

A frekvenciatartomány felhasználása gravitációs és mágneses térképek lineáris szűrésében

MESKÓ ATTILA*

A kétváltozós, digitális szűrők alkalmazása gravitációs és mágneses térképek átalakítására az utóbbi évtizedben a rutin feldolgozás szerves részévé vált.

A jelen dolgozat célja a frekvenciatartomány szerepének összefoglaló jellegű leírása. A frekvenciatartományt a szűrők hatásának leírásában, a szűrők tervezésében és a szűrés tényleges végrehajtásában egyaránt használhatjuk.

Az alapelvektől indulva, a kétváltozós Fourier transzformáció, kétváltozós diszkrét Fourier transzformáció (DFT), kétváltozós ciklikus és nem-ciklikus konvolúció ismertetése után megadjuk a szűrés elvégzésének módját a frekvenciatartományban.

A gravitációs és mágneses adatok feldolgozásában rendszeresen használt műveletek egy nagy csoportja lineáris, kétváltozós szűrésnek tekinthető. Levezetjük ezeknek a műveleteknek az átviteli függvényeit, többek között a lefelé és felfelé folytatások, a vertikális és horizontális deriváltak, a mágneses pólusra redukálás és a mágneses komponensek egymásba átszámításának átviteli függvényeit. Hangsúlyozzuk a gyakorlati megvalósításhoz szükséges változtatások szükségességét.

Az (átlagnégyzetes értelemben) optimális szűrők levezetésében hasznosíthatjuk a kétváltozós spektrumok értelmezését. Példaként a kétváltozós simítást és az optimalizált lefelé folytatást tárgyaljuk.

За последнее десятилетие применение цифровых фильтров в трансформации гравитационных и магнитных карт стало неотъемлемой частью производственной обработки материалов.

Целью настоящей работы является обобщающее описание роли области частот. Область частот применима в описании влияния фильтров, в проектировании фильтров и в конкретном проведении фильтрации. В статье, начиная с основных принципов, описываются дискретное преобразование Фурье (ДПФ), для двух переменных, являющаяся и нециклическая свертка для двух переменных, после чего дается метод проведения фильтрации в области частот. Большую группу систематически применяемых в обработке гравитационных и магнитных данных операций можно рассматривать как линейную фильтрацию с двумя переменными. Выводятся переходные функции этих операций, среди которых функции продолжений вниз и вверх, определения вертикальных и горизонтальных производных, пересчета полюс. Подчеркивается необходимость изменений, требуемых для внедрения этого на практике.

При выводе оптимальных (в среднеквадратичном понятии) фильтров можно использовать интерпретацию спектров двух переменных. В качестве примера приводится двух-переменное сглаживание и оптимальное продолжение вниз.

The application of two-dimensional digital filters to the transformation of gravity and magnetic data has become a standard tool of routine processing in the last decade.

The purpose of the present paper is to review the role of the frequency domain in describing, designing and implementing two-dimensional filters.

Starting with basic principles, such as the two-dimensional Fourier transform, two-dimensional digital Fourier transform (DFT), two-dimensional cyclic and non-cyclic convolutions, it describes the techniques, to be used in filtering in the frequency domain.

A large class of transformations, routinely used in the processing of gravity and magnetic data can be considered two-dimensional filters. The transfer functions of these transformations are derived, including continuations upwards and downwards, vertical and horizontal derivatives, reduction to the magnetic pole and transformations of magnetic field vector components to other components. The necessity of modifications for practical applicability is pointed out.

The interpretation of two-dimensional spectra may be used in deriving optimum filters (in the LMS sense). As examples, the two-dimensional optimum smoothing and continuations downwards with optimized operators are discussed.

* ELTE Geofizikai Tanszék

A frekvenciatartományt először különböző lineáris átalakítások hatásának leírására használták fel. *Dean* már 1958-ban levezette több művelet (pl. különböző deriválások, analitikai folytatások) átviteli függvényeit. Az átalakítások gyakorlati megvalósítása súlyozott összegzéssel történt. A művelet lényegét tekintve digitális konvolúció és szintén egyértelműen jellemezhető átviteli függvényével. Ez lehetőséget teremtett arra, hogy az elvi műveletek és a gyakorlati (közelítő) megvalósításuk viszonyát objektív és végleges módszerrel tisztázzák. Az átviteli függvények összehasonlítása modelterek vagy mért adatokból szerkesztett térképek kísérleti átalakításaitól függetlenül eldöntötte, hogy különböző frekvenciákon mennyire jó közelítés érhető el. Másrészt a frekvenciatartomány és tértartomány közötti kapcsolat alapján, valamilyen kívánatos átvitel előírása után, a súlyozott összegzésben szerepeltetendő együtthatók is meghatározhatók.

Nyilvánvaló előnyei ellenére a lineáris szűrés tudatos alkalmazását a gyakorlati kutatás csak mintegy 10 évvel később, az 1960-as évek végén kezdte el. Magyarország az elsők között volt és ezt a nemzetközi szakirodalom még most is gyakran nyugtázza. (*Nettleton 1976, p. 168–169, Kulhánek, 1976, p. 148–149* etc.)

A jelenlegi gyakorlatban a szűrést a tértartományban, digitális konvolúció számításával végzik. Nagy adatrendszerek esetén gyorsabban végrehajtható a művelet a frekvenciatartományban. A két lehetőség közötti választás attól is függ milyen algoritmusok vagy hardware áll rendelkezésre a kétváltozós diszkrét Fourier-transzformált számítására. Mivel a tértartományban végzett szűrésről magyar nyelven is több publikáció jelent meg (*Meskó, 1966, Meskó–Kovács, 1972*) a jelen dolgozatban elsősorban, bár nem kizárólag, a frekvenciatartományban végzett szűrést tárgyaljuk.

A kétváltozós Fourier-analízist és a különböző spektrumok felhasználását a gyors Fourier-transzformációs (*FFT*) algoritmusok tették lehetővé.

Ezek az 1960-as évek végén jelentek meg. Az egyváltozós művelet gyors végrehajtásának módját leíró első és alapvetőnek tekintett publikáció *J. M. Cooley* és *J. W. Tukey* munkája volt 1965-ben. Ezt követően számos dolgozat vizsgálta az *FFT* tulajdonságait, különböző változatait. Majd megépítették az első hardware *FFT* egységét (1968). Jelenleg a geofizikai feldolgozó centrumok csaknem kivétel nélkül képesek az egy- és többváltozós diszkrét Fourier-transzformáció gyors elvégzésére.

Az 1980-as években a kis számítógépek memória-kapacitása, műveleti sebessége és a könnyen csatlakoztatható háttér memória (például mágnesszalag) lehetővé teszik az *FFT* rendszeres, gazdaságos számítását ilyen, viszonylag könnyen hozzáférhető eszközökkel is.

A spektrumok a szűréstől függetlenül is hasznosíthatók. A gravitációs és mágneses térképek adatrendszereiből számított amplitúdóspektrumok vagy teljesítményspektrumok felhasználhatók a hatók mélységének (tető és talpmélység mágnesezett hatók esetén, sűrűség ugrás felület mélysége gravitációs anomáliák esetén) vagy más jellemző mennyiségeknek (regionális és rendezetlen zaj relatív nagysága) a meghatározására. A módszerek lényegében az 1970-es években alakultak ki (*Spector és Bhattacharyya, 1967, Naidu, 1970, Spector és Grant, 1970; Spector, 1971, Syberg, 1972, Bhattacharyya és Leu, 1975, 1977* stb.). A magyar nyelvű szakirodalomban ezekről a módszerekről és alkalmazásuk eredményeiről

viszonylag kevés közlemény jelent meg. Az alapokat tartalmazza *Kis és Meskó (1980)* egyetemi jegyzete.

Végül a frekvenciatartomány felhasználása lehetővé teszi különböző hatók gravitációs és mágneses terének gyors számítását is. Ez az alkalmazás kevésbé kézenfekvő, mint a szűrőtervezésben vagy a hatók paramétereinek becslésében való felhasználás, de potenciálisan talán a legfontosabb. A geológiai értelmezéshez ugyanis – bármilyen módszert is alkalmazunk a továbbiakban – szükségünk van arra, hogy tetszőleges alakú, esetleg változó sűrűségeloszlású vagy változó mágnesezettségű hatók terét gyors és elegendő pontos módszerrel számítani tudjuk.

A javasolt módszer elve egyszerű: a hatót tömegpontokkal (gravitációs tér számításakor), illetve dipólokkal (mágneses tér számításakor) helyettesítjük. A tömegpont gravitációs terének, illetve a dipól mágneses potenciáljának Fourier-transzformáltja ismert és egyszerű alakú. A teljes ható terének, illetve potenciáljának spektruma a tömegpontok, illetve dipólok járulékaiknak összege. A spektrumok ismeretében pedig más mennyiségek is levezethetők. Például abban az esetben, ha a mágneses potenciál spektrumát határoztuk meg, az inverz Fourier-transzformált a potenciált adja és annak különböző irányú deriváltjait képezve kapjuk a tér különböző komponenseit. Vertikális derivált adja a vertikális irányú összetevőt, indukált mágnesezettséget feltételezve és a földi mágneses tér irányába eső deriváltat számítva kapjuk a totális tér nagyságát stb. Megjegyzendő, hogy a deriválások is elvégezhetők a frekvenciatartományban és ez a számításhoz szükséges időt szintén csökkenti.

A jelen dolgozat az előzőekben vázolt három alkalmazási terület közül a szűrésről kíván átfogó képet adni. Ahogyan erre már utaltunk, a kis számítógépek teljesítőképességének növekedése a közeljövőben lehetővé teszi a módszerek széles körű alkalmazását. A dolgozat többek között, ennek előkészítését kívánja szolgálni.

A frekvenciatartományt lineáris szűrés gyakorlati végrehajtásában, lineáris átalakítások analízisében és szűrők tervezésében használhatjuk fel.

Az első, természetesen adódó alkalmazás ismertetését használjuk fel a későbbiekben is szükséges matematikai ismeretek összefoglalására.

1. Kétváltozós lineáris szűrés végrehajtása a frekvenciatartományban

Bár a gyakorlatban szükségképpen kétváltozós digitális szűrőket használunk, a legfontosabb definíciókat először folytonos változókra adjuk meg.

Kétváltozós energiajelnek nevezzük a $g(x, y)$ jelet, ha a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy \quad (1)$$

integrál véges értékű. Amikor a jel valós, az abszolútérték képzés elhagyható. A továbbiakban ezt mindig feltételezzük.

Az energiajel mindig létező kétváltozós Fourier-transzformáltja

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy = G(f_x, f_y). \quad (2)$$

Az új f_x és f_y változók – mivel esetünkben x és y hosszúság dimenziójúak – a távolságegységre eső ciklusok számát adják meg az x , illetve y tengely mentén.

Az f_x és f_y változókat térbeli frekvenciának fogjuk nevezni. A szakirodalomban előfordul még a hullámszám elnevezés is. Az új változók dimenziója: [hosszúság]⁻¹ és rendszerint a km⁻¹ egységet használjuk.

Egy (f_x, f_y) pár a frekvenciasík egy pontját adja. A (2) lineáris integrál-transzformáció magfüggvénye $\exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)]$ komplex harmónikus síkhullámmal szemléltethető. Mind a valós rész, mind a képzetes rész olyan síkhullám, melynek tengelyek mentén mért frekvenciái f_x , illetve f_y . A szemléletes leírásból adódik, hogy f_x és f_y látszólagos frekvenciák, míg a síkhullám úgynevezett valódi frekvenciája

$$f_r = (f_x^2 + f_y^2)^{1/2}.$$

A hullámnormális φ iránya pedig

$$\varphi = \arctg\left(\frac{f_y}{f_x}\right).$$

Az energiajel, kétváltozós Fourier-transzromáltjából inverz Fourier-transzformációval visszaállítható. Bizonyos, a geofizikában használt $g(x, y)$ függvényekre mindig teljesülő feltételek esetén

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(f_x, f_y) e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y. \quad (3)$$

Kétváltozós energiajelek konvolúcióját a

$$g(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v) h(x-u, y-v) du dv \quad (4)$$

integrál definiálja.

A kétváltozós konvolúció additív, kommutatív és disztributív művelet. Érvényesek továbbá a függvények, illetve spektrumaik közötti kapcsolatokat kifejező, konvolúció tételek néven ismert összefüggések

$$\mathcal{F}\{g(x, y) * h(x, y)\} = G(f_x, f_y) H(f_x, f_y) \quad (5)$$

és

$$\mathcal{F}\{g(x, y) h(x, y)\} = G(f_x, f_y) * H(f_x, f_y). \quad (6)$$

A konvolúcióképzésnek egy fontos speciális esete körszimmetrikus függvények konvolúciójának számítása. Mindkét tartományban áttérve polárkoordinátákra az ismert

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

$$f_x = f_r \cos \varphi, \quad f_y = f_r \sin \varphi$$

helyettesítésekkel, a (4) konvolúció így alakul

$$g(r, \alpha) * h(r, \alpha) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g(u) h(v) u d\alpha du, \quad (7)$$

melyben

$$v^2 = r^2 + u^2 - 2ur \cos \alpha.$$

A körszimmetrikus esetben a kétváltozós Fourier-transzformáció egyváltozós, zérusrendű Hankel-transzformációra egyszerűsödik és a konvolúció tételek az (5) és (6) helyett az egyszerűbb

$$\mathcal{F}\{g(r) * h(r)\} = G(f_r) H(f_r), \quad (8)$$

$$\mathcal{F}\{g(r) h(r)\} = G(f_r) * H(f_r) \quad (9)$$

alakba írhatók. A (8) egyenlet azt fejezi ki, hogy körszimmetrikus függvények konvolúciója is körszimmetrikus marad. Mindkét felírt kapcsolatnak lényeges gyakorlati következményei vannak. Ha a (8)-ban $g(r)$ körszimmetrikus bemeneti függvény és $h(r)$ egy szintén körszimmetrikus szűrő súlyfüggvénye, a kapcsolat szemléletesen úgy fogalmazható, hogy körszimmetrikus (irányfüggetlen) szűrő alkalmazása nem változtatja meg a bemeneti függvény irányfüggetlenségét.

