magas frekvencián hoznak jelentős energiát, míg a reflexió jelet a középső frekvenciák jellemzik. (1. ábra folytonos vonala.) Ez sokszor jó közelítés, amit az elektromos sávszűrők hatásossága bizonyít. A szűrőtől csak azt kívánjuk, hogy az ω_1, ω_2 sávot eresse át, az ezen túl eső tartományt lehető meredeken vágja le.



1. ábra. Jel és zaj spektrumok, J. Jones és J. A. Morrison (1954) cikke nyomán

Az elektromos sávszűrők rögzített paraméterű, lineáris szűrést végeznek.

A rögzített paraméter időbeli változatlanóságot jelent. Ha az $x(t)$ bemenetnek $y(t)$ kimenet felel meg, akkor

$$\text{az } x(t+u)\text{-nak: } y(t+u)$$

A linearitás a hatások független összegezhetőségével egyenértékű. Pontosabban, ha az

$$x_i(t)\text{-re adott kimenet: } y_i(t), \quad (2.1)$$

akkor $\sum_i a_i x_i(t)$ bemenetre $\sum_i a_i y_i(t)$ lesz a válasz.

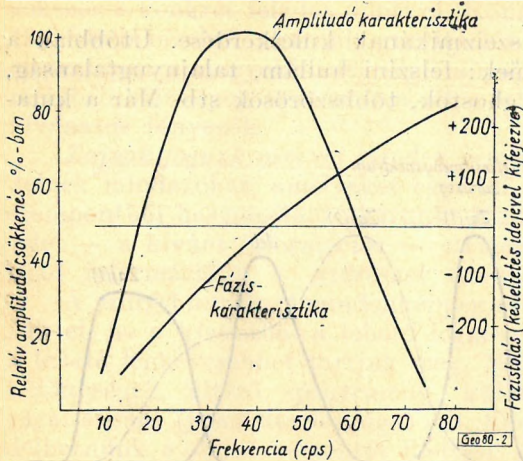
A lineáris rendszerek komplex átviteli függvénnyel jellemezhetők. Az $x(t)$ Fourier transzformáltját jelöljük $X(\omega)$ -val. Azaz:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.2)$$

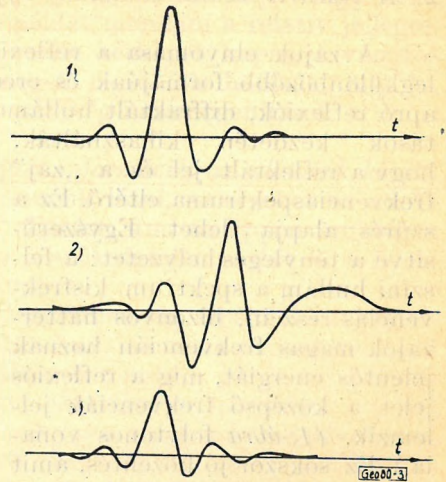
Érvényes, hogyha a bemenet az x függvény hat, a kimenet:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.3)$$

alakú, amiben a $H(\omega)$ komplex függvény a rendszer átviteli függvénye. $H(\omega)$ egyértelműen meghatározza a szűrőt.



2. ábra. Szeizmikus erősítő és szűrő amplitúdó- és fáziskarakterisztikája



3. ábra. Jeltorzulás fázistolás miatt
 1. bemenő jel,
 2. zérustól különböző fázistolással szűrt jel,
 3. zérus fázistolással szűrt jel.

Adott frekvenciájú jelet a rendszer bizonyos amplitúdó-kicsinyítéssel és időeltolással visz át. Más frekvenciájú jelhez más amplitúdóváltozás és más fáziskésés tartozik. A két hatás mindegyike az ω függvénye. Erről a két hatásról ad számot az amplitúdó- és fáziskarakterisztika.

Jellegzetes szeizmikus erősítőre és szűrőre vonatkozó amplitúdó, illetve fáziskarakterisztikát mutat be a 2. ábra. Az amplitúdó-karakterisztikát szokás domináns jellemzőnek tekinteni. Rendszerint csak ezt adják meg. De a jelalak kifejmálásában fontos szerepe van a fáziskarakterisztikának is. Ezt mutatja be a 3. ábra.

Meg kell jegyezni, hogy bizonyos időkülönbségek léphetnek fel zérus fázistolású szűrő alkalmazása esetén is. Pusztán az amplitúdó-karakterisztikával jellemzett frekvenciaátbocsátó képesség eltérései miatt különböző helyre kerülhetnek például a szűrt csatorna maximumhelyei. Könnyen beláthatjuk ezt egy sematikus példán. Legyen a bemenet két, különböző frekvenciájú szinuszhullám összege:

$$\sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t$$

Ha a — különben zérus fázistolású — szűrő eltávolítja az f_1 frekvenciájú komponenszt a kimenet maximumhelyei:

$$t_k^r = \frac{1}{4f_2} \pm \frac{k}{f_2}$$

Ha egy másik szűrő az f_2 frekvenciát nem engedi át, a maximumhelyek:

$$t_k^2 = \frac{1}{4f_1} \pm \frac{k}{f_1}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$t_k^1 \neq t_k^2$$

A szűrő másik, szintén egyértelmű, meghatározója az egységimpulzusra adott válaszfüggvénye. A kétféle megoldás (átviteli függvény és válaszfüggvény) között szoros kapcsolat van. Ha ugyanis $x(t) = \delta(t)$ – ahol $\delta(t)$ a Dirac-féle deltafüggvény, akkor:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (2.4)$$

[Ennek bizonyítása, ill., a deltafüggvény alapvető ismertetése ld. pl. (7).]

A (2.4)-et beírva (2.3)-ba:

$$y(t) = h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.5)$$

ami azt jelenti, hogy az egységimpulzusra adott válaszfüggvény az átviteli függvény Fourier transzformáltja. A $h(t)$ ismeretében a $H(\omega)$ is meghatározható:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.6)$$

A $h(t)$ ismeretében egy tetszőleges $x(t)$ időfüggvényre adott válasz az

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2.7)$$

konvolúció integrállal számítható ki. A (2.7) szemléletesen úgy interpretálható hogy a bemenet múltbeli értékeit az egységimpulzusra adott válaszfüggvényvel súlyozni kell. Emiatt szokás a válaszfüggvényt súlyfüggvénynek is nevezni.

Amikor pontosabb eredményekhez akarunk jutni, nem fogadhatjuk el, az 1. ábra folytonos vonalának durva közelítését. Valójában a jel és zaj spektrumok jelentősen átfedik egymást: (l. az 1. ábra szaggatott vonala.) Hajlékonyabb karakterisztikákra van szükség. Előnyös, ha több változtatási lehetőségünk van, mint amit a hagyományos RLC körök néhány variációja

megenged. Ennek megvalósítására különböző berendezéseket építettek. Hangsúlyozni kell, hogy ezek csak technikai megvalósításukban térnek el egymástól, nem pedig működésük elveiben. Ezeket – minden lineáris szűrőre azonos módon – a (2.3) és a (2.7) írják le.

3. A szűrési művelet különböző megvalósítási lehetőségei

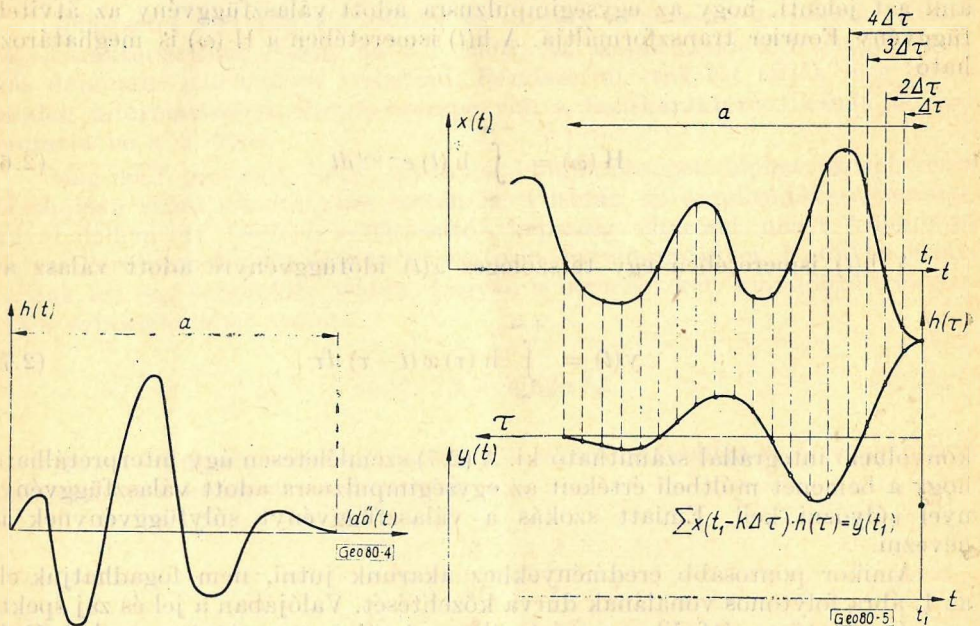
Három megvalósítást mutatunk be az eddig ismertetett elektromos sávszűrőn kívül:

késleltetővonalas,
digitális és
analog konvolúciós, ún. keresztkorrelációs
szűrést. Különbségük csak annyi, hogy eltérő módon végzik el a (2.7) integrál számítását.

