Hilbert-transzformáció felhasználása reflexiós szeizmikus hullámok pillanatnyi frekvenciáinak meghatározásához

ZSELLÉR PÉTER*

A szeizmikus időszelvényeken látható hullámok pillanatnyi frekvenciáinak megváltozása gyakran kapcsolatba hozható a szénhidrogének jelenlétével. A szénhidrogén-tároló rétegeken áthaladó hullám domináns frekvenciája csökken. A Hilbert-transzformáció segítségével ezek a frekvenciacsökkenések felismerhetők.

A cikkben ismertetjük – az irodalomból egyébként régóta ismert – Hilbert-transzformációt és bemutatunk egy módszert a pillanatnyi frekvenciáknak a Hilbert-transzformáció segítségével történő meghatározására.

Наблюдаемое на сейсмических временных разрезах изменение мгновенной частоты часто можно приурочить к возможному присутствию углеводородов. Уменьшается доминирующая частота распространяющихся через содержащие углеводороды слои волн. С помощью преобразования Гильберта можно распознать это снижение частот.

В статье описывается в литературе уже давно известное преобразование Гильберта и показывается метод определения мгновенных частот с помощью преобразования Гильберта.

The change of the instantaneous frequencies of the reflections can be frequently connected to the presence of the hydrocarbons. The dominant frequency of the waves penetrating through the layers containing hydrocarbons decreases. This frequency decrease can be detected by the help of the Hilbert transform.

In this paper we introduce the Hilbert transform which is well known from the literature and we show a method for determination of the instantaneous frequencies by the use of the Hilbert transform.

Hilbert-transzformáció

Azt a szűrőt, ami a sinust a periódushossztól függetlenül áttranszformálja cosinus függvénnyé, $90°$-os fázistoló szűrőnek, vagy másnéven kvadratúra szűrőnek szokás nevezni. Konkrétabban, ez egy olyan szűrő, melynek a bemenetére $\cos(\omega t + \Phi)$ alakú jelet adva, a kimeneten $\cos\left(\omega t + \Phi + \frac{\pi}{2}\right)$ jelenik meg.

Ez a szűrő felhasználható például egy időfüggvény burkológörbéjének a kiszámításához. Legyen $X(Z)$ egy valós idősor z-transzformáltja, $Q(Z)$ a kvadratúra szűrő és legyen a kvadratúra szűrővel történt szűrés eredménye $Y(Z) = Q(Z) \cdot X(Z)$. A burkoló időfüggvény a következőképpen definiálható:

$$e_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}\,.$$

Ebből a felírásból visszafele indulva adódik, hogy készíthetünk egy olyan komplex idősort, melynek abszolút értéke éppen e_t lesz. Ez az idősor: $u_t = x_t + iy_t$. Ennek z-transzformáltja: $U(Z) = X(Z) + iY(Z) = [1 + iQ(Z)] \cdot X(Z)$. Ennél az írásmódnál láthatjuk, hogy az $u_t \bar{u}_t$ jelenti a burkológörbét.

* Geofizikai Kutató Vállalat, Budapest

A kvadratúra szűrő felhasználható az ún. pillanatnyi frekvenciák meghatározására is. Az u_t komplex értékű függvényt a következőképpen is írhatjuk:

$$u_t = \sqrt{e_t} \exp (j \Phi_t),$$

ahol $\Phi_t = \arctan \left(\frac{y_t}{x_t} \right) = \omega t + \Phi$. Ennek az idő szerinti deriváltja éppen a frekvencia: $\frac{d\Phi_t}{d_t} = \omega$.