A másik egyenlet, (9) a kétváltozós csonkítófüggvényekkel kapcsolatos megjegyzést tesz indokolttá. Amikor az eredeti súlyfüggvény és az alkalmazott csonkítófüggvény egyaránt körszimmetrikus, akkor a művelet átviteli függvénye is ilyen marad, a csonkítófüggvény alkalmazása után is. Mindkét megfigyelésre több gyakorlati példát fogunk majd adni a kétváltozós szűrők tárgyalása során.

A kétváltozós keresztkorrelációs, illetve autokorrelációs függvények definíciói:

$$\varphi_{gh}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) h(x+u, y+v) dx dy, \quad (10)$$

$$\varphi_{gg}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) g(x+u, y+v) dx dy. \quad (11)$$

Az autokorrelációs függvény rendelkezik a következő szimmetriatulajdonsággal

$$\varphi_{gg}(u, v) = \varphi_{gg}(-u, -v). \quad (12)$$

Ez például a $\varphi_{gg}(u, v)$ szemléletes jelentéséből rögtön látható. Az u és v eltolásokat jelentenek és ha egyszerre változtatjuk meg u és v előjelét az eltolás azonos egyenes mentén, ellentétes irányban történik. Mivel a „helyben maradó” és „eltolt” függvények azonosak, az ellentétes irányú eltolás nem változtatja meg a szorzatot, sem annak integrálját.

Az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja a $g(x, y)$ energiasűrűség spektrumát adja. A (11) ugyanis konvolúció képzést ír elő az eredeti és mindkét változója szerint „megfordított” függvény között:

$$\varphi_{gg}(u, v) = g(x, y) * g(-x, -y).$$

Az előjel cserék a Fourier-transzformáltban komplex konjugált képzésének felelnek meg. Így az (5) konvolúció tétellel valóban arra jutunk, hogy

$$\mathcal{F}\{\varphi_{gg}(u, v)\} = G(f_x, f_y) \overline{G(f_x, f_y)} = |G(f_x, f_y)|^2. \quad (13)$$

Hasonló jellegű kapcsolat a keresztkorreláció Fourier-transzformáltjára

$$\mathcal{F}\{\varphi_{gh}(u, v)\} = G(f_x, f_y) \overline{H(f_x, f_y)}. \quad (14)$$

A kétváltozós lineáris szűrő a $g_{be}(x, y)$ bemenetből a

$$g_{ki}(x, y) = s(x, y) * g_{be}(x, y) \quad (15)$$

kétváltozós konvolúcióval állítja elő a kimenetet. Az $s(x, y)$ a kétváltozós súlyfüggvény, melyet gyakran kétváltozós impulzusválasznak is neveznek.

A frekvencia tartományban a bemenet és kimenet Fourier-transzformáltjai közötti kapcsolat

$$G_{ki}(f_x, f_y) = S(f_x, f_y) G_{be}(f_x, f_y). \quad (16)$$

Az $S(f_x, f_y)$ – a súlyfüggvény Fourier-transzformáltja – az átviteli függvény vagy frekvenciaválasz-függvény. Ennek abszolút értéke az amplitúdó-karakterisztikát, fázisa a fáziskarakterisztikát definiálja:

$$A(f_x, f_y) = |S(f_x, f_y)|, \quad (17)$$

$$\Phi(f_x, f_y) = \arctg \frac{\text{Im}[S(f_x, f_y)]}{\text{Re}[S(f_x, f_y)]}. \quad (18)$$

Az esetek többségében valós $S(f_x, f_y)$ megvalósítására törekszünk. Néhány kivétel is van, például az ún. „pólusra redukálás” művelete. Amikor $S(f_x, f_y)$ nemcsak valós, de mindig pozitív értékű is, az amplitúdó-karakterisztika megegyezik az átviteli függvénnyel, a fáziskarakterisztika azonosan zérus.

Az egyváltozós szűrők átviteli tulajdonságai között nem szereplő, csupán két változó jelenlétében fellépő tulajdonság az átvitel irányfüggősége. Az átvitel irányfüggetlen, ha az átviteli függvény körszimmetrikus, azaz

$$S(f_x, f_y) = S(f_r). \quad (19)$$

Az alkalmazott átalakítások egy részében az irányfüggetlen átvitel lényeges, kívánatos tulajdonság. Az ettől való eltérés jellemzésére a rögzített f_r értékekhez tartozó, a frekvenciasíkon változó irányszög függvényeként kapott görbék sorozatát használhatjuk.

$$I_k(\varphi) = S(f_r = f_k, \varphi). \quad (20)$$

Már most meg kell jegyezni, hogy körszimmetrikus folytonos súlyfüggvény mintáihoz tartozó tényleges átviteli függvény jelentős irányfüggést mutathat. A mintavételezendő súlyfüggvény irányfüggetlensége nem elégséges feltétele az irányfüggetlen átvitelnek.

Az alapvető szűrési változatok a felülvágó, alulvágó, sáváteresztő és sáv-vágó szűrők. Az utóbbi három a felülvágóból egyszerűen levezethető. Emiatt elegendő ha a felülvágóval foglalkozunk.

Az ideális, zérus fáziskarakterisztikájú és irányfüggetlen felülvágó szűrő átviteli függvénye

$$S(f_r) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |f_r| < f_c \\ 0, & \text{ha } |f_r| > f_c \end{cases}. \quad (21)$$

Kétváltozós, de irányfüggetlen frekvenciafüggvények inverz Fourier-transzformáltja egyváltozós Hilbert-transzformáltra egyszerűsödik. A (21) inverz Hankel-transzformáltja

$$s(r) = \frac{f_c}{r} J_1(2\pi f_c r). \quad (22)$$

$J_1(x)$ elsőrendű Bessel-függvény. Mivel a súlyfüggvény körszimmetrikus, egyetlen görbével illusztrálható. A teljes súlyfüggvényt úgy kapjuk, hogy a görbét az (x, y) síkra merőleges, az origón áthaladó tengely mentén forgatjuk. Ha a görbének csak az origó egyik oldalára eső felét tekintjük, a forgatással teljes kört kell leírni.

A súlyfüggvény lassan csökken. Mivel minden gyakorlati alkalmazásban véges hosszúságú súlyfüggvénnyel kell megelégednünk, az ideális felülvágót is csonkítani kell. Az egyik lehetőség nyilván az

$$s_m(r) = \begin{cases} \frac{f_c}{r} J_1(2\pi f_c r), & \text{ha } |r| \leq r_0 \\ 0, & \text{ha } |r| > r_0 \end{cases} \quad (23)$$

módosítás, a súlyfüggvény előírt, r_0 távolságon túli részének egyszerű elhagyása. Hátránya ennek a megoldásnak, hogy mind az áteresztett sávban, mind az eltávolítandó sávban oszcilláló átvitelt kapunk. A ténylegesen megvalósuló átvitel ugyanis ekkor az eredeti (22)-vel megadott súlyfüggvény és a

$$w(r) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |r| \leq r_0 \\ 0, & \text{ha } |r| > r_0 \end{cases} \quad (24)$$

csonkítófüggvény Fourier-transzformáltjainak konvolúciója. Az utóbbi ismét Hankel-transzformációval kapható

$$W(f_r) = \frac{r_0}{f_r} J_1(2\pi f_r r_0). \quad (25)$$

A csonkítás után megvalósuló átviteli függvény,

$$S_m(f_r) = S(f_r) * W(f_r) \quad (26)$$

pedig, bár az $S(f_r)$ szerint simítva és módosított formában, de tükrözi a $W(f_r)$ oszcillációinak hatását. Az r_0 növelése az oszcillációkat sűrűbbé teszi, de amplitúdójukat kevésbé csökkenti. Még igen hosszú súlyfüggvények esetén is megmarad ez a nem kívánatos jelleg.

Kedvezőbb – bár kevésbé meredek levágású – átviteli függvényekhez jutunk, ha más, a (24)-től eltérően, az eredeti súlyfüggvényt a megtartott részen belül is módosító csonkítófüggvényeket alkalmazunk. Néhány, a szakirodalomban javasolt csonkítófüggvényt ad meg az *I. táblázat*.

A levágási meredekség csökkenése, átmeneti sáv kialakulása az az ár, amit az oszcillációk csökkenéséért fizetnünk kell. Mivel gyakorlati alkalmazásban a meredek levágás többnyire nem lényeges, esetleg éppen elkerülendő, mindig ajánlatos ablakfüggvény használata.

A csonkítás miatt fellépő oszcillációk csökkentésének egy másik lehetséges módja olyan felülvágó alkalmazása, mely eleve igen gyorsan csökkenő súlyfüggvénnyel rendelkezik. Nyilvánvaló, hogy az origótól elég távol eső részek elhagyása, ahol az $s(r)$ már nagyon kicsiny, kevésbé befolyásolja a tényleges, közvetlen csonkításnak megfelelő átvitelt. Egy példa erre az ablakfüggvények között is felsorolt Gauss-féle alak.

Amikor az átviteli függvény

$$S(f_r) = e^{-(kf_r)^2}, \quad (27)$$

Néhány gyakran alkalmazott kétváltozós ablak
 Несколько часто применяемых двухразмерных окон
 Some often applied two dimensional windows

1. Egyszerű csonkítás	$w_0(r) = 1, \text{ ha } r < R$ $= 0, \text{ ha } r > R$
2. Bartlett	$w(r) = \left(1 - \frac{ r }{R}\right) w_0(r)$
3. Hanning	$w(r) = \left(0,5 + 0,5 \cos \frac{\pi r}{R}\right) w_0(r)$
4. Hamming	$w(r) = \left(0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi r}{R}\right) w_0(r)$
5. Gauss	$w(r) = e^{-\left(\frac{kr}{R}\right)^2} w_0(r)$
6. Bessel	$w(r) = \frac{J_0(\pi r \Delta k)}{1 - \left(\frac{2\pi r \Delta k}{\alpha}\right)^2} w_0(r)$

(Δk az átmeneti sáv szélessége,
 $\alpha = 4,8096 \dots = J_0(x)$ első gyökhelye)

az inverz Hankel-transzformációval kapható súlyfüggvény

$$s(r) = \frac{\pi}{k^2} e^{-\left(\frac{\pi r}{k}\right)^2} \quad (28)$$

lesz. A szűrő $-3dB$ -es pontja (az a frekvencia, ahol az átvitel az $f_r = 0$ origóban felvett érték felére csökken).

$$f_c = \frac{(\ln 2)^{1/2}}{k} = \frac{0,8325}{k}$$

A súlyfüggvény f_c felhasználásával így is írható

$$s(r) = \frac{\pi f_c^2}{\ln 2} e^{-\frac{\pi^2}{\ln 2} (f_c r)^2}$$

A gyors csökkenés jól látszik abból, hogy az $r = 1/f_c$ távolságban a súlyfüggvény már az origóban felvett értékének közelítőleg ezredrészére csökken. A gyakorlatban is jól bevált az a becslés, hogy a Gauss-féle kétdimenziós felülvágó szűrő mérete a levágási frekvencia reciproka. Megjegyzendő, hogy a megállapítás azt is tartalmazza, hogy az átérésztett sáv méretének csökkenése (f_c csökkenése) a súlyfüggvény növelését igényli (azonos jóságú közelítés megvalósulásához). Konkrét példákat is adunk. Amikor $f_c = 1/18 \text{ km}$ a súlyfüggvény kívánatos hossza (minden irányban) 18 km . Ez elég nagy méret. Amikor azonban megelégedhetünk az $f_c = 1/9 \text{ km}$ levágási frekvenciával, már minden irányban feleakkora, 9 km méret is kielégítően nagy.

A (27) alakú átviteli függvénynek más, kedvező tulajdonságai is vannak. Mivel a (2) alakú felülvágót, illetve az abból levezetett alulvágót az utóbbi 15 évben rendszeresen használták Bouguer-gravitációs anomáliatérképek regionális, illetve a reziduális komponenseinek számítására és mind az elméletről, mind pedig az alkalmazás eredményeiről és tapasztalatairól több közlemény jelent meg, további részletezéstől eltekintünk.