Tegyük fel, hogy a $h(t)$ zérus egy a hosszúságú intervallum kivételével mindenütt, továbbá, hogy a szűrő realizálható: $h(t)=0$, ha $t<0$: (4. ábra). A kimenet

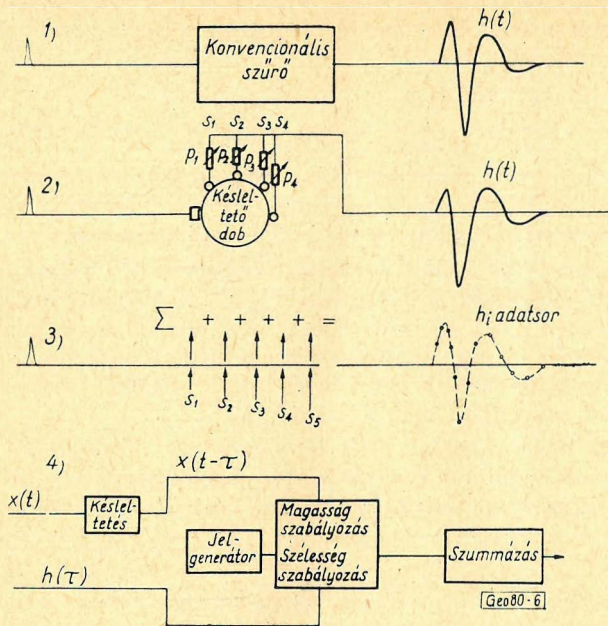
$$y(t) = \int_0^a h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau \quad (3.1)$$

Az integrálás elvégzését illetve az egyes betűk jelentését az 5. ábra szemlélteti. Az integrálközelítő összeg képzése még érthetőbbé teszi a műveletet:



4. ábra. Szűrő súlyfüggvénye

5. ábra. Szűrési művelet elvégzése: integrálközelítő összeg képzése



6. ábra. A szűrési művelet különböző technikai megvalósítási lehetőségei

1. konvencionális,
2. késleltetővonalas,
3. digitális,
4. analóg konvolúció (keresztkorrelációs)

$$y(t) \approx h(0) \cdot x(t) + h(\Delta\tau) \cdot x(t - \Delta\tau) + \dots = \sum_k h(k \cdot \Delta\tau) x(t - k \cdot \Delta\tau) \quad (3.2)$$

A különböző technikai megvalósítású szűrési eljárások összehasonlítása ezek után a 6. ábrán könnyen elvégezhető. Bővebb részletek: [8], [9], [10], [11].

Mindegyik bemenetre hasson egységimpulzusfüggvény. A kimenet a konvencionális szűrő esetén a (2.5) szerint a $h(t)$ súlyfüggvény.

A késleltetővonalas szűrésben [10] a bemeneti jel késleltetővonalra -- itt egy forgó mágnesdobra -- kerül. A kis körökkel jelölt fejekhez folyamatosan növekvő késleltetéssel jut el a jel nyomonkövetett fázisa. A p_1, p_2, \dots potenciométerek beállításuktól függően az s_1, s_2, \dots súlyokkal szorozzák a fejek kimeneteit: beleértve az esetleges polaritásfordítást, a negatív előjelet is. A súlyozott kimeneteket összegezzük. A súlyfaktorok, illetve a fejelhelyezések megadják az egységimpulzus válaszfüggvényét -- és a 2-ben mondottak szerint -- ezzel egyértelműen meghatározzák a szűrőt. Ha a fejek egymástól azonos távolságra vannak:

$$h(k \cdot \Delta\tau) = S_{k+1} \quad (3.3)$$

Világos, hogy bármilyen konvencionális sávszűrő utánosztható a p_i potenciométerek és így az s_i súlyfaktorok megfelelő választásával. Csak a $h(t)$ válaszfüggvényt kell a (2.3) szerint beállítani. Az is látható, hogy sokkal több lehetőségünk van a karakterisztika változtatására.

Tetszőleges $x(t)$ bemenetre – ha N egyenlő távolságban elhelyezett fejet alkalmazunk és a jel kiválasztott fázisa ezeket az egyenlő távolságokat $\Delta\tau$ idő alatt teszi meg:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_{k+1} x(t - k \cdot \Delta\tau) \quad (3.4)$$

A (3.3) felhasználásával a (3.4) formailag is a (3.2)-be megy át.

A *digitális szűrés* hasonló a késleltetővonalashoz. Csupán a felvevőfejeket kell mintavételi pontokkal, a potenciométerek s , súlyait megadott számsorozattal helyettesíteni [12]. A műveletek közvetlenül leolvashatók a 6. ábra harmadik vonaláról. Az egységimpulzusra adott válasz: a mintavételi pontok helyétől és a hozzájuk tartozó értékektől függ. A (3.3) és (3.4) egyenletek szóról szóra érvényesek maradnak erre az esetre is.

A negyedik megvalósítási mód lényege: egy négyszögjel generátor elég sűrűn szolgáltatott jeleinek magasságát a késleltetett $x(t - k \cdot \Delta\tau)$ jellel, szélességét a beállított $h(\tau)$ súlyfüggvénnyel változtatjuk. Emiatt az impulzus területe az

$$x(t - k \cdot \Delta\tau) \cdot h(k \cdot \Delta\tau)$$

mennyiséggel lesz arányos. Az ilyen módon formált jelek szummázását egy Miller-féle integrátor végzi [9].

A rövid ismertetésből is látszik, hogy a három új és modern szűrési módszer közül is a digitális a leghajlékonyabb. Nincsenek áramköri megkötöttségei. Ugyanez az oka nagyobb pontosságának is. Nem lehet tetszőlegesen sok felvevőfejet elhelyezni, de a súlyfüggvényt meghatározó adatsorunk akármilyen hosszúnak választható. Nyilvánvaló a másik két módszer számos hibaforrási lehetősége és emiatt a megvalósítás nehézségei.

Felmerül a kérdés, milyen gyakran kell a mintavételi pontokat választanunk. Érezhető, hogy gyors változások kielégítő jellemzésére sűrűbb kiolvasások szükségesek. A pontok megfelelő távolsága valamilyen módon a függvény frekvenciális összetételével kapcsolatos. Az információelmélet kvantitatív választ ad a kérdésre ([5], [23]): digitális adatsorral, megfelelően közeli kiolvasásokkal tetszőlegesen függvény reprodukálható. A szükséges feltétel: a kiolvasások τ_0 távolsága és az ω_h felső határfrekvencia viszonya:

$$\tau_0 \cong \frac{\pi}{\omega_h} = \frac{T_2}{2} \quad (3.5)$$

legyen. 2 msec-ként végezve kiolvasásokat, alatta maradunk a hazánkban használt hagyományos reflexiós berendezések felső határfrekvenciájából számított értéknek ($T_h \approx 3-4$ msec).

Ha nagysebességű adatfeldolgozó gépekkel rendelkezünk és automatikusan el tudjuk végezni a csatornák mintavételi pontjainak kiolvasását a digitális szűrés előnye a többiek felett kétségtelen.

Most már az a kérdés, hogyan használjuk fel ezt a nagy hajlékonyságot, hogyan aknázzuk ki lehetőségeinket a legjobb szűrés megvalósítására. A helyzet ugyanis az, hogy digitálisan akármilyen $h(t)$ megvalósítható.

4. A csatorna statisztikus jellemzői

Átlagos, auto- és keresztkorrelációs függvények.

A választás elvégzéséhez az optimum szűrő elmélet ad szempontokat. A szűrés célja, a használt jósági kritérium, a csatorna jellemzői ismeretében nyújt módszereket a rendszer meghatározására. A csatorna jellemzésére – ebben a dolgozatban – statisztikus függvényeket használunk. Röviden ismertetnünk kell ezek közül a statisztikus átlag, auto- és keresztkorrelációs függvények értelmezését és néhány tulajdonságát.