Készítsük el ezt a 90°-os fázistolást végző szűrőt. A szűrőt frekvenciatartományban könnyű felírni:

$$Q(\omega) = -i \frac{\omega}{|\omega|}.$$

Készítsük el ennek az időtartománybeli megfelelőjét:

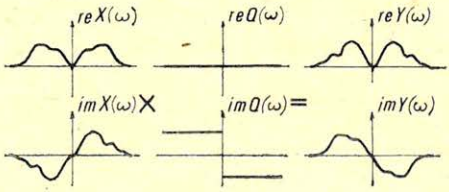
$$q_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\omega) e^{-i\omega n} d\omega = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega n} d\omega - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega n} d\omega =$$

$$= \frac{i}{2\pi n} (-1 + e^{in\pi} + e^{-in\pi} - 1) = \begin{cases} 0, \text{ ha } n \text{ páros} \\ -\frac{2}{\pi n}, \text{ ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

A művelet végrehajtása frekvenciatartományban a következőképpen történhet. Tegyük fel, hogy a bemenet tiszta valós, $x_t + iO$ alakú. Ezt transzformáljuk át frekvenciatartományba és szorozzuk be a $Q(\omega)$ lépésfüggvénnyel. *(1. ábra)* A szorzás eredményeként egy olyan, szintén tiszta valós értékű csatornát kapunk, melynek valós frekvenciaspektruma a bemeneti spektrum képzetes részéből, a képzetes rész pedig a bemenet valós részéből épül fel.

Ezt a szűrési műveletet Hilbert-transzformációnak, a vele előállított *90°*-os fázistolású csatornát pedig kvadratúra csatornának nevezzük.

Térjünk vissza a cikk elején használt $1 + iQ(Z)$ szűrőhöz. Ennek segítségével az x_t tiszta valós időfüggvényből egy olyan u_t komplex időfüggvényt készíthetünk, melynek valós része maga az x_t lesz, képzetes része pedig x_t Hilbert-transzformáltja. *(2. ábra)*

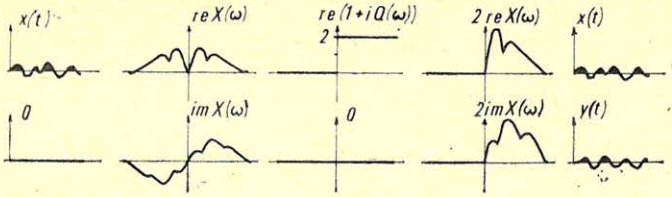


Geo 82/14-1

1. ábra. A *90°*-os fázistolás megvalósítása frekvenciaszűréssel

Рис. 1. *90°*-ый сдвиг фазы частотной фильтрацией

Fig. 1. Realisation of the *90°* phase shifting by frequency filtering



2. ábra. Komplex értékű csatorna előállítása az $x(t)$ valós értékű csatornából. A komplex csatorna valós része azonos a bemeneti $x(t)$ csatornával, az immaginárius részét pedig az $x(t)$ Hilbert transzformációjával nyertük

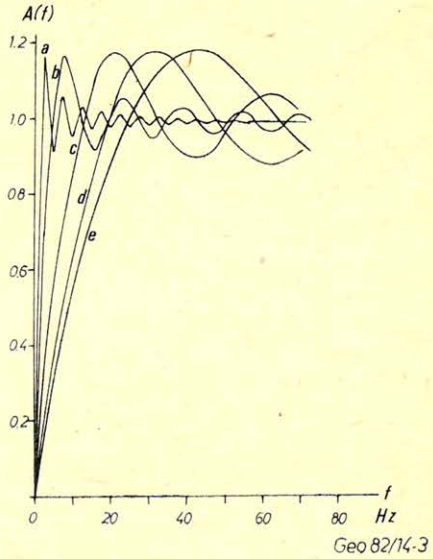
Рис. 2. Составление комплексного канала по каналу $x(t)$. Действительная часть комплексного канала одинакова с каналом на входе $x(t)$, мнимая часть получается преобразованием Гильберта $x(t)$

Fig. 2. Determination of the complex trace from the real $x(t)$ input trace. The real component of the complex trace is equal to the $x(t)$ input trace and the imaginary part we ge by the Hilbert transform of the $x(t)$

Az időtartománybeli operátor vizsgálata

Mint már az előző részben láttuk, a Hilbert-transzformáció időtartománybeli végrehajtásához szükséges operátor $1/n$ szerint csökken. Ez a csökkenés igen lassú, ezért az ideális operátor igen hosszú lenne. Vizsgáljuk meg, hogyan változik meg az operátorhossz függvényében a levágott végű operátor átvitele. Az átvitelt vizsgáljuk az amplitúdó és a fázisspektrum segítségével. Ideális esetben az amplitúdóspektrumnak minden frekvencián egységnyinek, a fázisnak pedig $90°$-nak kellene lenni.