A tényleges számításokban használható adatrendszerhez a folytonos függvény mintavételezésével jutunk. A kétváltozós függvényt a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - kx_0, y - ly_0)$$

mindkét irányban végtelen Dirac- δ sorozattal szorozva, a Dirac- δ kiválasztási tulajdonságának megfelelően megőrizzük a $g(kx_0, ly_0)$, (kx_0, ly_0) helyeken felvett értékeket, mivel

$$g(x, y) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - kx_0, y - ly_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(kx_0, ly_0) \delta(x - kx_0, y - ly_0). \quad (29)$$

A (29) jobb oldala a g_{kl} digitális adatrendszer egy lehetséges felírása. A digitális adatrendszer spektruma a konvolúció tétel szerint az eredeti $g(x, y)$ folytonos spektrumának, $G(f_x, f_y)$ -nak és a mindkét irányban végtelen Dirac- δ sorozat spektrumának a konvolúciója. Felhasználva, hogy a Dirac-sorozat spektruma egy ugyancsak mindkét irányban végtelen, de most $1/x_0$, $1/y_0$ távolságonként elhelyezkedő és $1/x_0 y_0$ „amplitúdójú” impulzusok sorozata, a digitális adatrendszer spektruma így alakul

$$\begin{aligned} G_d(f_x, f_y) &= G(f_x, f_y) * \frac{1}{x_0 y_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_x - \frac{k}{x_0}, f_y - \frac{l}{y_0}\right) \\ &= \frac{1}{x_0 y_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} G\left(f_x - \frac{k}{x_0}, f_y - \frac{l}{y_0}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

A spektrum periódikus, az

$$|f_x| < \frac{1}{2x_0}, \quad |f_y| < \frac{1}{2y_0} \quad (31)$$

négyszögön (az összegzés után) kapott értékek ismétlődése a teljes frekvenciasíkon. A (31) négyszöget a kétváltozós Nyquist-intervallumnak nevezzük.

Amikor a folytonos függvény spektruma zérus a Nyquist-intervallumon kívül, azaz

$$\begin{aligned} G(f_x, f_y) &= 0, \quad \text{ha} \quad |f_x| > \frac{1}{2x_0}, \\ &\text{vagy} \quad |f_y| > \frac{1}{2y_0}, \end{aligned} \quad (32)$$

a $G_d(f_x, f_y)$ periódikus spektrum egy periódusa arányos az eredeti spektrummal a Nyquist-intervallumban. Ezen kívül természetesen döntő a különbség, mert a

folytonos függvény spektruma zérus, a digitális adatrendszeré pedig periodikusan ismétlődik.

A (32) követelmény a kétváltozós mintavételi szabály. A digitális adatrendszer spektruma lényegében (az $1/x_0 y_0$ értékű konstans szorzótól eltekintve) azonos az eredeti függvény spektrumával, ha a mintavételezés eléggé sűrű. Eléggé kicsiny x_0 és y_0 ugyanis azt jelenti, hogy reciprokuk fele már magában tudja foglalni a spektrum teljes nem-zérus részét.

Az 1. ábra a túlságosan nagy, megfelelő és feleslegesen sűrű mintavételezést illusztrálja. A folytonos vonal a spektrum határát jelzi. Amikor x_0 vagy(és) y_0 túlságosan nagy az $1/2x_0$, $1/2y_0$ értékekhez tartozó egyenesek belemetszenek a spektrumba, a (3)-ban előírt összegzés torzulást okoz. A kétváltozós esetben egy új szempont vetődik fel: az eredetileg irányfüggetlen spektrumot a nem megfelelő mintavételezés jelentős irányfüggést mutató spektrummá teheti.

A 2. ábra ezt a jelenséget illusztrálja a

$$g(r) = e^{-\pi r^2}; \quad G(f_r) = e^{-\pi f_r^2}$$

transzformált pár segítségével. A kétváltozós digitálisjel

$$g_{kl} = e^{-\pi[(kx_0)^2 + (ly_0)^2]}$$

spektruma lényegesen eltérhet a folytonos $g(r)$ körszimmetrikus Fourier-transzformáltjától, ha x_0 és y_0 túlságosan nagy értékűek.

Amikor a mintavételi szabályt betartottuk, a digitális adatrendszerből a folytonos függvény visszaállítható. A digitális spektrum Nyquist-tartományba eső részét ($x_0 y_0$ -val szorozva, a Nyquist-tartományon túli részeket eltávolítva visszakapjuk a folytonos függvény spektrumát. A frekvenciatartományban alkalmazandó szorzó $x_0 y_0$ nagyságú négyszög

$$N_2(f_x, f_y) = x_0 y_0 \cdot \left. \begin{array}{l} \text{amikor } |f_x| \leq \frac{1}{2x_0} \\ \text{és } |f_y| \leq \frac{1}{2y_0} \end{array} \right\} \quad (33)$$

$$= 0 \quad \text{minden más argumentumra}$$

A négyszög inverz Fourier-transzformáltja adja azt a tértartományban alkalmazandó függvényt, mellyel konvolválni kell a digitális adatrendszert. A kétváltozós négyszög inverz Fourier-transzformáltja

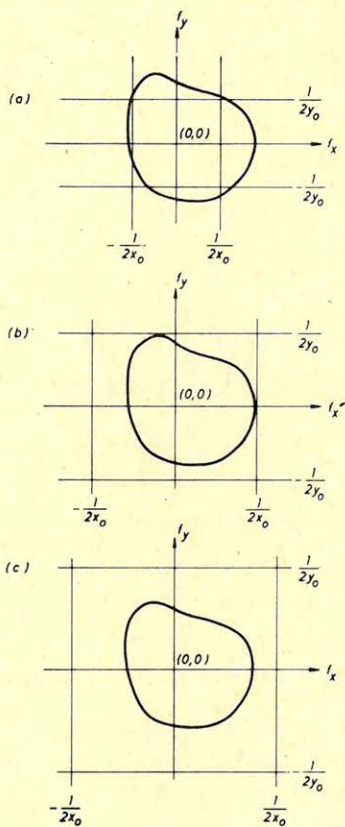
$$\mathcal{F}^{-1}\{N_2(f_x, f_y)\} = \text{sinc}\left(\frac{x}{x_0}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{y_0}\right). \quad (34)$$

A konvolúció eredménye pedig a (29) felhasználásával

$$g_v(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(kx_0, ly_0) \text{sinc}\left(\frac{x}{x_0} - k\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{y_0} - l\right). \quad (35)$$

Az alsó indexben szereplő v arra utal, hogy a művelet eredménye, a visszaállított függvény nem szükségképpen azonos az eredeti $g(x, y)$ -nal. Az egyenlőség szükséges feltétele a mintavételi tétel, (32) betartása.

Megjegyzendő, hogy a visszaállítás mindenképpen közelítő, hiszen az összegzésben nem tudunk végtelen sok tagot szerepeltetni. Mindenesetre a szükséges feltétel teljesülése esetén a (35) tetszőleges pontosságú visszaállítást lehetővé tesz. A gyakorlatban az elvileg helyes, mindkét irányban sinc függvény alakú visszaállítás helyett valamilyen ablakfüggvénnyel módosított és véges hosszúságúra csonkított változatot használunk. Mód van arra is, hogy az adatrendszer spektrumának megfelelő optimalizált visszaállítást alkalmazzunk. Ezzel a műveletek számának jelentős csökkenése érhető el, bár ennek „ára” az, hogy már elvileg sem az eredeti $g(x, y)$ függvényt, hanem annak valamilyen simított változatát kapjuk meg. Bármilyen módosított visszaállítást is használjunk azonban,



Модель R

Geo 83/26-1

1. ábra. A kétváltozós mintavételi tétel

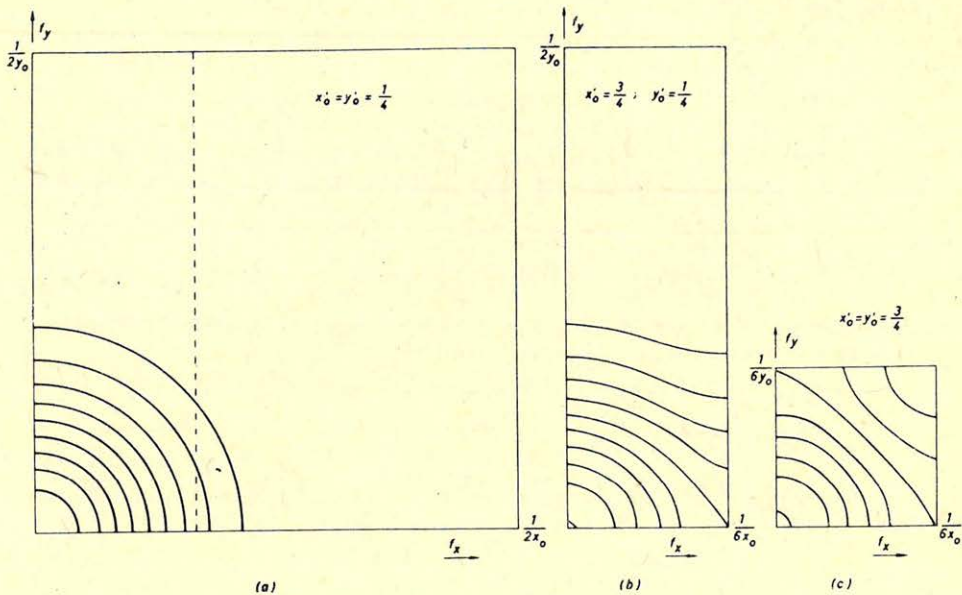
A mintavételi távolságok (a) túl nagyok, a spektrum torzul, (b) megfelelőek, (c) a szükségesnél kisebbek

Рис. 1. Теорема квантования для двух переменных

Шаг квантования: (a) очень большой, спектр искажается (б) соответствующий (в) меньше необходимого

Fig. 1. The sampling theorem in two dimension.

The sampling distances are (a) too large (the spectrum is distorted by aliasing), (b) sufficient, (c) both x_0 and y_0 are smaller than necessary



Habár k.

Geo 83/26-2

2. ábra. Irányfüggés kialakulása kétváltozós mintavételezés során
 (a) elegendően kicsiny x_0 és y_0 (nincsen torzulás), (b) az x irányú mintavételi távolság túl nagy,
 (c) mindkét mintavételi távolság túl nagy

Рис. 2. Появление зависимости от направления при квантовании двух переменных
 (а) достаточно маленькие x_0 и y_0 (нет искажения) (б) шаг квантования в направлении x очень большой (в) шаг квантования очень большой в обоих направлениях

Fig. 2. Directional distortions due to two-dimensional sampling (a) sufficiently small x_0 and y_0 (no distortions), (b) sampling interval in the direction x is too large, (c) both sampling intervals are too large (severe distortions)

a művelet eredményességének előfeltétele a mintavételi tétel betartása a digitális adatrendszer előállításánál.

A visszaállítás speciális esete az interpolálás. Nyilvánvaló, hogy (25) segítségével a $g(kx_0, ly_0)$ adatok alapján g_v tetszőleges (x, y) helyen megkapható.

A digitális adatrendszer Fourier-transzformáltja a (29) és a Dirac- δ kiválasztási tulajdonságának felhasználásával:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(kx_0, ly_0) \delta(x - kx_0, y - ly_0) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(kx_0, ly_0) e^{-j2\pi(f_x kx_0 + f_y ly_0)}. \quad (36)$$

A levezetésben a folytonos függvényre semmilyen hivatkozás nem szerepel. A spektrumból azonban így is kitűnik, hogy az f_x irányban $1/x_0$, az f_y irányban $1/y_0$ a periódus hossza. Például az f_x -hez $1/x_0$ -t adva könnyen látható, hogy azo-

nos értékhez jutunk, mintha f_x -et nem változtattuk volna:

$$e^{-j2\pi\left(f_x + \frac{1}{x_0}\right)kx_0} = e^{-j2\pi f_x k x_0} e^{-j2\pi k} = e^{-j2\pi f_x k x_0}$$

Általában az írható, hogy

$$G_d(f_x, f_y) = G_d\left(f_x + \frac{n}{x_0}, f_y + \frac{m}{y_0}\right), \quad (37)$$

melyben n és m tetszőleges egész.

A $G_d(f_x, f_y)$ periodikus, folytonos frekvenciafüggvény. Ennek oka az, hogy az adatrendszer méretére nem tettünk megkötést, elvileg mindkét irányban végtelen sok mintánk van. Amikor a minták véges számát is figyelembe vesszük, a Fourier-transzformált is csak véges sok mintát fog tartalmazni.

Gyakori egyszerűsítés a dimenziótlan frekvenciaváltozók bevezetése. Ezeket az eredeti változó és a megfelelő irányban érvényes mintavételi távolság szorzata definiálja

$$f'_x = f_x x_0, \quad f'_y = f_y y_0. \quad (38)$$

A mintákat ismét az egyszerűség kedvéért g_{kl} -lrel jelölve, a (36) helyett így is írható a Fourier-transzformált

$$\mathcal{F}\{g_{kl}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{kl} e^{-j2\pi(kf'_x + lf'_y)}. \quad (39)$$

A kapott frekvenciafüggvény periódusa mindkét irányban egységnyi

$$G_d(f'_x, f'_y) = G_d(f'_x + m, f'_y + n),$$

ahol m és n tetszőleges egész. Egy periódust, mely a függvény viselkedését a teljes frekvenciasíkon egyértelműen megadja, tetszőleges helyen felvehetünk. Például választhatjuk az

$$|f'_x| \leq 0,5, \quad |f'_y| \leq 0,5 \quad (40)$$

dimenziótlan frekvenciának megfelelő Nyquist-intervallumot. A továbbiakban ezt az intervallumot, illetve, ha az intervallum részintervallumai bizonyos szimmetriát mutatnak, kisebb részeit, felét vagy negyedét használjuk.