Legyen x_m diszkrét, rendezetlen változó, ami M számú lehetséges érték valamelyikét veszi fel; $g(x)$ egyértékű függvény. A $g(x_m)$ szintén diszkrét rendezetlen változó lesz. Ennek átlagértékét akarjuk meghatározni. Végezzünk M számú kísérletet (mérést). Ha az x_m $n(x_m)$ -szer fordult elő:

$$g_{\text{átl}} = \frac{g(x_1) \cdot n(x_1) + \dots + g(x_m) n(x_m)}{N} = \sum_{m=1}^M g(x_m) \frac{n(x_m)}{N} \quad (4.1)$$

Az $M \rightarrow \infty$ határértékre való áttérésnél a relatív gyakoriságok helyett valószínűségeket írva:

$$E[g(x)] = \sum_{m=1}^M g(x_m) P(x_m) \quad (4.2)$$

– ahol E jelöli az átlagképzést (a továbbiakban is ezt a jelölést fogjuk használni); $P(x_m)$ az x_m változó előfordulásának valószínűségét.

Ha folytonos változóról van szó:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot p(x) dx \quad (4.3)$$

Az átlagképzésre érvényes:

a) rendezetlen változók súlyozott összegének átlaga egyenlő az átlagok súlyozott összegével:

$$E[ax + by] = a \cdot E[x] + b \cdot E[y] \quad (4.4)$$

b) statisztikusan független változók szorzatának átlaga az átlagok szorzatával egyenlő:

$$E[h(x) \cdot f(y)] = E[h(x)] + E[f(y)] \quad (4.5)$$

Ha x_1 és x_2 jelöli a t_1 , illetve t_2 időben előfordulható változókat, az autokorrelációs függvény:

$$R_{x_1 x_2}(t_1 t_2) = E[x_1 x_2] \quad (4.6)$$

Stacionárius folyamat autokorrelációs függvénye csak a t_1 és t_2 idők közötti különbségtől függ:

$$R_x(t, t + \tau) = R_x(\tau) = E[x_t \cdot x_{t+\tau}] \quad (4.7)$$

Folytonos t esetén:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (4.8)$$

Az $x(t)$ és $y(t)$ keresztkorrelációs függvényének definíciója stacionárius folyamatra:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (4.9)$$

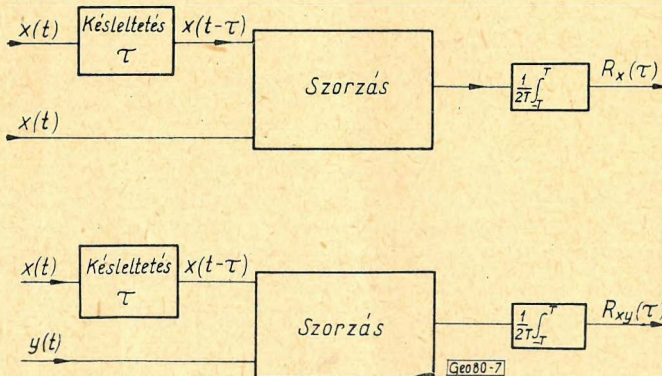
(Ha a folyamat nem stacionárius, a keresztkorrelációs függvény a τ késleltetésen kívül a folyó t időtől is függ.)

(4.8) és (4.9) előállításának bloksémáját a 7. ábra mutatja be. Gyakorlati számításoknál az integrált szummával közelítjük, a T -t pedig véges – de megfelelően nagy – értéknek választjuk. Ha az $x(t)$ -ből N számú pontot ismerünk és a

$$\tau = n \cdot \tau_0$$

összefüggésével definiáljuk a késleltetésre jellemző n számot:

$$R_x(n \cdot \tau_0) \approx \frac{1}{N + 1 - n} (x_0 \cdot x_n + x_1 \cdot x_{n-1} + \dots + x_{N-n} \cdot x_N) \quad (4.10)$$



7. ábra. Auto- és keresztkorrelációs függvények számításának bloksémája

Szükséges – (Shannon [5]), hogy:

$$n_{max} \cong \frac{N}{10}, \text{ vagy } 10 \cdot n_{max} \cong N \quad (4.11)$$

legyen. A számításához felhasznált intervallumnak legalább tízszer akkornak kell lenni, mint a maximális késleltetés. Ez felel meg annak, hogy T elég nagy.

A (4.8) definícióból közvetlenül adódik, hogy:

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau)$$

Rövid számolással belátható az is, hogy:

$$R_x(\tau) \cong R_x(0)$$

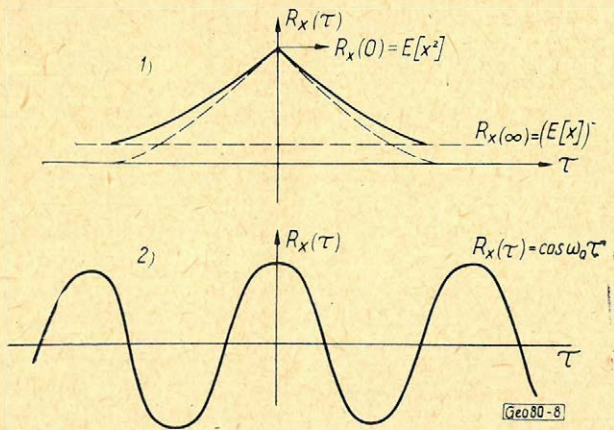
Az autokorrelációs függvényt normálni szokás úgy, hogy $R_x(0) = 1$ legyen. Gyakorlati esetben, amikor a (4.10) szerint egyes pontokban számítjuk a függvény értékét, úgy járunk el, hogy az $R_x(0)$ -al minden további értéket elosztunk.

A korrelációs függvények szoros kapcsolatban vannak az $x(t)$ és $y(t)$ periodicitásaival. Néhány egyszerű példát mutatunk be.

a) Ha $x(t)$ -ben nincsen periodicitás az autokorrelációs függvényt a 8. ábra felső vonala mutatja. A $\tau = 0$ -ban:

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt = E[x^2(t)] \quad (4.12/a)$$

szerint a négyzetes középértéket kapjuk.



8. ábra. Jellegzetes autokorrelációs függvény alakok:

1. rendezetlen folyamat periodicitás nélkül,
2. periodikus jel

Ha $\tau \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} R_x(\tau) = (E[x(t)])^2 \quad (4.12/b)$$

az átlagérték négyzetét. A t tengelyt úgy szokás felvenni, hogy az átlagérték zérus legyen – szaggatott vonal a 8. ábrán. A változás a $\tau = 0$ és $\tau \rightarrow \pm\infty$ között monoton csökkenés.

b) Ha $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \Theta)$ (4.13/a)

a normált autokorrelációs függvény egyszerű számítás után:

$$R_x(\tau) = \cos \omega_0 \tau \quad (4.13/b)$$

Az autokorrelációs függvény – ahogyan a (4.13) speciális esetben – általában is megőrzi az $x(t)$ egyes frekvenciáiról való információt és elveszti a fázisokról szólót. Az $x(t)$ $S_x(\omega)$ teljesítményspektrumának az $R_x(\tau)$ -val való összefüggése, a Wiener–Hincsin tétel szerint:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.14)$$

Az inverz transzformációt képezve:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.15)$$

Érdekes speciális eset az, amikor $\tau = 0$:

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (4.16)$$

A keresztkorrelációs függvény definíciójából, a (4.9)-ből következik, hogy:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) \quad (4.17)$$

A keresztkorrelációs függvény az ún. kereszt spektrummal hozható kapcsolatba:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.18)$$

az inverz transzformáció:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.19)$$

A keresztspektrum kifejezhető az $x(t)$ és $y(t)$ spektrumaival. Ha $\dot{\Theta}_x(\omega)$ és $\Theta_y(\omega)$ jelenti a fázis-spektrumokat, $S_x(\omega)$ és $S_y(\omega)$ a teljesítményspektrumokat:

$$S_{xy}(\omega) = \sqrt{S_x(\omega) \cdot S_y(\omega)} \cdot e^{i[\Theta_x(\omega) - \Theta_y(\omega)]} \quad (4.20)$$

Abszolútértékre áttérve:

$$|S_{xy}(\omega)| = \sqrt{S_x(\omega) \cdot S_y(\omega)} \quad (4.21)$$

A (4.21)-ből látható, hogy a keresztspektrum csak a közös frekvenciákat tartja meg. Ha valamelyik frekvencia az $S_x(\omega)$ -ban vagy az $S_y(\omega)$ -ban zérus teljesítménnyel szerepel, ugyanígy fordul elő a szorzatukban is.

5. Optimum szűrő tervezés

Célunk: valamilyen értelemben „legjobb”, optimális rendszer meghatározása. Azt, hogy melyik rendszert tartjuk a legjobbnak, több feltétel szabja meg. Ezek előírása többnyire a megvalósítás útját is kijelöli. Közülük a lényegesebbek:

1. a rendszerek milyen osztályában keressük az optimálisat;
2. mi az optimálisan elvégzendő feladat;
3. milyen mennyiséget használunk a cél megközelítésének mérésére; vagy rövidebben: mi a jósági kritérium;
4. milyen ismeretek állnak rendelkezésre a bemenetekről;
5. gazdasági szempontok (egyszerűség, olcsóság stb.)