A q_n operátor Fourier-transzformáltját felírva rögtön láthatjuk, hogy a transzformációból a cos-os tagok kiesnek, a q_n függvény páratlansága miatt.



3. ábra. Időtartományban, véges pontszámú operátorral végzett Hilbert transzformáció átviteli függvénye. Az operátor félhossza az ábrán látható jelölések szerint: $a = 101$, $b = 31$, $c = 11$, $d = 7$, $e = 5$ pont

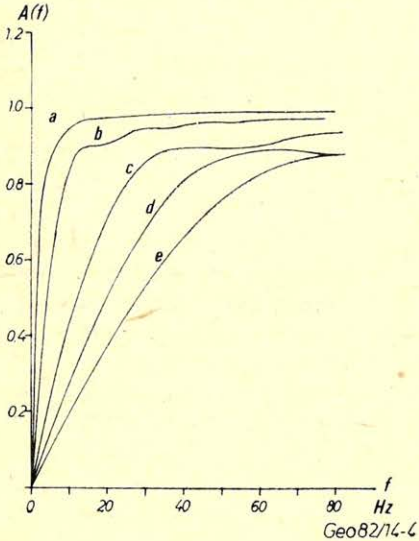
Рис. 3. Переходная функция преобразования Гильберта проведенного во временной области оператором с конечным числом точек. Половина длины оператора дана обозначениями на рисунке: $a = 101$, $в = 31$, $c = 11$, $д = 7$, $e = 5$ точек

Fig. 3. Transfer function of the time domain operator of the Hilbert transform, where the number of the operator elements is limited. The half lengths of the operators are: $a = 101$, $b = 31$, $c = 11$, $d = 7$, $e = 5$ samples

Ez tehát azt jelenti, hogy az operátornak a kívánt *90°*-os fázistolása az operátorhossz változásától függetlenül mindig fennáll. Probléma csak az amlitúdóspektrummal van.

A *3. ábrán* különböző operátorhosszak esetén láthatjuk a szűrő amplitúdóspektrumát. Vegyük észre, hogy az amplitúdóspektrum ingadozása olyan nagy, hogy az semmiképpen sem engedhető meg. Jellegzetes tünet, hogy az operátorhossz növelésével a torzulás nagysága nem csökken, csupán a frekvenciája nő, illetve a lecsengése gyorsabb.

A *4. 5.* és *6. ábrákon* látható esetekben az operátor végét nem egyszerűen levágtuk, hanem az operátorhossz csökkentését egy csonkítófüggvénnyel való beszorzás útján valósítottuk meg. Az ábrákon látható esetekben a csonkító-



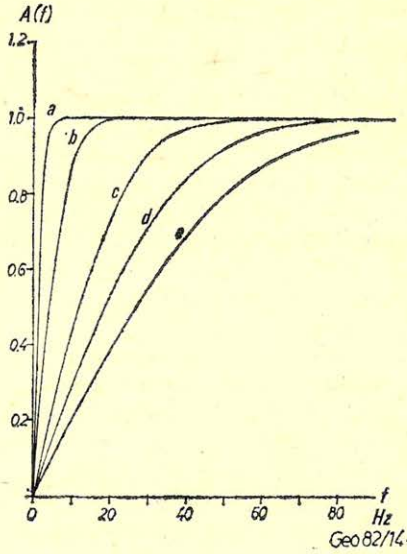
4. ábra. Háromszögfüggvénnyel csonkított operátor átviteli függvénye. A görbék jelölése megegyezik a 3. ábrán alkalmazottal. A csonkítófüggvény a következő alakú:

$$\left(1-\frac{|k|}{N}\right);\ (k=-N\ldots N)$$

Рис. 4. Переходная функция оператора срезанного треугольной зависимостью. Обозначения соответствуют обозначениям рисунка 3. Форма фильтра:

$$\left(1-\frac{|k|}{N}\right);\ k=-N\ldots N.$$

Fig. 4. Transfer function of the operator truncated by a triangular function. The signature of the curves is the same as on the Fig. 3. The truncating function is: $(1-|k|/N)$, where $k=-N,\ldots N$



5. ábra. Gauss-görbével csonkított operátor átviteli függvénye. A görbék jelölése megegyezik a 3. ábrán alkalmazottal. A csonkítófüggvény a következő alakú:

$$\exp\left(-0{,}3\,\frac{k^2}{N^2}\right);\ (k=-N\ldots N)$$

Рис. 5. Переходная функция оператора срезанного кривой Гаусса. Обозначения соответствуют обозначениям рисунка 3. Форма фильтра:

$$\exp\left(-0{,}3\,\frac{k^2}{N^2}\right);\ k=-N\ldots N.$$

Fig. 5. Transfer function of the operator truncated by a Gauss curve. The signature of the is the same as on the Fig. 3. The truncating function is:

$\exp(-0.3\cdot k^2/N^2)$, where $k=-N,\ldots N$

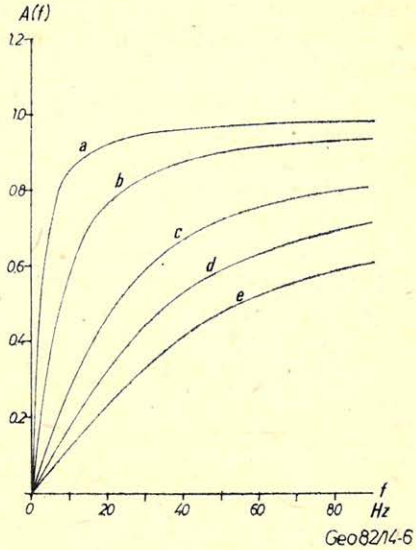
6. ábra. Exponenciális abszolútérték függvénnyel csonkított operátor átviteli függvénye. A görbék jelölése megegyezik a 3. ábrán alkalmazottal. A csonkítófüggvény a következő alakú:

$$\exp\left(-0{,}3\,\frac{|k|}{N}\right);\ (k = -N \ldots N)$$

Рис. 6. Переходная функция оператора срезанного экспоненциальной функцией в абсолютных значениях. Обозначения кривых соответствуют обозначениям рисунка 3. Форма фильтра

$$\exp\left(-0{,}3\,\frac{|k|}{N}\right);\ k = -N \ldots N.$$

Fig. 6. Transfer function of the operator truncated by an exponential absolute value function. The signature of the curves is the same as on the Fig. 3. The truncating function is: exp $(-0\,3|k|/N)$, where $k = -N, \ldots N$



függvények a következők voltak: háromszög függvény, Gauss-görbe és exponenciális abszolútérték függvény. Láthatjuk, hogy a Gauss-görbés csonkítás eredményezi a legkedvezőbb, legsimább lefutású átviteli függvényeket. Vegyük azonban észre, hogy ezek az átviteli függvények is igen torzak. A hiba az alacsony frekvenciákon a legnagyobb.

Ez az alacsonyfrekvenciás torzulás a szeizmikus felhasználás oldaláról nézve igen sajnálatos, kiküszöbölésére azonban nincsen mód. A hibát csökkenthetjük, ha elegendően hosszú operátort alkalmazunk.