Amikor az adatok valósak, a Fourier-transzformált valós részes páros, képzetes része páratlan. Kétváltozós esetben ez a következő egyenlőségeket jelenti:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[G(f'_x, f'_y)] &= \operatorname{Re}[G(-f'_x, -f'_y)], \\ \operatorname{Im}[G(f'_x, f'_y)] &= -\operatorname{Im}[G(-f'_x, -f'_y)]. \end{aligned}$$

Valós adatok spektrumát elegendő megadni a Nyquist-intervallum egyik felén. A másik fél ennek tükörképe. Rendszerint a pozitív f'_y -höz tartozó felet, azaz az

$$|f'_x| \leq 0,5; \quad 0 \leq f'_y \leq 0,5$$

tartományt választjuk.

Amikor az adatok a négy térnegyedben szimmetrikusak, azaz

$$g_{kl} = g_{k, -l} = g_{-k, l} = g_{-k, -l}, \quad (41)$$

a Fourier-transzformált valós és a Nyquist intervallum négy negyedében szimmetrikus lesz, azaz

$$G_d(f'_x, f'_y) = G_d(f'_x, -f'_y) = G_d(-f'_x, f'_y) = G_d(-f'_x, -f'_y);$$

$$\text{Im}[G_d(f'_x, f'_y)] = 0.$$

Ekkor nyilván elegendő megadni a Nyquist intervallum egy negyedét. Rendszerint a pozitív negyedet választjuk, azaz

$$0 \leq f'_x \leq 0,5; \quad 0 \leq f'_y \leq 0,5.$$

A (41) felhasználásával az általános érvényű (39) kapcsolat egyszerűsödik.

$$\begin{aligned} \sum_{l=-M}^M \sum_{k=-N}^N g_{kl} e^{-j2\pi(f'_x k + f'_y l)} &= \sum_{l=-M}^M \left[\sum_{k=-N}^N g_{kl} e^{-j2\pi f'_x k} \right] e^{-j2\pi f'_y l} = \\ &= g_{00} + 2 \left[\sum_{l=1}^M g_{0l} + 2 \sum_{k=1}^N g_{kl} \cos 2\pi f'_x k \right] \cos 2\pi f'_y l. \end{aligned} \quad (42)$$

A Fourier-transzformáltakat általában két kétváltozós felülettel szemléltethetjük, melyek a $\text{Re}[G_d(f'_x, f'_y)]$ és $\text{Im}[G_d(f'_x, f'_y)]$ függvényeket ábrázolják. Valós adatrendszerek esetén elegendő a két felületet a Nyquist intervallum egyik fele fölött megadni. Amikor a transzformált is valós, természetesen már egyetlen felület megadása is elegendő. Végül, ha az adatrendszer rendelkezik a (41) szimmetriával már megelégedhetünk a Nyquist-intervallum egy negyede feletti ábrázolással. Rendszerint szintvonalas ábrázolást, esetleg perspektivikus képet használunk.

Bizonyos esetekben, különösen a (41) szimmetriával rendelkező adatrendszerek spektrumainak szemléltetésekor a felületből kimetszett görbéket is használunk. Két kézenfekvő lehetőség az f'_r függvényében, különböző α irányok, mint paraméterek, vagy α függvényében, különböző f'_r értékek, mint paraméterek mellett ábrázolni a $G_d(f'_x, f'_y)$ értékeit. Az első esetben a felületet a frekvenciasíkra merőleges, origón áthaladó síkkal metszük és a metszésvonal frekvenciasík feletti magasságait ábrázoljuk. A sík f'_x tengellyel bezárt szöge adja az α irányt. Irányfüggetlen $G_d(f'_x, f'_y)$ esetén az α szög értéke közömbös, tetszőleges irányú sík ugyanazt a görbét metszi ki a felületből. Rögzített f'_r origó középpontú kört jelöl ki a frekvenciasíkon. A körhöz illesztett, frekvenciasíkra merőleges palástú henger metszi ki a felületből a karakterisztikus görbék másik változatát. A metszésvonal pontjainak magassága a frekvenciasík felett adja a $G_d(f'_x, f'_y)$ rögzített f'_r -höz tartozó értékeit, mint az α változó függvényeit. A két ábrázolási lehetőséget mutatja be a 3. ábra.

A (39) Fourier-transzformáció nem veszi figyelembe az adatrendszer véges kiterjedését. A transzformáció eredménye a frekvenciatartományban már periodikus, de még folytonos. A diszkrét Fourier-transzformáció (rövidítve *DFT*) véges sok diszkrét adathoz, véges sok, diszkrét adatot, frekvenciatartománybeli mintát rendel. A periodicitás mindkét tartományra jellemző.

Mivel a kétváltozós esetre vonatkozó képletek hosszadalmasak, másrészt az egyváltozós eset értelemszerű általánosításai, a 2. táblázatban a Fourier-analízis négy változatát az egyváltozós esetre adjuk meg.

A kétváltozós Fourier-sorra nem volt szükségünk, a kétváltozós folytonos Fourier-transzformáltat a (2)-vel, a végtelen hosszúságú kétváltozós digitális

jelek Fourier-transzformáltját a (39)-cel adtuk meg. A kétváltozós diszkrét Fourier-transzformált (DFT) bevezetésére van még szükség.

A kétváltozós véges hosszúságú

$$g_{kl}; \quad (k = 0, 1, \dots, M-1)$$

$$(l = 0, 1, \dots, N-1)$$

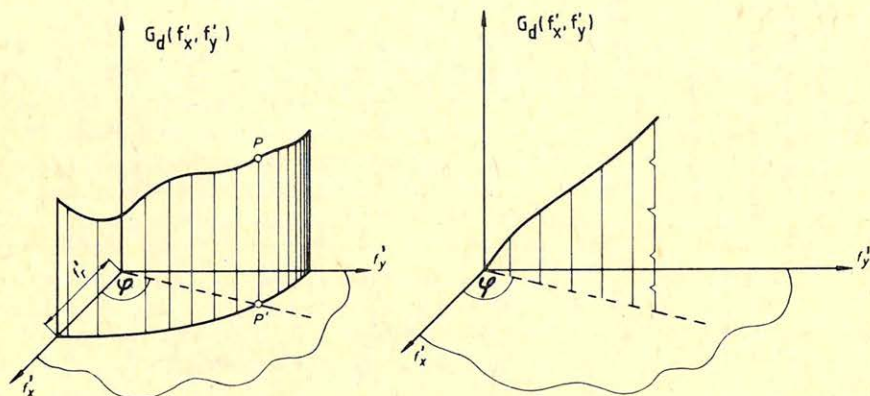
adatrendszer DFT-ját

$$DFT \{ \{g_{kl}\} \} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} g_{kl} e^{-j2\pi \left(\frac{kp}{M} + \frac{lr}{N} \right)} = G_{pr} \quad (43)$$

$$(p = 0, 1, \dots, M-1; \quad r = 0, 1, \dots, N-1)$$

definiálja. A (43) tetszőleges, egész p és r indexekre számítható, de ha a megadott értékektől eltérő (p_1, r_1) értékeket használunk az alap periódus $M \times N$ számú mintájának egyikét kapjuk meg újra. Ennek oka az, hogy a (43)-ban szereplő $\exp \left[-j2\pi \left(\frac{kp}{M} + \frac{lr}{N} \right) \right]$ magfüggvény periodikus. Értéke változatlan marad, ha (p_0, r_0) ; $0 \leq p_0 \leq M-1$, $0 \leq r_0 \leq N-1$ helyett

$$p_1 = p_0 + m M, \quad r_1 = r_0 + n N \quad (m \text{ és } n \text{ egész}) \quad (44)$$



Habár R.

Geo 83/26-3

3. ábra. Az átviteli függvényt karakterisztikus görbékkel is szemléltethetjük. Két esetet mutatunk be: a kétváltozós átviteli függvényt hengerfelülettel metszve $f'_y = \text{állandó}$, síkkal metszve $\varphi = \text{állandó}$ karakterisztikus görbékhez jutunk

Рис. 3. Переходная функция может быть представлена и характеристическими кривыми. Показаны два случая: при пересечении переходной функции двух переменных поверхностью цилиндра получаем характеристическую кривую $f'_y = \text{const}$, а плоскостью – кривую $\varphi = \text{const}$

Fig. 3. The transfer functions can be visualized by characteristic curves. The intersections of the surfaces corresponding to two-dimensional transfer functions by a cylinder ($f'_y = \text{constant}$), and by a plane ($\varphi = \text{constant}$) are shown

A Fourier analízis négy változata
 Четыре разновидности анализа Фурье
 Four versions of the Fourier analysis

	Direkt transzformált		Inverz transzformált	
	$G(t)$ vagy G_k	f vagy $k, \Delta f$ tartomány	$g(t)$ vagy g_i	t vagy $i, \Delta t$ tartomány
1. Fourier-sor	$\int_a^{a+T} g(t) e^{-j2\pi t k \Delta f} dt$	diszkrét, $\Delta f = \frac{1}{T}$ $-\infty \leq k \leq \infty$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k e^{j2\pi k \Delta f t}$	folytonos, periodikus $a \leq t < a + T$
2. Folytonos Fourier-transzformált	$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$	folytonos $-\infty \leq f \leq \infty$	$\int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$	folytonos $-\infty \leq t \leq \infty$
3. Végtelen hosszúságú digitális jelek Fourier-transzformáltja	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} g_i e^{-j2\pi i \Delta t f}$	folytonos, periodikus $\frac{1}{2\Delta t} \leq f < \frac{1}{2\Delta t}$	$\frac{1}{2\Delta t} \int_{-\frac{1}{2\Delta t}}^{\frac{1}{2\Delta t}} G(f) e^{j2\pi f i \Delta t} df$	diszkrét $-\infty \leq i \leq \infty$
4. Diszkrét Fourier-transzformáció	$\sum_{i=0}^{N-1} g_i e^{-j2\pi \frac{i}{N} k \Delta t}$	diszkrét, periodikus $0 \leq k \leq N-1$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi \frac{k}{N} i \Delta t}$	diszkrét, periodikus $0 \leq i \leq N-1$

értékeket írunk argumentumába. Ez éppen azt jelenti, hogy

$$G_{p_1 r_1} = G_{p_0 r_0}$$

minden, a (44) egyenletet kielégítő (p_0, r_0) és (p_1, r_1) párra.

A

$$G_{pr} \quad (p = 0, 1, \dots, M-1 \quad \text{és} \quad r = 0, 1, \dots, N-1)$$

frekvenciatartománybeli minták sorozatából az eredeti minták sorozata a kétváltozós inverz diszkrét Fourier-transzformációval (rövidítése DFT⁻¹) visszaállítható:

$$DFT^{-1}\{G_{pr}\} = \frac{1}{MN} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} G_{pr} e^{j2\pi \left(\frac{kp}{M} + \frac{lr}{N}\right)} = g_{kl}. \quad (45)$$

A (45) ismét tetszőleges (k, l) párra számítható, de

$$g_{k_1 l_1} = g_{k_0 l_0}$$

ha

$$k_1 = k_0 + m M, \quad l_1 = l_0 + n N \quad (m \text{ és } n \text{ egész}). \quad (46)$$

Emiatt a visszaállított sorozat is periodikus, a g_{kl} ($k = 0, 1, \dots, M-1$; $l = 0, 1, \dots, N-1$) minták sorozata az alap periódus.

A DFT-ra vonatkozó konvolúciótétel a következő:

$$DFT \left\{ \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} c_{kl} g_{m-k, n-l} \right\} = C_{pr} G_{pr}. \quad (47)$$

A kapcsos zárójelben a c_{kl} és g_{kl} adatrendszerek úgynevezett ciklikus konvolúciója szerepel. Ez a közönséges és a lineáris szűrésben kívánt (nem-ciklikus) konvolúciótól lényegesen eltér. Mivel c_{kl} és g_{kl} periodikusan ismétlődő adatrendszereket jelentenek a konvolúcióképzésben szereplő szorzatösszeg valamennyi szorzata, minden n, m tolásra számítható.

A nem-ciklikus konvolúciót úgy számíthatjuk, hogy a konvolvándó adatrendszereket zérusokkal bővítjük ki: 4. ábra. A két, kellő számú zérussal kiegészített adatrendszer ciklikus konvolúciójának egy periódusa megegyezik a közönséges konvolúcióval. Külön felhívjuk a figyelmet a kiegészítés fontosságára, ennek elmaradása esetén teljesen teljesen hamis eredményeket kapunk!