1. Szűrőnk működését a 2-ben felsorolt egyenletek írják le. A rögzített paraméterű, lineáris szűrők között keressük az optimális súlyfüggvényt. Bizonyos esetekben azt is feltesszük még, hogy:

$$h(t) = 0, \text{ ha } t < 0.$$

Ez egyenértékű a szűrő (fizikai) realizálhatóságával.

2. Két, némileg különböző feladatesoporttal foglalkozunk:

a) kivonni a jelet a jel/zaj keverékből a lehető legkisebb jeltorzulással. Teljes általánosságban megfogalmazva: célunk a jel zajjal terhelt múltjából a jel valószínű folytatásának, jövőjének meghatározása.

Adott a bemeneten: $y(t) = s(t) + n(t)$

keressük az $s(t + \eta)$ függvényt. ($\eta > 0$)

A simítás (smoothing) ennek az általános feladatnak az $\eta = 0$ választással specializált esete. Egy másik lehetséges egyszerűsítés: a bemenetre nem hat zaj és $s(t)$ ismeretében az $s(t + \eta)$ -t akarjuk előállítani. A feladat mindegyik esetben a jel valódi alakjának megközelítése valamilyen értelemben.

b) Bizonyos esetekben nem lényeges a jel konkrét alakja, csak azt kérdezzük: van-e jel a vizsgált időintervallumban vagy nincs? Ilyenkor a jel/zaj arány növelése a cél.

3. Ha a kívánt kimenet: $s(t)$, a tényleges: $z(t)$; akkor az $s(t)$ és $z(t)$ valamilyen $f(s, z)$ függvénye — valamilyen értelemben — mértéke a működés hatásosságának. Célszerű olyan mennyiséget alkalmazni, ami csak az $s(t)$ és $z(t)$ különbségétől függ.

A gyakorlatban leginkább az

1. $P(|z - s| > \varepsilon)$
2. $E(|z - s|)$
3. $E[(z - s)^2]$

választások terjedtek el. Az 1-ben a jósági kritérium annak valószínűsége, hogy az eltérés a várttól valamilyen küszöbnél nagyobb. Olyan esetben célszerű alkalmazni, amikor egy bizonyos határon túli eltérések egyformán rosszak; míg az ezen belül eső értékek megfelelők. Optimális működés esetén: $P \approx 0$.

A 2. választás az eltérések abszolút-értékének átlagát használja. Az abszolútérték jel miatt nehezen kezelhető.

Legmegfelelőbb a 3., az eltérések négyzeteinek átlaga. Számítható a bemenet korrelációs függvényei és a rendszer átviteli függvény ismeretében. Minimálissá tétele lehetővé teszi a legjobb átviteli függvény meghatározását. Ezt, az átlagnégyzetes hibát használja Wiener és elméletének továbbfejlesztői. Levezetéseinkben — Wiener [6] — gondolatmenetét követve — mi is ezt alkalmazzuk.

4. Már 1-ben megjegyeztük, hogy eleve kell valamilyen információval rendelkezni a bemenetéről. Természetesen nincs szó pontos ismeretéről — akkor nem lenne szükség szűrésre — hanem valamilyen átlagos, statisztikus jellemzőről. A jel és zaj auto-, illetve keresztkorrelációs függvényeinek ismeretét fogjuk feltételezni. Ezzel természetesen egyenértékű a teljesítményspektrumok ismerete.

5. Ez a szempont, ti. a rendszer költségei most következő megmondásainkban nem fog szerepet játszani. Természetesen rendszeres feldolgozásnál már nem hanyagolhatjuk el ezt a tényezőt sem.

a) Először a jósól és simító típusú szűrővel foglalkozunk.

Elméletének kidolgozása Wiener és Kolmogorov nevéhez fűződik.

Az általános — összetett — feladat megfogalmazása:

Adott az

$$y(t) = s(t) + n(t)$$

bemenet; keressük azt a rögzített paraméterű, $h(t)$ súlyfüggvényű, lineáris szűrőt, amelyik a kimenetén a t időben az

$$s(t + \eta) \quad [\eta > 0]$$

átlag-négyzetes értelemben legjobb közelítést adja.

Rendelkezésre állnak: az $y(t)$ teljes múltja, az összes auto- és kereszt-korrelációs függvények. Feltesszük, hogy $s(t)$ és $n(t)$ valós értékűek és tágabb értelemben véve stacionáriusak. Ez utóbbi azt jelenti, hogy $s(t)$ és $n(t)$ várható értéke, szórása és az autokorrelációs függvények függetlenek az idő-origó választásától.

Egy $h(t)$ súlyfüggvényű szűrő kimenete $y(t)$ bemenet esetén:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau \quad (5.1)$$

az átlag-négyzetes hiba:

$$\varepsilon = E \left\{ \left[s(t+\eta) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau \right]^2 \right\} \quad (5.2)$$

Elvégezve a négyzetreemelését és tagonként az átlagolást, továbbá felhasználva a (4.2)–(4.7) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E[s^2(t+\eta)] - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot E[s(t+\eta) \cdot y(t-\tau)] d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot h(\mu) \cdot E[y(t-\tau) \cdot y(t-\mu)] d\tau d\mu = \\ &= R_s(0) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) R_{sy}(\eta+\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) h(\mu) R_y(\tau-\mu) d\tau d\mu \quad (5.3) \end{aligned}$$

A hiba a jel és zaj függvényekhez csak az $R_s(0)$, R_{sy} , R_y auto-, ill. kereszt-korrelációs függvényeken keresztül kapcsolódik.

Az optimális $h(t)$ az lesz, ami minimálissá teszi az ε hibát. A $h(t)$ meghatározását ezzel variációszámítási feladatra vezettük vissza.

Tegyük fel, hogy $g(t)$ egy – a feladat megfogalmazásában leírt osztályba tartozó – különben tetszőleges szűrő válaszfüggvénye. Akkor $f(t) = h(t) + \lambda \cdot g(t)$, (λ tetszőleges konstans), szintén ebbe az osztályba tartozó szűrő súlyfüggvénye. Ha $h(t)$ valóban optimum, akkor az $f(t)$ súlyfüggvénnyel az (5.3) jobb oldala csak nőhet. Az $f(t) = h(t) + \lambda \cdot g(t)$ behelyettesítésével nyert és az eredeti jobb oldal különbsége mindenképpen nem-negatív. A műveletek nem részletezett elvégzése után ez a:

$$\begin{aligned} 2\lambda \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) g(\mu) R_y(\tau-\mu) d\tau d\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) R_{sy}(\eta+\tau) d\tau \right] + \\ + \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \cdot g(\mu) R_y(\mu-\tau) d\tau d\mu \cong 0 \quad (5.4) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségre vezet.

A második tagról belátható, hogy mindig pozitív. Ha a szögletes zárójelben álló kifejezés zérustól különböző a λ megfelelő nagyságúra és előjelűre választása negatívvá teheti a teljes baloldalt. Meg kell követelni, hogy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) g(\mu) R_y(\tau - \mu) d\tau d\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) R_{sy}(\tau + \eta) d\tau = 0 \quad (5.5)$$

legyen. Rendezve:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\mu) \cdot R_y(\tau - \mu) d\mu - R_{sy}(\tau + \eta) \right] d\tau = 0 \quad (5.6)$$

Az egyenlőség az összes megengedett $g(t)$ függvényre csak akkor igaz, ha

$$R_{sy}(\tau + \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mu) \cdot R_y(\tau - \mu) d\mu \quad (5.7)$$

Megmutatható, hogy az (5.7) egyenlet kielégítése nemcsak szükséges, de elégséges feltétele is annak, hogy $h(t)$ optimum legyen.

Mivel a jobb oldal konvolúció típusú, az (5.7) Fourier transzformációval megoldható. Szorozva $\exp(-i\omega\tau)$ -vel és integrálva $-\infty$ és $+\infty$ között, továbbá felhasználva a (4.14)-et, kapjuk:

$$\begin{aligned} e^{i\omega\eta} \cdot S_{sy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{sy}(\tau + \eta) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mu) R_y(\tau - \mu) \cdot e^{-i\omega\tau} d\mu d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mu) e^{-i\omega\mu} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = H(\omega) \cdot S_y(\omega) \end{aligned} \quad (5.8)$$

amiből:

$$H(\omega) = \frac{S_{sy}(\omega)}{S_y(\omega)} e^{i\omega\eta} \quad (5.9)$$

Illetve:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{sy}(\omega)}{S_y(\omega)} \cdot e^{i\omega(t+\eta)} d\omega \quad (5.10)$$

Az (5.9) és (5.10) egyenletekkel leírt szűrő pontosan nem valósítható meg. Nemcsak a jel múltja, hanem teljes jövője is szükséges a kimenet kialakításához. Az 5. ábrára vetett pillantás meggyőző arról, hogy a $h(t) \neq 0$, $t < 0$

olyan szűrőt jelent, ami a t idő után történendőket is ismeri. A kimenet „el van maradva” a legutolsó feldolgozott bemeneti adat mögött. Az (5.7) végtelen késleltetést jelent. A szűrő jól megközelíthető, ha a bemeneti adatok nagy száma ismeretes a szűrés megkezdése előtt. Ez most teljesül. A szűrést a teljes szeizmogram ismeretében kezdhetjük el.