A Hilbert transzformáció két felhasználása a szeizmikus időszelvények vizsgálatához

1. Reflexió erősség szelvény

A Hilbert-transzformációval előállított kvadratúra csatorna legegyszerűbb felhasználási módja a burkológörbe elkészítése. Mint már a dolgozat elején szó volt róla, ezt úgy állíthatjuk elő, hogy a bemeneti és a kvadratúra csatornát együtt egy komplex értékű csatornának tekintjük. A komplex értékű csatorna adatainak abszolút értékét képezve megkapjuk a bemeneti csatorna burkológörbéjét.

A burkológörbéket egy szelvény minden csatornájára kiszámítva egy „burkológörbe szelvényt" kapunk. Ezt a szelvényt reflexió erősség szelvénynek szokás nevezni.

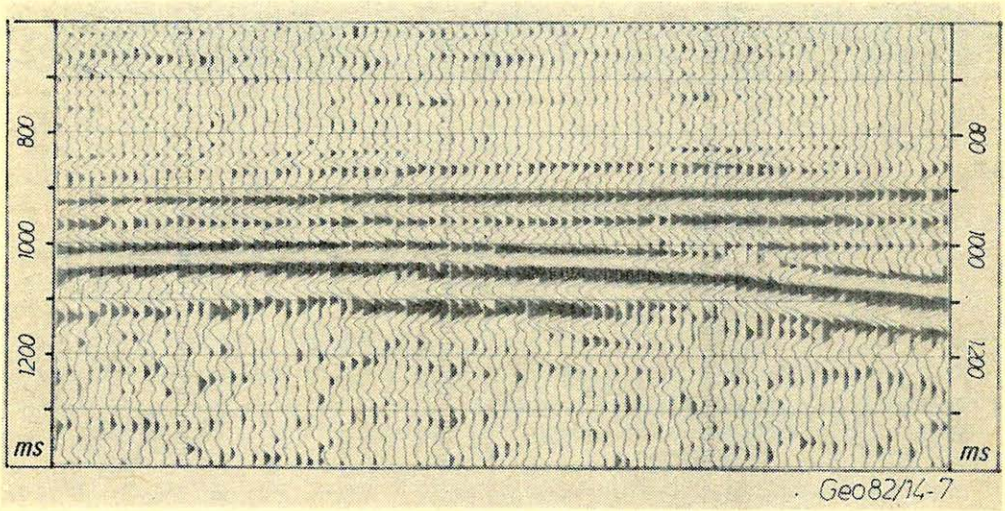
A szelvényt plotteren, a plotter adottságait megfelelően kihasználva, kirajzolva szemléletes képet kaphatunk a szelvény energiaviszonyairól.

Nézzük meg a következő példát. A *7. ábrán* egy szeizmikus időszelvény részlete látható. A *8. ábra* a szelvényszakasz csatornáiból készült kvadratúra csatornákat tartalmazza. Végül a *9. ábrán* a burkológörbék láthatók. Észrevehetjük, hogy a reflexió erősség szelvény sötét foltjai sokkal szembetűnőbben mutatják az energiaváltozásokat, mint az eredeti szelvény amplitúdói.

2. Pillanatnyi frekvencia szelvény

A cikk első részében már láttuk, hogy egy adott ω frekvenciájú jel esetén hogyan határozhatjuk meg a frekvenciát. Az eljárást a szeizmikus csatornákra is elvégezhetjük. Jelöljük a csatornát $x(t)$-vel, a hozzárendelt kvadratúra csatornát pedig $y(t)$-vel. Minden t időpontban kiszámíthatjuk a fázist:

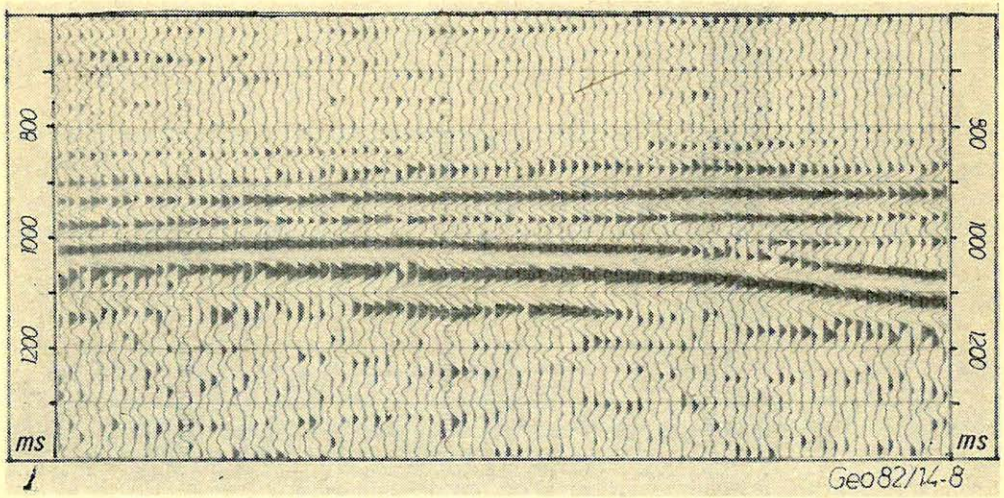
$$\Phi(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)$$