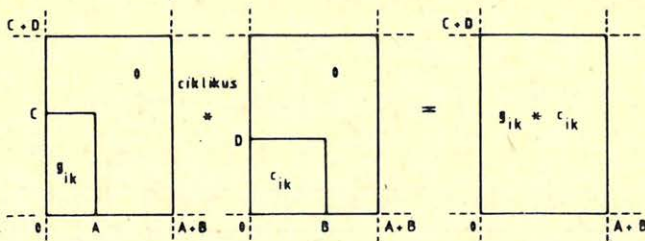
Mind a kétváltozós DFT, mind inverz művelete megvalósítható egyváltozós DFT számításának sorozatával. A (43) kétváltozós DFT például így írható

$$G_{pr} = \sum_{l=0}^{N-1} G_{pl}^+ e^{-j \frac{2\pi}{N} lr}, \quad (48)$$

melyben

$$G_{pl}^+ = \sum_{k=0}^{M-1} G_{kl} e^{-j \frac{2\pi}{M} kp}. \quad (49)$$

Az utóbbi az összes sorra az egyváltozós DFT számítását írja elő. Miután a sorok egyváltozós DFT-jait számítottuk és azokkal az eredeti kétváltozós adatrendszer sorait helyettesítettük, a (48) szerint számítjuk az összes oszlopra az egyváltozós DFT-okat. Ezeket az eredetileg ott álló G_{pl}^+ ($l = 0, 1, \dots, N-1$) helyére írva végül megkapjuk a teljes adatrendszer kétváltozós DFT-ját.



Habár R.

Geo 83/26-4

4. ábra. A g_{ik} és c_{ik} adatrendszerek nem-ciklikus konvolúcióját meghatározhatjuk a ciklikus konvolúció számításával is, ha a konvolúcióképzés előtt mindkét adatrendszert kellő számú zérussal egészítjük ki

Рис. 4. Нециклическую свертку систем данных g_{ik} и c_{ik} можно определить вычислением циклической свертки, если обе системы данных перед проведением свертки дополним достаточным количеством нулей

Fig. 4. The non-cyclic convolution of g_{ik} and c_{ik} can be determined by the periodic convolution if both sets of data are augmented by properly chosen areas including zeros

A szűrés végrehajtása a frekvenciatartományban a következő. Tételezzük fel, hogy a szűrő $M_f \times N_f$ adatot, az átalakítandó adatrendszer $M_a \times N_a$ adatot tartalmaz. Először kiegészítjük zérusokkal mindkét adatrendszert úgy, hogy méretük $M \times N$ legyen, ahol

$$M = M_f + M_a, \quad N = N_f + N_a$$

legyen. A kiegészített adatrendszereket jelölje c_{kl}^+ és g_{kl}^+ , azaz

$$\left. \begin{aligned} c_{kl}^+ &= c_{kl}; & 0 \leq k \leq M_f & \quad \text{és} & \quad 0 \leq l \leq N_f, \\ &= 0; & k > M_f & \quad \text{vagy} & \quad l > N_f, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{kl}^+ &= g_{kl}; & 0 \leq k \leq M_a & \quad \text{és} & \quad 0 \leq l \leq N_a, \\ &= 0; & k > M_a & \quad \text{vagy} & \quad l > N_a. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

A szűrő kimenete:

$$DFT^{-1} \left\{ DFT \{c_{kl}^+\} DFT \{g_{kl}^+\} \right\}. \quad (52)$$

Ennek az adatrendszernek $M_a + M_f$ sora és $N_a + N_f$ oszlopa van, de számunkra csak az a rész értékes, mely az eredetileg megvalósítandó közösleges konvolúcióképzés során a c_{kl} összes elemét felhasználta. Végül az (52) eredményéből $2M_f$ számú sor és $2N_f$ számú oszlop elhagyásával kapjuk a megszokott, a jelenlegi gyakorlatban diszkrét nem-ciklikus konvolúcióval számított, úgynevezett szűrt adatrendszert.

Az (52) alkalmazásának előnye, hogy a számítás rendkívül gyors. További előnye, hogy ha a számított DFT-akat zérusokkal egészítjük ki, a kimenet szinte tetszőleges sűrűséggel megkapható. Például ha mindkét irányban az eredeti hosszúság kétszereséig történik a kiegészítés, a kimenet mintavételi távolsága – szintén mindkét irányban – az eredeti mintavételi távolság fele. Az interpolá-

ciót automatikusan és az eredeti adatrendszer frekvenciatartományán a lehető legjobban végrehajtja a DFT^{-1} művelet.

A szűrés frekvenciatartománybeli megvalósítása e két előnyös tulajdonság miatt feltétlenül javasolható.

2. Lineáris átalakítások átviteli tulajdonságainak vizsgálata

A gravitációs és mágneses térképek adatrendszereit sokszor olyan műveletekkel kívánjuk átalakítani, melyekről nem nyilvánvaló, hogy lineáris szűréssel megvalósíthatók vagy jól közelíthetők. Néhány ismert példa: analitikai folytatás lefelé vagy felfelé, különböző deriváltak számítása, mágneses adatok pótlusra redukálása stb.

Több esetben valamilyen átalakítás konvolúció alakra hozható, más esetekben az átalakítandó $g(x, y)$ spektrumának szorzása valamilyen frekvencia függvényvel adja a művelet végeredményét. A két eset közös vonása, hogy a szóban forgó műveletek szűrésnek tekinthetők – akkor is ha a műveletek eredeti célkitűzéseinek megfogalmazásában a szűrés gondolata fel sem vetődött. Az első esetben, amikor a műveletet már konvolúció formára hoztuk, az átviteli függvény számítása esetleg jobban megvilágítja az átalakítás hatását, megerősítheti vagy kétségbe vonhatja a művelet célkitűzéseinek helyességét. A második esetben, amikor lényegében már az átviteli függvényt vizsgálhatjuk, ezekhez további lehetőségként járul a művelet gyakorlati megvalósulásának előkészítése vagy az elvi átviteli függvény célszerű módosítása.

Néhány gyakran alkalmazott művelet átviteli függvényeit a 3. táblázatban foglaltuk össze. Megjegyzendő, hogy további műveletek is jellemezhetők átviteli függvényeikkel, de általános alakban ezek az átviteli függvények nem írhatók fel és ezért a táblázatban nem szerepelnek. Példa erre különböző fokszámú polinomok illesztése az eredeti adatrendszer kisebb részterületének adataihoz és valamelyik adat helyettesítése a polinom valamilyen rögzített argumentumú helyen (referenciapontban) felvett értékével. Az átvitelt ugyanis az illesztésben használt adatok száma, a polinom fokszáma és a referenciapont helye egyaránt módosítja.

A felfelé, illetve lefelé folytatások célja olyan anomáliák számítása, melyeket a vonatkoztatási sík felett vagy az alatt húzódó, vele párhuzamos síkban mérhetnénk. Az átalakítások részletes tárgyalása magyar nyelven is több helyen megtalálható, például *Kis – Meskó, 1980*; ezért arra szorítkozhatunk, hogy a végeredményeket idézzük. A felfelé folytatás eleve konvolúció alakra hozható. Ezt mutatja a táblázatban is szereplő súlyfüggvény. A körszimmetrikus súlyfüggvényből,

$$s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{h}{2\pi (r^2 + h^2)^{3/2}}$$

az átviteli függvény Hankel-transzformációval kapható.

A lefelé folytatás átviteli függvénye nyilvánvaló módon a felfelé folytatás reciproka. Ellentétben a lefelé folytatással, az utóbbi művelethez nem rendelhető súlyfüggvény, mivel energiatartalma nem véges és emiatt az átviteli függvény inverz Hankel-transzformáltja nem létezik. A bemenet spektrumáról fel kell tételizni, hogy sávkorlátozott, egyébként az átviteli függvényvel való szorzás után – a növekvő frekvenciák exponenciálisan növekvő erősítése miatt – végtelenhez tartó amplitúdókat kapnánk.

Néhány gyakran alkalmazott művelet átviteli függvénye
 Переходные функции нескольких, часто применяемых операций
 Transfer functions of some often applied operations

Művelet neve	Tér tartomány (operátor vagy súlyfüggvény)	Frekvencia tartomány átviteli függvény
1. folytatás felfelé h magassáig	$\frac{h}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$	$e^{-2\pi h f_r}$
2. folytatás lefelé h mélységig	—	$e^{2\pi h f_r}$
3. vertikális deriválás	$\frac{\partial^k}{\partial z^k}$	$(-2\pi f_r)^k$
4. horizontális irányú deriválások	$\frac{\partial^i}{\partial x^i}$	$(j 2\pi f_x)^i$
	$\frac{\partial^i}{\partial y^i}$	$(j 2\pi f_y)^i$
5. pólusra redukálás.*		
totális komponens:	—	$\frac{f_r^2}{[h f_r + j (l f_x + m f_y)] [N f_r + j (L f_x + M f_y)]}$
vertikális komponens: (indukált)	—	$\frac{f_r}{n f_r + j (l f_x + m f_y)}$
6. különböző kompo- nensek átszámítása egymásba		$\frac{f_r n_1 + j (l_1 f_x + m_1 f_y)}{f_r n_2 + j (l_2 f_x + m_2 f_y)}$
	Z komponens átszámítása	$\frac{j (l f_x + m f_y)}{f_r}$
	H komponensre	f_r

* L, M, N a mágnesezettség; l, m, n a földi mágneses tér irányvektorának komponenseit jelöli.

Azon a tartományon, ahol a bemenet spektruma zérus, az átviteli függvény viselkedése közömbös. A gyakorlati megvalósítás érdekében, anélkül, hogy lényeges veszteséget okoznánk feltételezhetjük, hogy az átvitel

$$S(f_r) = \left. \begin{aligned} e^{2\pi h f_r}, & \text{ ha } f_r < f_h \\ 0, & \text{ ha } f_r > f_h \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Az f_h felső határfrekvenciát úgy választjuk, hogy a tartomány, melyen az eredeti átviteli függvény hat, tartalmazza a bemenet spektrumának nem zérus részét. A módosítás a megvalósítandó átviteli függvény energia tartalmát végezzé teszi. A súlyfüggvény inverz Hankel-transzformációval már számítható.

Tapasztalatok szerint még az (53) alakú átviteli függvény sem biztosít megfelelő eredményeket. Ennek oka az, hogy a bemenet (felszínre vagy felszín közelében húzódo frekvenciasíkra redukált gravitációs anomália) nem csupán a folytatás síkja alatti hatók terét tartalmazza. A folytatás alapvető feltételezése, hogy a két sík között nincsenek hatók. Részben a tényleges geológiai felépítés (nin-

csenek pontosan vízszintes, tökéletesen homogén rétegek), részben a mérések és a korrekciók számításának hibái miatt ez a feltételezés nem teljesül. A felszínközeli inhomogenitások, a vonatkoztatási síkhoz közeli hatók és a kis mérési és korrekciós hibák, melyek fikatív, kis méretű hatókhoz hasonló járulékat adnak, legnagyobb mértékben a spektrum nagyfrekvenciás részét torzítják. Csupán az alacsonyabb frekvenciás részről tételvezhető fel, hogy nagyobb mélységből ered. Emiatt az elvi átviteli függvény helyett rendszerint módosított

$$S_1(f_r) e^{2\pi h f_r}$$

alakú átviteli függvényt alkalmazunk. Ebben $S_1(f_r)$ alulvágó szűrő, mely növekvő frekvenciákkal az exponenciális csökkenésnél gyorsabban tart zérushoz, azaz

$$\lim_{f_r \rightarrow \infty} S_1(f_r) e^{2\pi h f_r} = 0.$$

Az alulvágásra a több előnyös tulajdonsággal rendelkező Gauss-féle alulvágót használhatjuk. Ezzel az analitikai lefelé folytatás gyakorlatban is alkalmazható közelítésének átviteli függvénye

$$S(f_r) = e^{2\pi h f_r - (k f_r)^2}. \quad (54)$$

A k paraméter a h mélységtől és a bemeneti adatrendszer spektrumának megbízhatóságától függően választható. Nyilvánvaló, hogy h növekedésével a k -nak is növekednie kell. Ha a spektrum kevésbé megbízható, a nagyobb frekvenciás részeket ezek súlyát szintén k növelésével csökkenthetjük. A művelet bizonyos értelemben optimális megvalósítására a 3. fejezetben még visszatérünk.

A vertikális deriválás átviteli függvénye egyszerűen levezethető az analitikai folytatások átviteli függvényeinek felhasználásával. Például a felfelé folytatást használva azt írhatjuk, hogy a vertikális derivált a felfelé folytatott és eredeti anomáliák különbségéből a

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{g(x, y, z = \Delta h) - g(x, y, 0)}{\Delta h} \quad (55)$$

határátmenettel kapható. A határátmenet és a Fourier-transzformáció felcserélhető műveletek, a $g(x, y, z = \Delta h)$ Fourier-transzformáltja az eredeti $g(x, y, 0)$ és a folytatás átviteli függvénye segítségével kifejezhető. Az (55) – tehát a $g(x, y, z = 0)$ vertikális deriváltjának Fourier-transzformáltja – így írható

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi f_r \Delta h} G(f_x, f_y) - G(f_x, f_y)}{\Delta h} &= G(f_x, f_y) \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi f_r \Delta h} - 1}{\Delta h} = \\ &= G(f_x, f_y) (-2\pi f_r) \lim_{\Delta h \rightarrow 0} e^{-2\pi f_r \Delta h} = (-2\pi f_r) G(f_x, f_y). \end{aligned} \quad (56)$$

Ebből közvetlenül leolvasható, hogy a művelet átviteli függvénye $(-2\pi f_r)$. Ismételt vertikális deriválások ugyanezen átviteli függvénnyel történő ismételt szorzásoknak felelnek meg, k -szor ismételt deriválás átviteli függvénye emiatt $(-2\pi f_r)^k$.