Ha pusztán simítás a cél:

$$\eta = 0 \text{ és: } H(\omega) = \frac{S_{sy}(\omega)}{S_y(\omega)} \quad (5.11)$$

Abban az esetben, ha a jel és a zaj korrelálatlanok és külön-külön zérus átlagértékűek (meg kell jegyezni, ez a szeizmikában nem érvényes) az (5.11) különösen szemléletes jelentésűvé alakítható:

$$H(\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega)S_{+n}(\omega)} = 1 - \frac{S_n(\omega)}{S_y(\omega)} \quad (5.12)$$

Eszerint a legjobb simítás akkor adódik, ha a bemeneti spektrumot azoknál a frekvenciáknál csökkentjük a legerősebben, amelyekre a zajspektrum aránya a jelhez viszonyítva nagy.

Ha nem akarunk késleltetést alkalmazni – realizálható szűrő – ki kell kötni, hogy $h(t) = 0$, ha $t < 0$. A levezetés változatlan az (5.7)-ig. Ezután egy vele analóg, de a realizálhatóságot figyelembe vevő integrálegyenletre jutunk:

$$R_{sy}(\tau + \eta) = \int_{\tau \geq 0}^{\infty} h(\mu) R_y(\tau - \mu) d\mu \quad (5.13)$$

Az (5.13)-at nem lehet megoldani Fourier transzformációval az alsó integrálási határ miatt. Nem részletezem a $h(t)$ előállítását ebben az esetben. Lényeges gondolata az $S_y(\omega)$ faktorizálása, tényezőkre bontása, amelyek bizonyos kívánatos tulajdonságokkal rendelkeznek. A végeredmény:

$$H(\omega) = \frac{1}{G(\omega)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega'(\tau+\eta)} \frac{S_{sy}(\omega')}{G^x(\omega')} d\omega' \quad (5.14)$$

– ahol $G^x(\omega)$ a $G(\omega)$ komplex konjugáltját jelöli és

$$|G(\omega)|^2 = S_y(\omega)$$

A $h(t)$ természetesen inverz Fourier transzformációval kapható a $H(\omega)$ -ből:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (5.15)$$

Az (5.14) integrál számítása még a legegyszerűbb esetben is nehéz. Eddigi célunk: előállítani egy jel alakját zajjal többé-kevésbé elfedett múltja ismeretében bizonyos esetekben szerényebben helyettesíthető: a jel pusztá helyének megkeresésével. Ez megengedhető első közelítés a szeizmikában is. Ilyenkor a detektálási valószínűséget kell növelnünk. Eljutottunk a másik szűrés-típushoz, az ún. detektáló szűrőhöz.

b) A jel/zaj arány maximalizálása (pre-detection szűrés)

A detektáló szűrő elméletét is csak a szeizmikus alkalmazásokhoz szükséges terjedelemben ismertetem. Bő irodalmával kapcsolatban csak a [6] és [23], illetve [13], [14]-re utalok.

Ha L jelöli a szűrővel végrehajtott lineáris operációt az

$$y(t) = s(t) + n(t)$$

bemeneten, akkor a kimenet:

$$y_o(t) = L[s(t) + n(t)] = L[s(t)] + L[n(t)] \quad (5.16)$$

Vezessük be az

$$L[s(t)] = s_o(t)$$

$$L[n(t)] = n_o(t)$$

jelöléseket.

Nevezzük a jobb oldalon álló kifejezéseket kimeneti jelnek, illetve zajnak.

A kimeneti jel/zaj viszonyon az:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{s_o^2(t)}{E[n_o^2(t)]} \quad (5.17)$$

mennyiséget fogjuk érteni.

Ennek maximalizálása a feladat valamilyen $t=t_1$ időpontban.

Jelölje az — egyelőre ismeretlen — jel/zaj arányt: $1/m$. Akkor tetszőleges szűrőre érvényes, hogy

$$E[n_o^2(t_1) - m \cdot s_o^2(t_1)] \cong 0 \quad (5.18)$$

és az egyenlőségjel csak az optimális szűrő esetén érvényes. A szűrés haszon T ideig, az optimum szűrő súlyfüggvényét jelölje: $h(t)$, egy másik kineáris szűrőét: $g(t)$. A későbbiek egyszerűsítése kedvéért $g(t)$ legyen olyan tulajdonságú, hogy

$$\int_0^T g(\tau) \cdot s(t_1 - \tau) d\tau = 0$$

Érvényes, hogy

$$s_o(t_1) = \int_0^T h(\tau) \cdot s(t_1 - \tau) d\tau$$

$$h_o(t_1) = \int_0^T h(\tau) \cdot n(t_1 - \tau) d\tau \quad (5.19)$$

Ha a $h(t)$ helyett a $h(t) + \lambda g(t)$ -t alkalmazzuk, más kimeneti jel és zaj értékeket kapunk: $s'_o(t)$ -t és $n'_o(t)$ -t. Ezekkel is elkészíthetjük az (5.18) bal oldalát. Ha $h(t)$ valóban optimális, az új bal oldal és az (5.18) bal oldalának különbsége nem-negatív. Mivel λ tetszőleges érték, szorzójának el kell tűnie. Ebből:

$$\int_0^T g(\tau) d\tau \int_0^T h(\mu) R_n(\tau - \mu) d\mu = 0 \quad (5.20)$$

A $g(t)$ -re adott megszorítást figyelembevéve az (5.20)-ból:

$$\int_0^T h(\mu) \cdot R_n(\tau - \mu) d\mu = \alpha \cdot s(t_1 - \tau)$$

$$0 \leq \tau \leq T \quad (5.21)$$

adódik, ahol az α konstans. (Értéke nem befolyásolja a jel/zaj arányt.) Bebizonyítható az is, hogy az (5.21) integrálegyenletet kielégítő $h(t)$ valóban optimális. Az (5.21) szükséges és elégséges feltétel.

Az (5.21) egyenlet megoldása általában nehéz és különböző közelítésekkel történik. De ha a zaj fehér zaj (nincsen benne kitüntetett frekvencia) akkor:

$$R_n(t) = N \cdot \delta(t)$$

– ahol N a zajteljesítmény, $\delta(t)$ a deltafüggvény és az (5.21)-ből:

$$N \int_0^T h(\mu) \delta(\tau - \mu) d\mu = s(t_1 - \tau) \quad (5.22)$$

ill. a deltafüggvény tulajdonságai miatt (ld. pl. [7]), hogy ti. kiválasztja az integrandusból azt az értéket, aminél a saját argumentuma zérus:

$$N \cdot h(\tau) = s(t_2 - \tau)$$

illetve:

$$h(\tau) = \frac{1}{N} \cdot s(t_1 - \tau) \quad (5.23)$$

Az (5.23) szemléletes jelentése: az optimális súlyfüggvény a várt jel időbeli inverze. Ez az alapja a [9] analízisének.

6. Az optimumszűrő megvalósítási lehetőségei

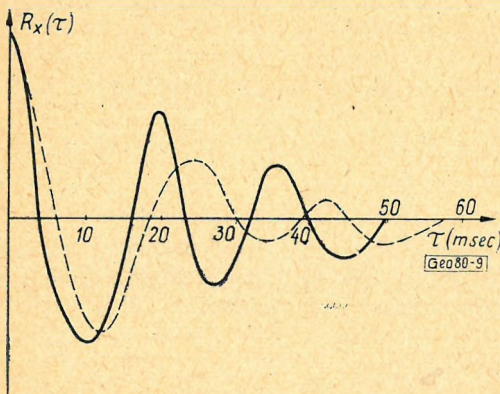
Alapfeltevések vizsgálata, egyszerűsítések.