7. ábra. Bemeneti időszelvény

Рис. 7. Временной разрез на входе

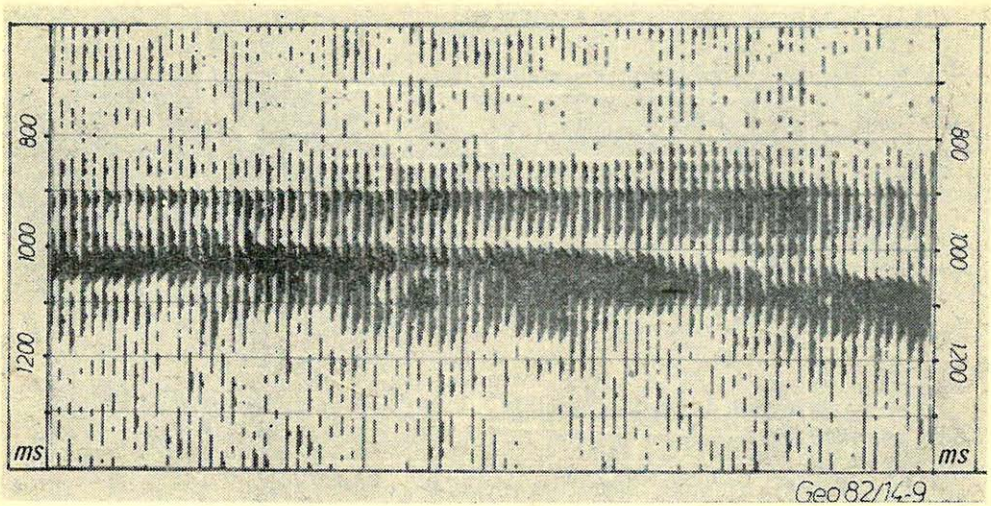
Fig. 7. Input section



8. ábra. A 7. ábrán látható szelvény Hilbert transzformáltja

Рис. 8. Преобразование Гильберта профиля рисунка 7

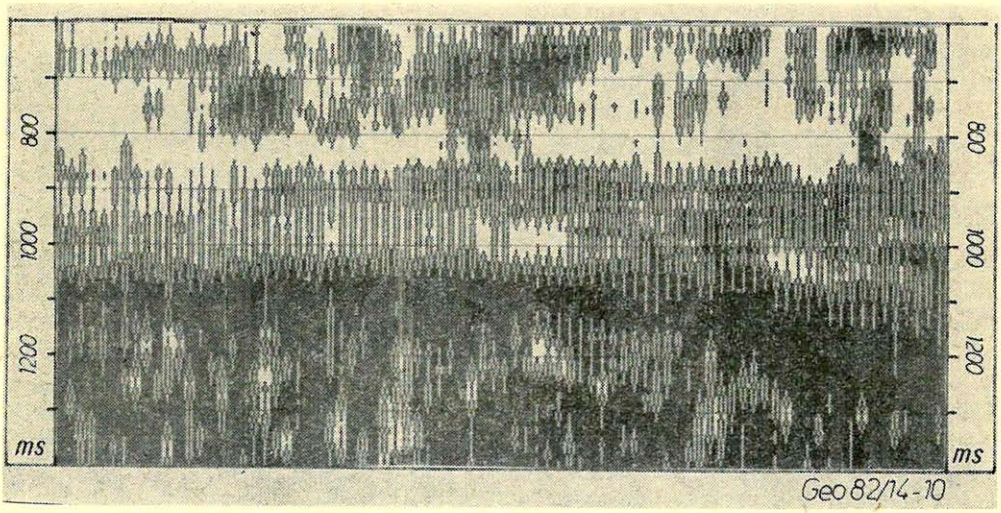
Fig. 8. Hilbert transform of the section shown on the Fig. 7



9. ábra. A 7. ábrán látható szelvény burkoló·görbéi. Ezt szokás reflexió erősség szelvénynek is nevezni

Рис. 9. Огибающие профиля рисунка 7. Обычно такой профиль называется разрезом интенсивности отражений

Fig. 9. Envelope curves of the section shown on the Fig. 7. This is the so called reflection magnitude section



10. ábra. A 7. ábrán látható szelvény pillanatnyi frekvenciái. Az ábrán a sötétebb árnyalat jelöli az alacsonyabb frekvenciákat

Рис. 10. Мгновенные частоты профиля рисунка 7. На рисунке темным оттенком обозначены более низкие частоты

Fig. 10. Instantaneous frequencies of the section shown on the Fig. 7. The darkness is connected to the decrease of the frequency

Az így kapott fázist a t időpillanatra jellemző, pillanatnyi fázisnak nevezzük. Ha feltételezzük, hogy a csatornán a frekvencia csak igen lassan változik, akkor a pillanatnyi fázisból a pillanatnyi frekvenciát is meghatározhatjuk:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \omega(t) + \omega'(t)\cdot t \approx \omega(t)$$

ugyanis a feltételezett lassú frekvenciaváltozás következtében $\omega'(t) \sim 0$ lesz.

Az $x(t)$ csatorna pillanatnyi frekvenciája a t időpillanatban tehát a következő lesz:

$$t = \frac{x(t)\cdot\frac{d}{dt}y(t) - y(t)\frac{d}{dt}x(t)}{x^2(t)+y^2(t)}.$$

Mivel a csatorna gyengébb energiájú helyein ez a meghatározás bizonytalan lehet, szokásos ezt az értéket a burkológörbe csatornával súlyozni és egy néhányszor *10 ms* hosszúságú időablakban simítani is. Ilyen súlyozott-átlagolt pillanatnyi frekvenciaszelvényt láthatunk a *10. ábrán*. Ez a szelvényrészlet is azonos a *7. ábrán* láthatóval.

Az ábrán az alacsonyabb frekvenciákat a sötétebb foltok jelölik. Ennek a fordított ábrázolásmódnak az az előnye, hogy így szembetűnőbbek a szelvényen található frekvenciacsökkenések. A tapasztalatok szerint ugyanis a szénhidrogének jelenléte a szeizmikus csatornák pillanatnyi frekvenciájának csökkenésével jár. Így a sötéttel jelölt helyek a reménybeli szénhidrogén-tárolókra hívhatják fel a figyelmet.

Természetesen nem szabad elfelejteni, hogy a frekvencia csökkenését egyéb tényezők is okozhatják. Legerősebb frekvenciacsökkentő magának a talajnak a szűrőhatása, a mélyebb szintekről érkező reflexiók mindig alacsonyabb frekvenciákat tartalmaznak a felszínhez közeli reflektáló rétegekről jövő jeleknél. Ezért az ilyen szelvények alsó része mindig fekete lesz.