A különböző horizontális deriváltak számításának átviteli függvényét parciális integrálással határozhatjuk meg. Vizsgáljuk az általános esetet: legyen a művelet az x szerinti k -adik, az y szerinti i -edik parciális derivált számítása,

$$g_{ki}(x, y) = \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^k \partial y^i} g(x, y). \quad (57)$$

Tételezzük fel, hogy $g(x, y)$ és tetszőleges rendű deriváltjai végtelenben zérussal egyenlők. Ez a feltételezés gravitációs vagy mágneses anomáliatereteket leíró függvények esetén indokolt.

Az (57) jobb oldalának Fourier-transzformáltja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^i}{\partial y^i} g(x, y) \right] e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

parciális integrálással így alakítható:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} g(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} \right]_{-\infty}^{\infty} + \\ & + 4\pi^2 f_x f_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} g(x, y) \right] e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy. \end{aligned}$$

A kiintegrált rész azonban feltevésünk miatt zérus. A megmaradó integrál eltérése az eredeti integráltól annyi, hogy $(-j2\pi)^2 f_x f_y$ -nal szorozódott, míg az integráljel alatti deriválások rendje eggyel csökken. Részletes felírás nélkül is látható, hogy minden további x szerinti parciális integrálás $-j2\pi f_x$, minden y szerinti parciális integrálás $-j2\pi f_y$ szorzót hoz a megmaradó rész elé. Végül k számú x szerinti és i számú y szerinti parciális integrálás után

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^k \partial y^i} g(x, y) \right\} = \\ & = (-j2\pi f_x)^k (-j2\pi f_y)^i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy = \\ & = (-j2\pi f_x)^k (-j2\pi f_y)^i G(f_x, f_y). \end{aligned}$$

A kimenet Fourier-transzformáltja a bemenet transzformáltjának és a deriválások rendjétől függő frekvenciafüggvénynek a szorzataként írható fel. Ebből leolvasható, hogy az átviteli függvény

$$S(f_x, f_y) = (-j2\pi)^{i+k} (f_x)^k (f_y)^i. \quad (58)$$

Az összes derivált számítása alulvágó jellegű szűrésnek felel meg. Eltávolítják az állandó részt (az egyen-komponenst) és a frekvenciával valamilyen, a deriválás rendjétől függő fokszámú hatványfüggvény szerint növekvő erősítést írnak elő. A feléle folytatáshoz hasonlóan az átviteli függvény energiataralma végtelen és emiatt a súlyfüggvény nem számítható.

A megoldást ismét az jelenti, hogy az elvi átvitelt csak valamilyen – a bemeneti adatrendszerrel is függő – határfrekvenciáig írjuk elő, azon túl pedig zérussal tesszük egyenlővé. A nagyfrekvenciás zajok csökkentése a deriváltak

számítása esetén is kívánatos. Ezt ismét az elvi átviteli függvény és alkalmasan választott felülvágó kombinálásával valósíthatjuk meg. Például a gyakorlatban is alkalmazható, a vertikális derivált számítását az alacsonyfrekvenciás tartományon jól közelítő átviteli függvény

$$S(f_r) = (-2\pi f_r) S_1(f_r),$$

melyben $S_1(f_r)$ a felülvágó átviteli függvénye. Utóbbinak $(f_r)^{-1}$ -nél gyorsabban kell zérushoz tartania.

A 3. táblázatban szereplő 1–4. műveletek átviteli függvényei valóságos vagy tisztán képzetesek. A még nem tárgyalt két további művelet eltér az előzőektől abban is, hogy átviteli függvényük komplex értékű. Mivel ezekről a magyar nyelvű szakirodalomban kevés szó esett, indokoltnak tartjuk valamivel részletesebb tárgyalásukat.

A levezetésben a mágneses skalárpotenciál

$$U(x_0, y_0, z_0) = - \int_V \int \int (\bar{M}, \text{grad}) \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} d\sigma \quad (59)$$

alakjából célszerű kiindulni. Ebben V a mágnesezett anyaggal kitöltött térfogat, melynek térfogateleme $d\sigma$, \bar{M} a mágnesezettség eloszlását leíró, általában háromváltozós vektor-skalár függvény,

$$|\bar{r} - \bar{r}_0| = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}. \quad (60)$$

Amikor $\bar{M}(x, y, z)$ nagysága változó, de iránya állandó

$$\bar{M}(x, y, z) = \bar{\kappa} M(x, y, z). \quad (61)$$

és (59) egyszerűbb alakra hozható:

$$U(x_0, y_0, z_0) = - \int_V \int \int M(x, y, z) \frac{\partial}{\partial \bar{\kappa}} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} d\sigma. \quad (62)$$

A $\bar{\kappa}$ iránymenti derivált

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\kappa}} = L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z}, \quad (63)$$

ahol

$$L = \cos \tau \sin \eta,$$

$$M = \cos \tau \cos \eta. \quad (64)$$

$$N = \sin \tau.$$

A τ és η szögek, illetve az L , M , N komponensek jelentése az 5. ábrából leolvasható.

Abban a gyakran feltételezett esetben, amikor a mágnesezettséget kizárólag a földi mágneses tér hozza létre (indukált mágnesezettség) τ az I inklinációval, η a D deklinációval lesz egyenlő. Az \bar{M} mágnesezettség pedig a mágnesezett anyag k szuszceptibilitásának és a földi mágneses tér \bar{T}_0 totális intenzitásának szorzata:

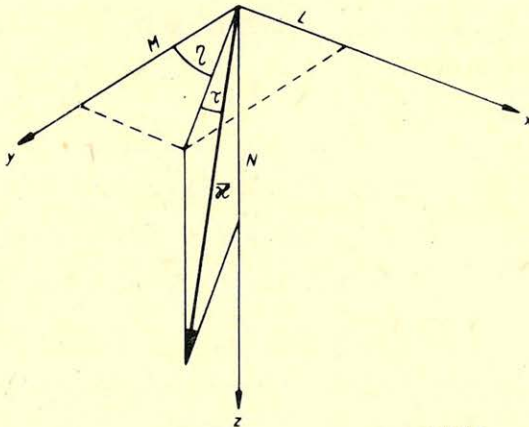
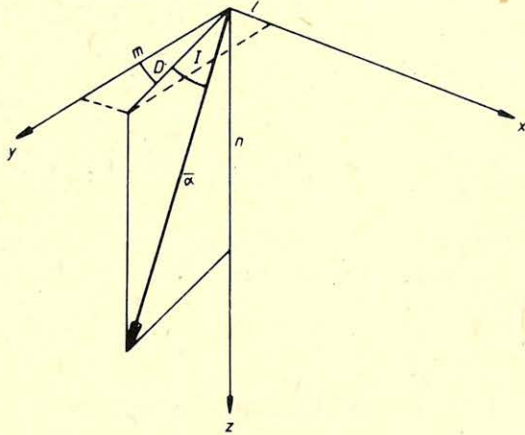
$$\bar{M} = k \bar{T}_0 = k T_0 \bar{\alpha}. \quad (65)$$

Ilyenkor az iránymenti derivált a (63) és (64) helyett így írható:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} = l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z}, \quad (66)$$

melyben

$$\begin{aligned} l &= \cos I \sin D, \\ m &= \cos I \cos D, \\ n &= \sin I. \end{aligned} \quad (67)$$



Мабър R.

Geo 83/26-5

5. ábra. A földi mágneses tér, illetve a mágnesezettség leírásában használt jelölések

Рис. 5. Обозначения, применяемые при описании магнитного поля Земли и намагниченности

Fig. 5. Notations used in the description of the earth's magnetic field vector components (l, m, n) and that of the magnetization (L, M, N)

A mágnesezett test által létrehozott anomália a felszín (x_0, y_0) pontjában a skalárpotenciálból a

$$\Delta T(x_0, y_0, 0) = -\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} U(x_0, y_0, z_0 = 0) \quad (68)$$

művelettel kapható. Amikor a potenciált állandó irányban mágnesezett test hozza létre

$$\Delta T(x_0, y_0, 0) = -M_0 \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \int \int \int \frac{d\sigma}{|\bar{r} - \bar{r}_0|}, \quad (69)$$

illetve amikor a mágnesezettség oka a földi tér indukciója

$$\Delta T(x_0, y_0, 0) = -kT_0 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}^2} \int \int \int \frac{d\sigma}{|\bar{r} - \bar{r}_0|}. \quad (70)$$

A vertikális anomália komponens ugyanezen speciális esetekben

$$\Delta Z(x_0, y_0, 0) = -M_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \int \int \int \frac{d\sigma}{|\bar{r} - \bar{r}_0|}, \quad (71)$$

illetve

$$\Delta Z(x, y_0, 0) = -kT_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \int \int \int \frac{d\sigma}{|\bar{r} - \bar{r}_0|}. \quad (72)$$

Végül a horizontális komponens a két esetben

$$\Delta H(x_0, y_0, 0) = -M_0 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\beta} \partial \bar{x}} \int \int \int \frac{d\sigma}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} \quad (73)$$

és

$$\Delta H(x_0, y_0, 0) = -kT_0 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\beta} \partial \bar{\alpha}} \int \int \int \frac{d\sigma}{|\bar{r} - \bar{r}_0|}. \quad (74)$$

A két utolsó egyenletben a $\bar{\beta}$ irány a földi mágneses tér horizontális komponensének irányába mutat, azaz

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\beta}} = L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y}. \quad (75)$$

A (69)–(74) egyenletekből kitűnik, hogy lényegében azonos kifejezés különböző deriváltjainak számítása adja az egyes komponenseket. Emiatt az egyes komponensek spektruma a közös

$$\int \int \int \frac{d\sigma}{|\bar{r} - \bar{r}_0|}$$

tényező spektruma, szorozva a megfelelő deriválások átviteli függvényeivel és az M_0 vagy kT_0 szorzóval. Az előforduló különböző irányok menti deriválásoknak

megfelelő átviteli függvények a következők:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\} = 2\pi [N f_r + j(L f_x + M f_y)], \quad (76)$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \right\} = 2\pi [n f_r + j(l f_x + m f_y)], \quad (77)$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}} \right\} = 2\pi j(l f_x + m f_y). \quad (78)$$

A „pólusra redukálás” célkitűzése olyan transzformáció megvalósítása, mely vertikális irányú mágnesezettségre és vertikális irányú földi mágneses térre számítja át a változatlan alakú, illetve nagyságát tekintve változatlan mágnesezettségű ható anomália képét. Amikor a ható mágnesezettsége indukált, a földi mágneses tér vertikális irányából már következik a vertikális mágnesezettség is. A művelet neve abból ered, hogy a póluson (vagy az irány előjelét is figyelembe véve az északi póluson) vertikális irányú a földi mágneses tér. Amikor indukált mágnesezettségről van szó, a transzformáció szemléletesen azt jelenti, hogy a hatót „áthelyezzük” a pólusra.

A pólusra redukálás után csak a vertikális komponens különbözik zérustól (a totális és vertikális komponens egybeesik). A gravitációs anomáliához ebben az értelemben hasonlóvá válik az átalakított mágneses anomália. Emiatt nevezte *Baranov (1957, 1975)* az így kapott anomáliákat „pseudo-gravitációs” anomáliának.

Az átalakítás után kapott mágneses anomália

$$\Delta T_p(x_0, y_0, 0) = -M_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \int \int \frac{d\sigma}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} \quad (79)$$

homogén M_0 mágnesezettség esetén, illetve

$$\Delta T_p(x_0, y_0, 0) = -k T_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \int \int \frac{d\sigma}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} \quad (80)$$

indukált mágnesezettség esetén. A z-szerinti második deriválás átviteli függvénye $(2\pi f_r)^2$. A pólusra redukálás során az eredeti anomáliakép előállításában szereplő deriválásokat a z-szerinti második deriválással kell helyettesíteni. A frekvenciatartományban ez azt jelenti, hogy az anomália spektrumát osztani kell a (szóban forgó anomália előállításában szereplő) deriválások átviteli függvényeivel és meg kell szorozni $(2\pi f_r)^2$ -tel. A (69) és (79) alapján – felhasználva a (76) és (77) átviteli függvényeket is – kapjuk, hogy a pólusra redukálás átviteli függvénye \bar{z} irányban mágnesezett ható totális anomáliája átalakításában

$$S_{p(T.r.)}(f_x, f_y) = \frac{f_r}{[n f_r + j(l f_x + m f_y)] [N f_r + j(L f_x + M f_y)]}. \quad (81)$$

A (70) és (80) alapján – a (77) felhasználásával – adódik, hogy indukált mágnesezettség esetén a totális anomália átalakításában alkalmazandó átviteli

függvény

$$S_{p(T. i.)}(f_x, f_y) = \frac{f_r^2}{[n f_r + j(l f_x + m f_y)]^2} \quad (82)$$

alakúvá egyszerűsödik.