Az összes levezetésekben feltettük, hogy a szűrendő folyamat tágabb értelemben véve stacionárius, ami többek között azt jelenti, hogy a teljes bemenet: $y(t)$ autokorrelációs függvénye időben állandó. Ellenőrzésül egy kiválasztott szeizmogramon, 1963. jún. 11-én, Kisújszálláson felvett 25/7 jelzésű magnetofonos regisztrátumon végeztünk számításokat. A visszajátzás AVC-vel, alulvágó szűréssel – jelzése 0/24 és 10/24 –, keverés nélkül történt. A szalag 2. csatornáján 0,3 és 3,3 sec között 2,5 msec-ként olvastunk ki értékeket. Ezután 0,5 sec-os intervallumokat alakítottunk ki: 0,3–0,8; 0,8–1,3; között; 200–200 adattal. Kiszámítottuk az autokorrelációs függvényeket a (4.10) képlet szerint 50 msec maximális késleltetésig. A normalizálást is elvégeztük úgy, hogy $R_x(0) = 1$ legyen.

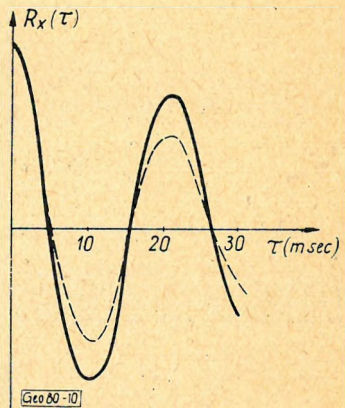
A számítási intervallum nagyságát az szabta meg, hogy egyrészt a maximális késleltetésig legalább 3–4 tengelymetszést akartunk kapni (ami kb. 30–40 msec); másrészt az a követelmény, hogy a számításához felhasznált intervallum legalább $10 \cdot \tau_{\max}$ legyen.

Az autokorrelációs függvény nem állandó. Szabályos változást mutat a szeizmikus csatorna mentén. A domináns frekvencia csökken, ami megfelel annak, hogy a szeizmikus hullám terjedése folyamán az energia maximuma a spektrum alacsony-frekvenciás része felé tolódik el ([15], [16]).

A két szélső esetet: a 0,3–0,8 sec intervallum (folytonos vonal) és a 2,8–3,3 sec intervallum (szaggatott vonal) autokorrelációs függvényeit mutatja be a 9. ábra.



9. ábra. Autokorrelációs függvények



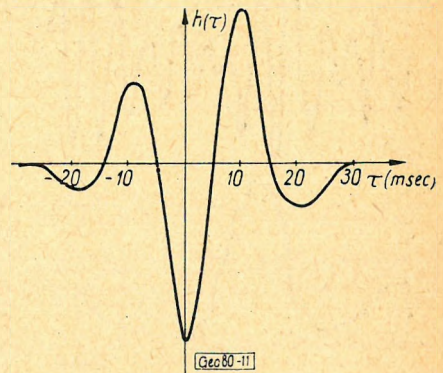
10. ábra. Autokorrelációs függvények összehasonlítása

A következő feltétel, hogy a jel autokorrelációs függvénye és a teljes bemenet autokorrelációs függvénye között szignifikáns különbség legyen. Elkészítettük ezért egy kétségtelen reflexiót tartalmazó intervallum $R_x(\tau)$ autokorrelációs függvényét is az 1,2 sec körüli, közelítőleg 0,25 sec hosszúságú intervallum felhasználásával. A maximális késleltetés (4.11) csak 25 msec-ig mehetett. Az ugyanezen intervallumbeli (0,8–1,3 sec) teljes bemeneti autokorrelációs függvénnyel való összehasonlítás rendkívüli hasonlóságra hívja fel a figyelmet: 10. ábra. Ugyanezt a vizsgálatot más reflexiókra is elvégeztük és megegyező eredményre jutottunk: Nem magyarázható a hasonlóság azzal, hogy a mondott intervallum autokorrelációs függvényének jellegét az ott levő nagy reflexió szabja meg. $R_x(\tau)$ teljesen szabályos változás sorának egy tagja. Nehéz tehát különbséget tenni a „hasznos” reflexió és a „haszontalan” egyéb mozgások között. (A felszíni hullámot, ami markáns eltérést mutat, már a geofonnál kiszűrtük!)

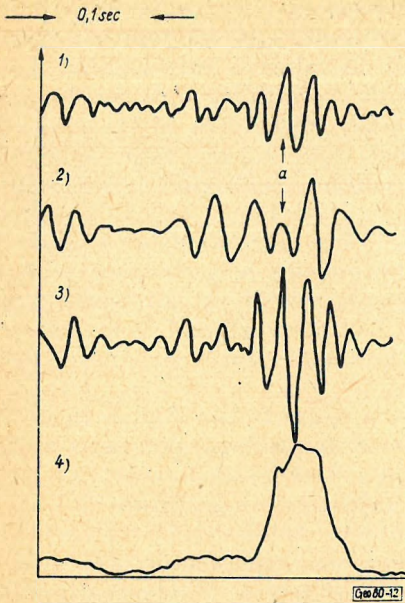
Ez a megállapítás, ami azt jelenti, hogy a szűrő optimalizáció nemcsak nehezen elvégezhető, hanem alapfeltevései sem teljesülnek pontosan, tulajdonképpen előrelátható volt. Összhangban van a Ricker elmélettel ([15], [16]); azzal a felfogással, hogy a szeizmogram zajháttere nagyszámú kis, reflexiók és refrakciós hullámúton beérkező jel eredője ([17], [18], [19]). A változás nem túl gyors, úgy, hogy a feldolgozásnál kijelölhető olyan intervallumok, amikre a stacionaritás elég jó közelítést jelent. Mindenesetre optimális kiértékelés nem végezhető a csatorna mentén állandó $h(t)$ -vel.

Láttuk 5-ben, hogy a szűréshez használt információk a bemenetről: simító, illetve jósló szűrőnél az R_{sy} keresztkorrelációs — és az R_y autokorrelációs függvények (5.7, 5.11); a detektáló szűrőnél a zaj autokorrelációs függvénye és a várt jel alakja (5.21).

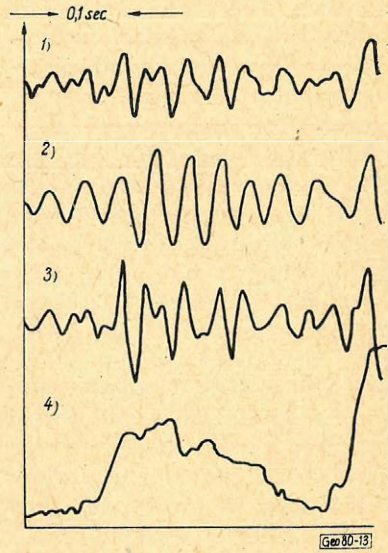
Ezek közül valóban csak az R_{sy} számítható. Úgy látszik az 5-ben leírt elveket nem vihetjük át a gyakorlatba. Valójában nem ilyen reménytelen a helyzet. Bizonyos egyszerűsítő feltevések alkalmazásával mind a Wiener-féle jósló és simító szűrőt, mind a detektáló szűrőt megközelíthetjük. (Más kérdés, hogy milyen sikerrel.) Utóbbinál az $R_h(t) = N \cdot \delta(t)$ választással (Gauss zaj feltételezése) már az 5-ben is sikerült az (5.22) szűrési elvet levezetni, amihez már csak a várt jel alakjának ismerete szükséges. A $h(t)$ a várt inverze lesz. Ez utóbbi meghatározására és becslésére több lehetőség kínálkozik ([9], [17], [19]). A különböző módszerek eredményeinek összehasonlítása egy további analízis célja lesz. Első tájékozódásként végzett számításaimban a 11. ábrán bemutatott $h(t)$ -t használtam. Meghatározására kétségtelen reflexiót jelentő hullámbeérkezések szumázása szolgált. A hiba, amit a pontos jelalaktól való eltérés okoz, valószínűleg nem nagyobb, mint amit a zajról tett közelítés jelent. A későbbi részletesebb analízisben természetesen intervallumonként változó jelalakot kell majd használnunk. A konvencionális szűréssel való összehasonlítás elvégezhető a 12–15. ábrákon. Az 1. vonal az



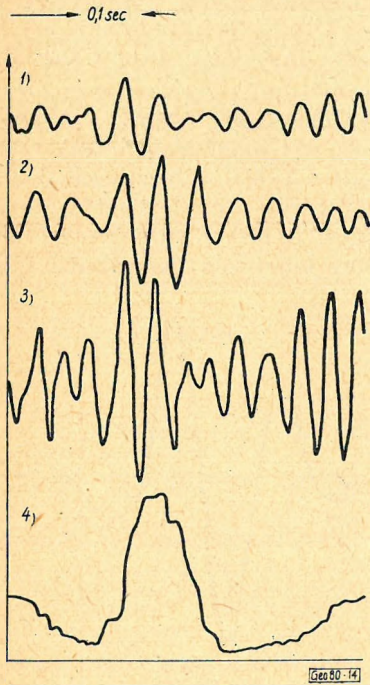
11. ábra. Keresztkorrelációs analízishez használt súlyfüggvény