A további esetek átviteli függvényei a (76)–(78) iránymenti deriválások átviteli függvényeinek és a (71)–(74), illetve (79) és (80) egyenletek közül választott megfelelő pároknak a felhasználásával ugyanilyen egyszerűen kaphatók. Csak az indukált anomália Z-komponensének átszámítására vonatkozó átviteli függvényt írjuk még fel. Ez (72) és (80) alapján

$$S_{p(Z. i.)}(f_x, f_y) = \frac{f_r}{n f_r + j(l f_x + m f_y)}. \quad (83)$$

A különböző irányú komponensek átszámítása (a 3. táblázat utolsó tétele) ugyanezen elvek alapján végezhető el. Az átviteli függvények számlálójában a kívánt iránynak megfelelő deriválás átvitele, nevezőjében az eredeti iránynak megfelelő deriválás átvitele szerepel.

A most levezetett (81)–(83) és a további átviteli függvények is csak iránytól függenek. Ez könnyen belátható, ha a frekvenciasíkban áttérünk polárkoordinátákra. Az

$$f_x = f_r \cos \varphi, \quad f_y = f_r \sin \varphi$$

helyettesítésekkel például a (83)-ból:

$$S_{p(Z. i.)}(f_r, \varphi) = \frac{1}{n + j(l \cos \varphi + m \sin \varphi)}, \quad (84)$$

tehát csak a φ irányt tartalmazó átvitelt kapunk.

Az origóban felvett érték attól függ, hogy milyen irányból közeledünk felé; itt nincsen az átviteli függvényeknek határértéke. Az origót (az egyenkomponenst) ki kell zárni az átalakításokból. Elvileg ez nem okoz nehézséget, mert – a mágneses tér forrásmentes lévén – tetszőleges fizikailag létező ható mágneses anomáliaterének egyenkomponense zérus. A gyakorlatban azonban véges kiterjedésű térképeket használunk és emiatt az egyenkomponens eltávolításáról külön gondoskodnunk kell. A legegyszerűbb megoldás a számunkra lényeges frekvenciatartományt kevésbé módosító alulvágó szűrő alkalmazása.

A pólusra redukálás műveletének elméletével és gyakorlati megvalósításával behatóan foglalkozott Kis K. (1981a, b, 1982a, b).

3. Szűrőtervezés a frekvenciatartomány felhasználásával

Egyváltozós (rendszerint az idő függvényében változó) mennyiségek optimális átalakításait gyakran alkalmazzák a geofizikában. Alapvető feltételezés az, hogy az átalakítandó mennyiség valamilyen stochasztikus folyamat egy realizációja és a stochasztikus folyamat megismerhető (vagy legalább becülhető) statisztikus tulajdonságú, megtartandó és eltávolítandó komponensek összege. A megtartandó (esetleg az átalakítás során még valamilyen kívánatos módon változtatandó) komponenszt jelnek, az eltávolítandó komponenszt zajnak nevezük. A jel és zaj elkülönítésére akkor lehet reményünk, ha statisztikus tulajdonságaik eltérnek egymástól. Gyakorlati sikerhez természetesen még az is szükséges,

hogy a statisztikus tulajdonságok becslésében alkalmazott feltételezéseink jól közelítsék a valóságot.

Az átlagnégyzetes értelemben optimalizált szűrésre két példát adunk. Az egyik pusztán a zaj kiküszöbölését tűzi ki célul. A másik példa: analitikai lefelé folytatás zaj jelenlétében azt az esetet illusztrálja, amikor a jelet nem csupán elkülöníteni, de módosítani is kívánjuk.

A speciális változatok tárgyalása előtt összefoglaljuk a kétváltozós, átlagnégyzetes értelemben optimalizált, digitális szűrő levezetését.

Szükségünk lesz a kétváltozós (nem-normált) autokorrelációs függvényre és a keresztkorrelációs függvényre. Ezeket a

$$\varphi_{gg}(u, v) = \mathcal{E} \{g_{ik} g_{i+u, k+v}\} \quad (85)$$

és a

$$\varphi_{dg}(u, v) = \mathcal{E} \{d_{ik} g_{i+u, k+v}\} \quad (86)$$

egyenletek definiálják, melyekben g_{ik} , illetve d_{ik} azonos rácspontban adott értéket reprezentál. A továbbiakban g_{ik} a bemenet, d_{ik} a kívánt kimenet mintáit, c_{ik} a kétváltozós lineáris szűrő együtthatóit jelöli.

A digitális szűrő tényleges kimenete az egyenlőre ismeretlen és még meghatározatlan számú c_{ik} együtthatók alkalmazása után

$$\sum_i \sum_k c_{ik} g_{n-i, m-k}.$$

Az átlag négyzetes eltérés a kívánt és tényleges kimenetek között pedig

$$\begin{aligned} \varepsilon(c_{ik}) &= \mathcal{E} \left\{ \left(d_{nm} - \sum_i \sum_k c_{ik} g_{n-i, m-k} \right)^2 \right\} = \\ &= \varphi_{dd}(0) - 2 \sum_i \sum_k c_{ik} \varphi_{dg}(i, k) + \sum_i \sum_k \sum_n \sum_m c_{ik} c_{nm} \varphi_{gg}(n-i, m-k). \end{aligned} \quad (87)$$

Az eltérés akkor lehet minimális, amikor az $\varepsilon(c_{ik})$ kifejezés c_{ik} együtthatók szerinti összes parciális deriváltja zérus. Ebből a szükséges feltételből a

$$\varphi_{dg}(n, m) = \sum_i \sum_k c_{ik} \varphi_{gg}(n-i, m-k) \quad (88)$$

lineáris egyenletrendszeret kapjuk. Az egyenletek száma azonos az együtthatók számával, mert n és m ugyanazokat az (egész) értékeket futja be, melyeket az i és k indexek. A (88) a kétváltozós, diszkrét Wiener – Hopf egyenletrendszer. Az autokorrelációs mátrix szimmetriája miatt ismét lehetőség van rekurziós megoldásra.

Az átlag négyzetes eltérés elérhető minimumához jutunk, ha a (88) egyenletrendszeret beírjuk a (87) kifejezésbe. Könnyen látható, hogy

$$\varepsilon_{\min}(c_{ik}) = \varphi_{dd}(0) - \sum_i \sum_k c_{ik} \varphi_{dg}(i, k).$$

A normált minimális hiba pedig

$$\varepsilon_{\min}^+(c_{ik}) = 1 - \sum_i \sum_k c_{ik} \frac{\varphi_{dg}(i, k)}{\varphi_{dd}(0, 0)}. \quad (89)$$

Szemléletessége, illetve az egyszerűbb számíthatóság miatt több szerző a térbeli frekvenciatartományba transzformálja a (88) egyenletrendszeret. Mindkét

oldal diszkrét Fourier-transzformáltját képezve, majd átrendezve az egyenletet a

$$C(f'_x, f'_y) = \frac{\Phi_{dg}(f'_x, f'_y)}{\Phi_{gg}(f'_x, f'_y)} \quad (90)$$

kapcsolatra jutunk. A számlálóban a kereszt spektrum, a nevezőben a teljesítményspektrum szerepel, $C(f'_x, f'_y)$ a szűrő átviteli függvénye. Megjegyzendő, hogy a kereszt spektrumot rendszerint eléggé nehéz becsülni.

Az optimumszűrés alkalmazásának sikere elvben a kereszt korreláció, illetve a kereszt spektrum értékétől függ. Gyakorlatban azonban lényegesebb az, hogy milyen jól tudjuk becsülni ezeket a mennyiségeket. Az a tény, hogy aránylag ritkán használnak kétváltozós optimumszűrőket, lényegében a becslés gyakorlati nehézségeiből következik. Rendszerint a kétváltozós teljesítményspektrumot számítjuk, majd ennek értékelésével próbáljuk elkülöníteni a zajra jellemző részt. A szűrés eredményessége nyilvánvaló módon függ az értelmező döntésének helyességétől.

Tételezzük fel, hogy a bemenet egymással korrelálatlan jel és zaj összege, azaz

$$\varphi_{sn}(i, k) = \varphi_{ns}(i, k) = 0.$$

Ekkor a bemenet autokorrelációja, illetve a kívánt kimenet és bemenet kereszt korrelációja

$$\varphi_{gg}(i, k) = \varphi_{ss}(i, k) + \varphi_{nn}(i, k) \quad (91)$$

$$\varphi_{dg}(i, k) = \varphi_{ss}(i, k) \quad (92)$$

alakúvá egyszerűsödik.

A diszkrét Wiener – Hopf egyenlet az egyenlőségek felhasználásával

$$\varphi_{ss}(n, m) = \sum_i \sum_k c_{ik} [\varphi_{ss}(n-i, m-k) + \varphi_{nn}(n-i, m-k)] \quad (93)$$

alakúvá tehető; míg a frekvenciatartományban érvényes (90) általános összefüggésből a szűrő átviteli függvényére a

$$C(f'_x, f'_y) = \frac{\Phi_{ss}(f'_x, f'_y)}{\Phi_{ss}(f'_x, f'_y) + \Phi_{nn}(f'_x, f'_y)} \quad (94)$$

kapcsolat vezethető le.

A (94) egyenletből jól látszanak a korrelálatlanság feltételezésének előnyei: a teljesítményspektrum értelmezésénél csupán a zaj teljesítmény járulékát kell elkülöníteni. Rendszerint alacsonyfrekvenciás és nagyfrekvenciás zaj is van. Az előbbi a regionális komponens, az utóbbi a minden frekvencián jelentkező rendezetlen zaj. Ez a komponens csak látszólag nagyfrekvenciás, ugyanis itt csökken a jel szintje a zaj szint alá. Máshol a jel, illetve regionális komponens teljesítménye jelentősen – az elég alacsony frekvenciákon több nagyságrenddel is – nagyobb.

Gyakran körszimmetrikus, irányfüggetlen átvitel megvalósítására törekszünk. A (94) helyett ebben az esetben a radiális spektrumokat használjuk. Ezeket

$$\Phi_{ss}(f'_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{ss}(f'_r \cos \varphi, f'_r \sin \varphi) d\varphi$$

$$\Phi_{nn}(f'_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{nn}(f'_r \cos \varphi, f'_r \sin \varphi) d\varphi$$

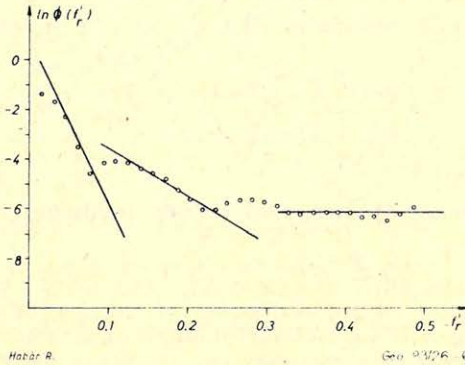
definiálja. A digitális feldolgozásban az integrálást, természetesen, összegzéssel kell közelítenünk. Emiatt szükség van a rácspontok közötti értékek interpolálására is.

Az átviteli függvény a körszimmetrikus spektrumok feltételezése miatt szintén körszimmetrikus lesz

$$C(f'_r) = \frac{\Phi_{ss}(f'_r)}{\Phi_{ss}(f'_r) + \Phi_{nn}(f'_r)} \quad (95)$$

Mivel a $\Phi_{gg}(f'_r)$, a két komponensre felbontandó teljesítményspektrum rendszerint több nagyságrendet fog át, értelmezéséhez célszerű logaritmusát számítani.

A 6. ábra gravitációs Bouguer anomália adatokból számított radiális teljesítményspektrum logaritmusát mutatja be, a spektrum értelmezésével együtt.



6. ábra. A radiális teljesítményspektrum logaritmus, amelyet gravitációs adatokból számítottunk és a spektrum értelmezése

Рис. 6. Логарифм радиального спектра мощности, вычисляемый по данным гравитации и интерпретация спектра

Fig. 6. The logarithm of a radial power spectrum, computed from gravity data and its interpretation

Az alacsonyfrekvenciás tartományon jelentkező, közel lineárisan csökkenő részt a regionális hatásnak tulajdonítjuk. A következő rész jellemző a lokális hatókra, míg a nagyobb frekvenciákon a közel állandó rész a rendezetlen zaj teljesítmény szintjére jellemző. Az ábra jól illusztrálja mennyire nehéz a különböző komponensek elkülönítése, azaz a szűrés tényleges optimalizálása. Voltaképpen azokat a frekvenciákat tudjuk becsülni, ahol a regionális és a reziduál közel azonossá válik, illetve ahol a reziduál beleolvad a rendezetlen zajba. Egy sávszűrő, melynek 3dB-es pontjait ezeknél a (becsült) frekvenciáknál vesszük fel, közelítőleg ugyanolyan jó reziduál térképet ad, mint a szükségképpen becsléseket is használó optimumszűrő.

A Wiener-értelemben optimális szűrő egyszerre kísérli meg a jel lehető torzítatlan átvitelét és a zajok teljesítményének lehető legnagyobb csökkentését.