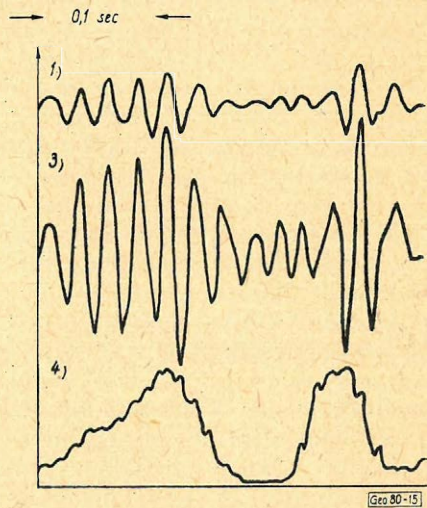
12. ábra. Különböző szűrési módszerek összehasonlító vizsgálata 1,0 – 1,3 sec intervallum



13. ábra. Különböző szűrési módszerek összehasonlító vizsgálata 1,3 – 1,6 sec intervallum



14. ábra. Különböző szűrési módszerek összehasonlító vizsgálata 1,5 – 1,8 sec intervallum



15. ábra. Különböző szűrési módszerek összehasonlító vizsgálata: 1,7 – 2,0 sec intervallum

eredeti szeizmogram görbéje, a 2. a hagyományos, a 3. a keresztkorrelációs szűrés eredménye. Az ábrák, a megfelelő sorrendben az 1,0–1,3, 1,3–1,6; 1,5–1,8; 1,7–2,0 sec-os intervallumokat mutatják. Látszik, hogy a keresztkorrelációs szűrés – legalábbis ebben az esetben – a konvencionálisnál valamivel hatásosabban növeli a jel/zaj arányt és kevésbé módosítja az eredeti csatorna jellegét (pl. a 12. ábrán az a-val jelölt hely).

A Wiener-szűrő koncepcióját a következő módon egyszerűsíthetjük geofizikai analízis céljaira (8).

1. A jósláshoz használt, a $h(t)$ -t reprezentáló számsort nem a korrelációs függvényekből, hanem közvetlenül a csatornakiolvasásokból határozzuk meg egy intervallumon, az ún. operátorintervallumon a legkisebb négyzetek módszerével.

2. Csak a zajt jósoljuk meg.

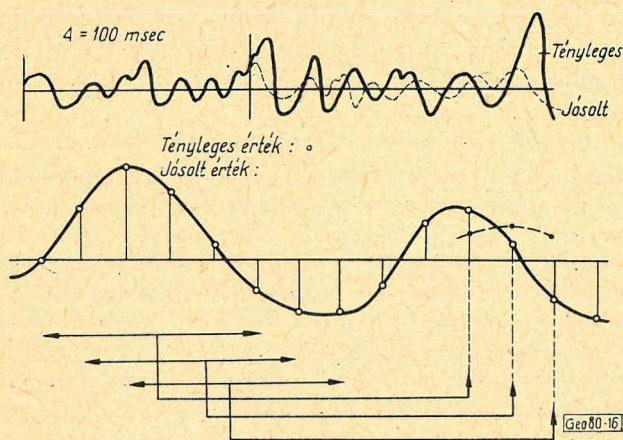
3. A jóslt értéket kivonva a tényleges csatornából ún. jóslási hibát kapunk. Azt várjuk, hogy a reflexiók helyén a hiba jelentősen megnő.

Az egyes lépéseket szemlélteti a 16. ábra. Számításaimban némileg eltértem a [8]-ben leírt módszertől, mert jóslásra csak egy csatornát használtam fel. Erre az adott „jogalapot”, hogy a közelítő vizsgálatoknál az egy, illetve a két csatornából kapott jóslás között elhanyagolható kis különbség volt.

A kiválasztott intervallum: A 100 msec hosszúságú. A kiolvasások közötti távolság: 2 msec. Az operátorintervallum 50 értéke szolgált a jósló szűrő h_i súlyfüggvényének digitális alakban h_1, h_2, \dots, h_6 értékrendszerként való meghatározására. A jóslás 10 msec-mal későbbi értékre vonatkozott ($\eta = 10$ msec).

Ha a csatornának megfelelő adatsor:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{49}, x_{50}$$



16. ábra. A „jóslás” mechanizmusának vázlata

felírható:

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + \dots + h_6 x_6 = x_{11} \quad \dots 1.$$

$$h_1 x_2 + h_2 x_3 + \dots + h_6 x_7 = x_{12} \quad \dots 2.$$

$$h_1 x_{10} + h_2 x_{11} + \dots + h_6 x_{15} = x_{50} \quad \dots 40. \quad (6.1)$$

40 egyenletünk van a 6 h_i meghatározására. A szokásos módon kiegyenlítést alkalmazunk. Ha

$$\sum_{i=1}^6 h_i x_{k+i} = \hat{x}_{k+10}$$

akkor az

$$I = \sum_{K=1}^{40} (x_{k+10} - \hat{x}_{k+10})^2$$

minimumát keressük.

A szokásos módon a $\frac{\partial I}{\partial h_i}$ parciálisok képzésével, majd ezek zérussal egyenlővé tételével felírjuk a normálegyenleteket. A megoldás adja a súlyfüggvény – vagy másképpen: a lineáris operátor – adatsorát.

A jóslott értékeket az operátor segítségével meghatározva, majd a tényleges értékekből kivonva kapjuk a jóslási hibát. Ez az eljárás – legalábbis átlag-négyzetes értelemben – optimálisan eltávolítja a zajt az operátor intervallumban. Feltéve, hogy a zaj statisztikus tulajdonságai állandók ennek környezetében is. Amennyiben a reflexiók statisztikája eltér a zajétól, a zaj jóslására készített adatsor rosszul jóslja meg a reflexiót: annak helyén a jóslási hiba megnő. A hibák futó négyzetes átlagának számítása alakítja ki végül a csatorna jellegzetes képét. Ezek az első ránézésre feltűnő vonások:

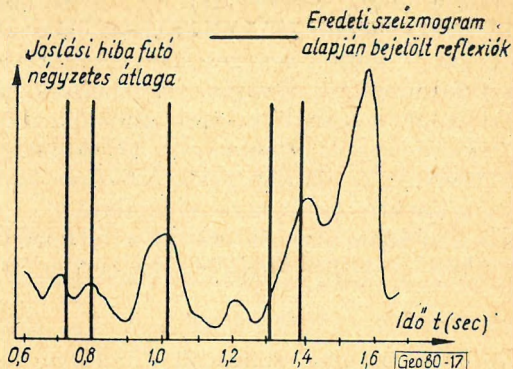
mindenütt pozitív;

jelentős különbségek vannak a maximumok és átlagszint között.

Sajnos, a módszer nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket. Sok esetben nem mutatkozik maximum a reflexiók helyén. Máskor maximumok alakulnak ki ott is, ahol nincs reflexió. Természetesen operátorunk gyenge hatásának oka lehet az is, hogy rövid intervallumból és kevés pontot határoztunk meg. Emellett a kiolvasások is pontatlanok lehetnek, a digitáláskor elkövetett hiba is sokat ronthat. A pontos részletek megállapításához további vizsgálatokat kell még végezni. Megjegyzem, hogy az intervallum növelésével elvi nehézségek merülnek fel: a reflexiómentesség, ami önmagában véve is eléggé homályos jelentésű, egyre rosszabb közelítés lesz; a statisztikus állandóság is egyre kevésbé teljesül. A [8] gondolatmenetének vitatható pontja ez az indoklás: a reflexió nagy jóslási hibával jelentkezik, mert az operátort (a súlyfüggvény adatsorát) zajnak zajból történő jóslására számítottuk. Esze-

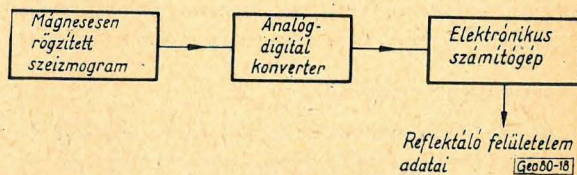
rint ugyanis a reflexió után is nagy jóslási hibát kellene kapni, mert a reflexióból sem lehet megjósolni az utána következő zajt.

A módszer eredményességében való kételkedést nem csupán saját – és mint említettem kiterjedelmű – számításaimra alapítom. A [8] ábráiról hasonlóan elmondható, hogy sokszor kevés összefüggés fedezhető fel a reflexiók és a jóslási hiba görbe maximumai között. Találomra kiemelve a [8]-ból egy ábrát ellenőrizhetők az elmondottak: 17. ábra.



17. ábra. A jóslási hiba négyzetének futó átlag-görbéje, Wadsworth, Robinson... nyomán (1953)

Észrevettem, hogy ha a csatorna adatok négyzeteinek futó átlagait rakjuk fel, szintén frappáns maximumokat kapunk. A görbe jellege hasonlít a jóslási hiba futó négyzetes átlagainak görbéjéhez. Most azonban szemléletes kapcsolat van az eredeti és átalakított csatorna között. A [8]-ban kifejtett koncepció szempontjából a futó négyzetes átlag számolása: elhanyagolhatóan kicsiny zaj jelenlétében végzett jóslás. (Ha a zaj jóslott értéke zérusnak vehető, akkor a jóslási hiba görbéje megegyezik magával a csatornával.) Az átlagolás, mint felülvágó szűrő működik. Megfelelő választása kedvező tulajdonságokat ad a „négyzetreemelt” csatornának.



18. ábra. Ideális feldolgozás blokkdiagramja

A 12 – 15. ábrák 4. vonalai tüntetik fel a futó négyzetes átlagokat. Ez az igen egyszerű – de éppen emiatt számológéppel könnyen és olcsón számolható – módszer alkalmasnak látszik első tájékozódásra. Ha a jel/zajarány elég nagy, a reflexiók a görbe maximumainak közelébe esnek. Alkalmazását összeköthetjük valamilyen más szűrővel, amely megfelelően növelia jel/zaj arányt.

7. A szűrés helye az automatikus kiértékelésben

Az ideális automatikus kiértékelés blokkdiagramját a 18. ábra mutatja be. Okvetlenül szükséges a gyors adatbevitel és a gyors számolás, hiszen szeizmogramonként 50 – 100 ezer adat feldolgozásáról van szó. A számolási elvek kidolgozása sűrgető feladat. Három csoportjuk:

1. javítások,
2. detektálás; feladata: a reflexiók út-idő görbék előállítása,
3. reflektáló felületelem adatainak számítása.

Ezek közül a 3. ismert. Bármely kézikönyvben megtalálhatjuk az ide tartozó képleteket.

A javítások közé tartozik a szűrés. Célkitűzése lehet szabályos, illetve

statisztikus zajok eltávolítása. A statisztikus zajok szűrésére is felhasználhatunk frekvenciális és hullámhossz (látszólagos sebesség) tulajdonságokat. A dolgozat – mint a bevezetésben is említettem – statisztikus zajok frekvenciális tulajdonságok alapján végezhető lineáris szűrésével foglalkozott. További feladat: a szabályos zajok (ghostok, többszörösök) szűrésének vizsgálata; *frekvenciális és hullámhossz* tulajdonságok (tehát tér és időbeli korrelációs viszonyok) alapján türténő szűrés vizsgálata; nem-lineáris módszerek vizsgálata.

Ez utóbbiak vezethetnek át a reflexiódetektáláshoz, ami – a mondott értelemben – teljes egészében ismeretlen terület.

8. Összefoglalás, következtetések

A hagyományos szűréstől kiindulva megtárgyaltuk az időben állandó paraméterű lineáris szűrés elméletét. Röviden leírtuk a szűrés művelet különböző technikai megvalósítási lehetőségeit. Néhány – a továbbiakban felhasználandó – statisztikus függvény definíciója után, Wiener gondolatait követve, foglalkoztunk az optimum szűrő meghatározás elméletével. Megvizsgáltuk a geofizikai feladatra való alkalmazás lehetőségeit.

Következtetéseink:

1. Az alapfeltevések közül nem teljesül a statisztikus állandóság, emiatt időben változó szűrőt; legalábbis szakaszonként változó $h(t)$ súlyfüggvényűt kell meghatározni.

2. Ismereteink a jel és zaj korrelációs függvényeiről és spektrumairól hiányosak. Amíg ezt nem számoltuk fel, nem vihetjük át a szeizmikára az optimum szűrő elmélet eredményeit további egyszerűsítő feltevések nélkül.

3. A „keresztkorrelációs” szűrés (pontosabban a predetection szűrés), ami fehér zaj esetén az optimum, valamivel hatásosabb a konvencionális szűrésnél. Továbbfejlesztésére a várt jelalak analízise szükséges.

4. A jósló szűrő megvalósításában a [8] közelítése nem engedhető meg. A korrelációs függvények pontos ismeretének hiánya itt is nagy hátrány. A kétféle szűrés mód összefoglaló táblázatát az 1. táblán adom meg.

5. A lineáris szűrés megkönnyíti ugyan a jelek detektálását, de nem végzi el. Nem tud elég nagy különbségeket létrehozni a jel és a zaj között. Szükséges a nemlineáris módszerek vizsgálata. A futó átlag a csatornakiolvasások négyzetin alkalmasnak látszik első tájékozódásra.

1. táblázat

Szűrés mód	Kivonatoló szűrő simítás és jóslás	Detektáló szűrő
Bemeneti függvények: Kimenetek:	$g(t)$	$y(t) = s(t) + n(t)$ $s_0(t) + n_0(t)$
Cél:	$g(t) \approx s(t + \eta)$	$\frac{s_0^2(t)}{E[n_0^2(t)]_{t=t_1}} = \max.$
Működéshez szükséges ismeretek:	korrelációs függvények vagy spektrumok $(R_{sy}, R_y; S_{sy}, S_y)$	a várt jel alakja a zaj spektruma $(s(t); (R_n), S_n)$
Egyszerűsítő feltevések (ebben a dolgozatban):	a súlyfüggvény közvetlenül a csatorna kiolvasásokból megadható	a zaj, „fehér” zaj
Megoldás:	egyenletrendszer megoldása (6.1)	a súlyfüggvény a várt jel idő- beli inverze

- [1] *W. T. Born*: Technical limitations of present geophysical tools.
Geophysics vol. 27. 133–137 old.
- [2] *N. Levinson*: A heuristic exposition of Wiener's mathematical theory of prediction and filtering.
Journal of Math. and Phys. vol. 26 no. 2 (july 1947)
- [3] *Lee, Cheatham and Wiesner*: Application of correlation analysis to the detection of periodic signal in noise.
Proc. IRE 1950.
- [4] *Zadeh, Lotfi A., & R. Ragazzini*: An extension of Wiener's theory of prediction.
Jour. Applied Phys. vol. 21 (1950)
- [5] *Shannon, C. E. and Weaver, W.*: The mathematical theory of communication.
Illions Press, Urbana, Illiona 1949.
- [6] *N. Wiener*: Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series.
John Wiley, New York, 1949.
- [7] *L. Schwartz*: Théorie des distributions.
Hermann et Cie, Paris, 1951.
- [8] *Wadsworth, Robinson, Bryan, Murley*: Detection of reflection on seismic records by linear operators.
Geophysics, vol: 18,539–586 oldal.
- [9] *J. Jones, J. A. Morrison*: Cross correlation filtering.
Geophysics, vol: 19,660-683 old.
- [10] *J. Jones, H. J. Morrison*: Magnetic delay line filtering...
Geophysics, vol: 20,745–765 old.
- [11] *A Swartz, M. Sokoloff*: Filtering associated with selective sampling.
Geophysics, vol: 19,402–419 old.
- [12] *A. G. Tarchov, Szidarov*: Matematiceszkaja etc. Izv. A k. Nauk. CCCP 1960 No. 10.
- [13] *Van Vleck, J. H. D. Middleton*: A theoretical comparison of visual, aural and reception of pulsed signals.
Jour. Applied Physics, 1946. nov.
- [14] *Zadeh, Lotfi A., J. R. Ragazzini*: Optimum filters for the detection of signals in noise.
Proc. I. R. E. 1952. okt.
- [15] *N. Ricker*: The form and laws of propagation of seismic wavelets.
Geophysics, vol: 18,10–41 old.
- [16] *N. Ricker*: Wavelet contraction, wavelet expansion, and the control of seismic resolution.
Geophysics, vol: 18,769–792
- [17] *C. W. Horton*: The structure of the noise background of a seismogram. I.
Geophysics, vol: 20,565–587
- [18] *C. W. Horton*: The structure of the noise background of a seismogram. II.
Geophysics, vol: 22,261–267 old.
- [19] *E. A. Robinson*: Predictive decomposition of seismic traces.
Geophysics, vol: 22,767–778 old.
- [20] *R. B. Rice*: Inverse convolution filters.
Geophysics, vol: 27,4–18 old.
- [21] *M. K. Smith*: A review of methods of filtering seismic data.
Geophysics, vol: 23,44–57 old.
- [22] *N. Wiener*: Az extrapoláció elmélete. (fordítás)
Megjelent: Beckenbach: Modern matematika mérnököknek cikkgyűjteményben.
- [23] *H. Schlitt*: Systemtheorie für regellose Vorgänge.
Springer-Verlag, Berlin 1960.