A lényeges nehézség az, hogy az egyik „zaj-komponens”, a regionális igen nagy amplitúdójú. Abban az esetben, amikor stacionárius, rendezetlen zajt tételezhetünk fel, melynek teljesítménye minden frekvencián azonos, sokkal egyszerűbb az optimalizálás. A (94)-ből akkor

$$C(f'_x, f'_y) = \frac{\Phi_{ss}(f'_x, f'_y)}{\Phi_{ss}(f'_x, f'_y) + \sigma^2} \quad (96)$$

kapható. A radiálissá tett spektrumból pedig a σ^2 (állandó) értéke jobban becsülhető, mint a regionális járuléka. Elegendő a közel állandóvá vált részen a spektrum adatok átlagát meghatározni. Megjegyzendő, hogy gravitációs adatok esetén a spektrum jelentős részén σ^2 jóval kisebb, mint $\Phi_{ss}(f'_x, f'_y)$ aktuális értéke. Ebből az következik, hogy az alacsony és közepes frekvenciákon $C(f'_x, f'_y)$ értéke csaknem egységnyi, majd a magas frekvenciák felé haladva lassan csökken. Emiatt az optimális simítószűrő kevéssé tér el egy megfelelően választott felülvágó szűrőtől. Jelentősége lehet azonban a σ^2 ismeretének a szűréssel kapott reziduálok értékelésében. Nyilvánvaló, hogy a zajszint megszabja az izovonalak értelmes értékűkét: nem érdemes a zajszint nagyságánál sokkal kisebb értékűt választani. A zajszint alatti vagy abból alig kiemelkedő reziduál anomáliák pedig nem tekinthetők szerkezeti indikációknak.

Térjünk most át a rendezetlen zaj jelenlétében végzett lefelé folytatás optimalizálására.

Az analitikai lefelé folytatás műveletét az előző fejezetben röviden összefoglaltuk. Rámutattunk arra is, hogy a művelet csak simítással együtt végezhető el. A magas frekvenciák felé haladva exponenciálisan növekvő átviteli függvény az aránylag kis teljesítményű rendezetlen zajt is jóval a jelek szintje fölé emelné, ha a műveletet eredeti alakjában alkalmaznánk. Az optimális simítással kombinált lefelé folytatás átviteli függvénye

$$S(f_x, f_y) = e^{2\pi h(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}} \frac{P_{ss}(f_x, f_y)}{P_{ss}(f_x, f_y) + P_{nn}(f_x, f_y)}. \quad (97)$$

A $P_{ss}(f_x, f_y)$ jel teljesítményspektrumot és a $P_{nn}(f_x, f_y)$ zaj teljesítményspektrumot most is a (lefelé folytatandó) bemenet teljesítményspektruma alapján kell megbecsülni.

A radiális spektrum számítása ismét előnyös lehet a bemenet teljesítményspektrumának komponensekre bontásában: Ha a radiális spektrum logaritmus a nagyfrekvenciás tartományban lineárisan csökken feltételezhetjük, hogy a zajforrások közelítőleg egy h_n mélységű rétegben koncentrálnak. A h_n értéke pedig a lineáris csökkenés mértékéből becsülhető. Ha az iránytangens m , és természetes alapú logaritmust használtunk, a h_n mélység becslése $h_n = \frac{1}{4\pi} |m|$.

A radiális spektrum logaritmus a más alakú is lehet. Ha közel lineáris csökkenés helyett közel állandó, rendszerint kissé oszcilláló jellegű a nagyfrekvenciás tartomány, a zajt fehér spektrumúnak tekinthetjük és csak átlagszintjét kell megbecsülnünk. Ezt a stabilizálódott (közel állandó) részt átlagértékének választjuk.

A két lehetséges esetben a zajspektrumok

$$P_{nn}(f_x, f_y) = C e^{-4\pi h_n(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}} \quad (98)$$

$$P_{nn}(f_x, f_y) = N. \quad (99)$$

A (98)-ban álló C becslését a lineáris részhez illeszkedő, m iránytangensű egyenes tengelymetszete adja. Ügyelni kell továbbá arra, hogy $P_{ss}(f_x, f_y)$ értéke sehol se váljon negatívvá. Ezt több módon is elérhetjük. Egyik lehetőség $P_{ss}(f_x, f_y)$ helyettesítése valamilyen előre választott, kis s_{\min} értékkel minden olyan helyen, ahol a $P_{gg}(f_x, f_y) - P_{nn}(f_x, f_y)$ különbség kisebbé válik ennél az értéknél. Például, ha a (99) zaj spektrum becslést alkalmazzunk

$$\begin{aligned} P_{ss}(f_x, f_y) &= P_{gg}(f_x, f_y) - N, & \text{ha } P_{gg}(f_x, f_y) - N > s_{\min} \\ &= s_{\min}, & \text{ha } P_{gg}(f_x, f_y) - N \leq s_{\min}. \end{aligned}$$

A zaj teljesítményspektrumából egyértelműen következik a zaj autokorrelációs függvénye. A (98) teljesítményspektrumnak a

$$\varphi_{nn}(u, v) = C \frac{2h_n}{[(2h_n)^2 + u^2 + v^2]^{3/2}}, \quad (100)$$

míg a (99) alakú teljesítményspektrumnak a

$$\begin{aligned} \varphi_{nn}(u, v) &= N \quad (u=0, \quad \text{vagy} \quad v=0) \\ &= 0 \quad (u \neq 0 \quad \text{vagy} \quad v \neq 0) \end{aligned} \quad (101)$$

autokorrelációs függvény felel meg.

Ismét feltételezve, hogy a jel és zaj korrelálatlanok a teljes bemenet autokorrelációjából a (100) vagy a (101) becslések felhasználásával (mindig az értelmezésnek megfelelő alakúval) a jel autokorrelációs függvénye is megkapható.

A simítószűrőt a becslések alapján a diszkrét Wiener – Hopf egyenlet megoldásával számítjuk. A szűrő c_{ik} együtthatóit a

$$\sum_i \sum_k c_{ik} \varphi_{gg}(l-i, m-k) = \varphi_{gg}(l, m) - \varphi_{nn}(l, m) \quad (102)$$

egyenletrendszer megoldása adja.

A simítás után a lefelé folytatás már módosítás nélkül alkalmazható.

Megjegyezzük végül, hogy a lefelé folytatás kétváltozós dekonvolúciós szűrőnek is tekinthető, mely nagyfrekvenciás zaj jelenlétében működik (Meskó, 1974). A felfelé folytatás súlyfüggvénye ugyanis (ld. 3. táblázat 1. tétele)

$$s(x, y) = \frac{h}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \quad (103)$$

konstans szorzótól eltekintve megegyezik egy tömegpont terével. Ez éppen azt jelenti, hogy a h mélységre lefelé folytatás a h mélységű tömegpont teréből a tömegpont helyén *spike*-ot állít elő; azaz a kimenet ezen az egyetlen ponton zérustól különböző, a tömeg nagyságával arányos érték, másutt zérus.

A szimmetrikus dekonvolúciós szűrő tervezéséhez a tömegpont gravitációs anomália adatainak autokorrelációjára és a (103) alakú bemenet és kívánt kimenet (*spike*) keresztkorrelációjára van szükség.

Az autokorreláció azonban a teljesítményspektrum inverz Fourier-transzformáltja és a teljesítményspektrum a tárgyalt speciális esetben arányos az egyetlen, h mélységű tömegpont teréből számított amplitúdóspektrum négyzetével.

Az elmondottak alapján, felhasználva azt, hogy a h mélységű tömegpont terének amplitúdóspektruma $\exp[-2\pi h f_r]$

$$\Phi_{ss}(f_r) = C_1 e^{-4\pi h f_r}. \quad (104)$$

Az inverz Fourier-transzformációt – mellyel a bemenet autokorrelációját kapnánk – végre sem kell hajtani, mert a (104)-ből közvetlenül leolvasható, hogy az egy $2h$ mélységű tömegpont terének Fourier-transzformáltjával arányos. Emiatt a jel autokorrelációjának adatrendszere

$$\varphi_{ss}(i, k) = \frac{2C_1 h'}{[i^2 + k^2 + (2h')^2]^{3/2}}. \quad (105)$$

A kívánt kimenet (spike) és bemenet keresztkorrelációjának elemei arányosak a bemenettel, azaz

$$\varphi_{dg}(i, k) = \frac{C_2 h'}{[i^2 + k^2 + (h')^2]^{3/2}}. \quad (106)$$

($h' = h/d$, $d =$ állomástávolság).

A zajt a (100) vagy (101) becslésekkel vesszük figyelembe. Feltételezve, hogy a jel és zaj korrelálatlan

$$\varphi_{gg}(i, k) = \varphi_{ss}(i, k) + \varphi_{nn}(i, k).$$

Ezzel a (88) diszkrét Wiener – Hopf egyenletrendszerben szereplő összes mennyiséget meghatároztuk. Az egyenletrendszer megoldása adja az optimális lefelé folytatás együtthatóit.

IRODALOM

- Baranov, W., 1957.*: A new method for interpretation of aeromagnetic maps: pseudo-gravimetric anomalies *Geophysics*, 22: 259 – 383.
- Baranov, W., 1975.*: Potential Field and their Transformations in Applied Geophysics. *Geoexploration Monographs*, Borntäger.
- Bhattacharyya, B. K. and L. K. Leu, 1975.*: Spectral analysis of gravity and magnetic anomalies due to two-dimensional structures. *Geophysics*, 40: 993 – 1013.
- Bhattacharyya, B. K. and L. K. Leu, 1977.*: Analysis of magnetic anomalies over Yellowstone National Park *J. Geophys. Res.*, 80: 4461 – 4465.
- Cooley, J. M. and Tukey, J. W., 1965.*: An algorithm for the machine computation of complex Fourier series *Math. Comput.*, 19: 297 – 301.
- Dean, W. C., 1958.*: Frequency analysis for gravity and magnetic interpretation. *Geophysics*, 23: 97 – 127.
- Kis K., 1981 a.*: Totális földmágneses anomáliák északi földmágneses pólusra redukálása. Kutatás jelentés OKGT GKV számára (kézirat).
- Kis K., 1981 b.*: Transfer properties of reduction of the magnetic anomalies of the magnetic pole and to the magnetic equator. *Annales Univ. Sci. Budapestinensis*, Tom XXIII, p. 75 – 88.
- Kis K., 1982 a.*: A vertikális és totális földmágneses anomáliák északi földmágneses pólusra, a horizontális földmágneses anomáliák földmágneses egyenlítőre redukálása. Kandidátusi értekezés 1 – 121 old.
- Kis K., 1982 b.*: Derivation of coefficients reducing magnetic anomalies to the magnetic pole or to the magnetic equator. *Acta Geodaet., Geophys. et Mont.* (megjelenőben).
- Kis K. és Meskó A., 1980.*: Gyakorlati geofizika I. Egyetemi Jegyzet. Tankönyvkiadó.
- Kovács F. és Meskó A., 1971.*: Kétváltozós digitális szűrés gyakorlati alkalmazása Bouguer anomáliatérképek átalakításában. *Magyar Geofizika*, XII. 10 – 27.

- Kulhánek, O., 1976.*: Introduction to Digital Filtering in Geophysics. Elsevier, Amsterdam.
- Meskó A., 1966.*: Szűrőelmélet alkalmazása a gravitációs interpretációban. Magyar Geofizika, VII: 17 – 43.
- Meskó A., 1968.*: Koeffizientenreihen zur linearen Transformation von Schwerekarten. Geophysik (Berlin), Folge 13: 57 – 60.
- Meskó A., 1970.*: Szűrőelmélet alkalmazása a gravitációs értelmezésben (66 – 90 old.). In: Geofizikai Kutatási módszerek. Egyetemi tankönyv. Tankönyvkiadó.
- Meskó A., (témafelelős) 1974.*: Sűrűségugrás szint meghatározása gravitációs adatok alapján. Kutatási jelentés OKGT GKV számára (kézirat).
- Meskó A., 1980.*: Gravitációs és nyersanyagkutatás Magyar Tudomány, 10: 743 – 852.
- Meskó A., 1983.*: Geofizikai adatfeldolgozás I. Egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó.
- Meskó A., 1983.*: Regional Bouguer gravity maps of Hungary Acta Geodaet. Geophys. et Mont. (megjelenőben).
- Naidu, P. S., 1970.*: Statistical structure of aeromagnetic fields. Geophysics, 35: 279 – 292.
- Nettleton, L. L., 1976.*: Gravity and Magnetics in Oil Prospecting. Mc Graw-Hill, New York.
- Spector, A., 1971.*: Aeromagnetic map interpretation with the aid of the digital computer. CIM Bull., 64: 27 – 33.
- Spector, A. and B. K. Bhattacharyya, 1967.*: Energy density spectrum and autocorrelation function of anomalies due to simple magnetic models Geophys. Prospect., 14: 242 – 272.
- Spector, A. and F. S. Grant, 1970.*: Statistical model for interpreting aeromagnetic data. Geophysics, 35: 293 – 302.
- Syberg, F. J. R., 1972.*: A Fourier method for the regional-residual problem of potential fields Geophys. Prospect., 20: 47 – 75.

Közönségszolgálat

1982. augusztus második felétől minden érdeklődő felkeresheti az *MTESZ-lapok közönségszolgálatát a IX. ker. Mester u. 3. szám* alatt. Itt szövetségünk valamennyi szaklapja megvásárolható, előfizethető, helyben is olvasható. A közönségszolgálat dolgozói szaklapjainkkal kapcsolatban minden felvilágosítást megadnak.

Keresse fel az MTESZ-lapok közönségszolgálatát (Budapest, IX., Mester u. 3. sz.)

Nyitvatartás: munkanapokon 10-től 18 óráig.