

# A MAGSAT mesterséges hold mágneses méréseinek feldolgozása I.<sup>1</sup>

KIS KÁROLY<sup>2</sup>, PUSZTA SÁNDOR<sup>2</sup>, WITTMANN GÉZA<sup>3</sup>

A MAGSAT mesterséges hold mágneses méréseinek feldolgozása igényli a földi mágneses tér gömbfüggvény sorfejtés formájában történő kiszámítását. A zonális és szférikus harmonikusok meghatározására alkalmas trigonometrikus és hipergeometrikus sorfejtés felhasználását mutatja be, továbbá a kifejlesztett algoritmusok segítségével kiszámításra kerültek a földi mágneses tér centrális dipólus, kvadrupólus és oktapólus összetevőjének abszolút értékei.

K. KIS, S. PUSZTA, G. WITTMANN : Interpretation of the Magnetic Measurements of the MAGSAT

The paper summarizes the equations used in the calculations of spherical harmonics. It contains the trigonometrical and hypergeometrical expansions for the approximation of the Legendre function.

## 1. Bevezetés

A tanulmány az OTKA Bizottság döntése alapján elnyert pályázat első eredményeit mutatja be. A szerzők szándéka, hogy az elért eredményekről rendszeresen beszámoljanak a Magyar Geofizika hasábjain.

A MAGSAT mesterséges holdat 1979. október 30-án (1979-094 sorszám) bocsátották Föld körüli pályára. A 181 kg tömegű mesterséges holdat 96,76 fok inklinációjú pályára állították, amelynek perigeuma: 352 km, apogeuma: 561 km. A MAGSAT mesterséges hold hét és fél hónapig, 1980 június 11-ig végezte a Föld mágneses terének mérését. A méréseket cézium elektróhéj skalármagnetométerrel és három, a vektorkomponenseket mérő fluxgate magnetométerrel hajtották végre. A mágneses tér abszolút értékét  $\pm 2$  nT, a komponensek mérését  $\pm 6$  nT pontossággal mérték meg [LANGEL et al. 1982]. A műhold sematikus rajzát mutatja az 1. ábra.

## 2. A földi mágneses teret leíró sorfejtés

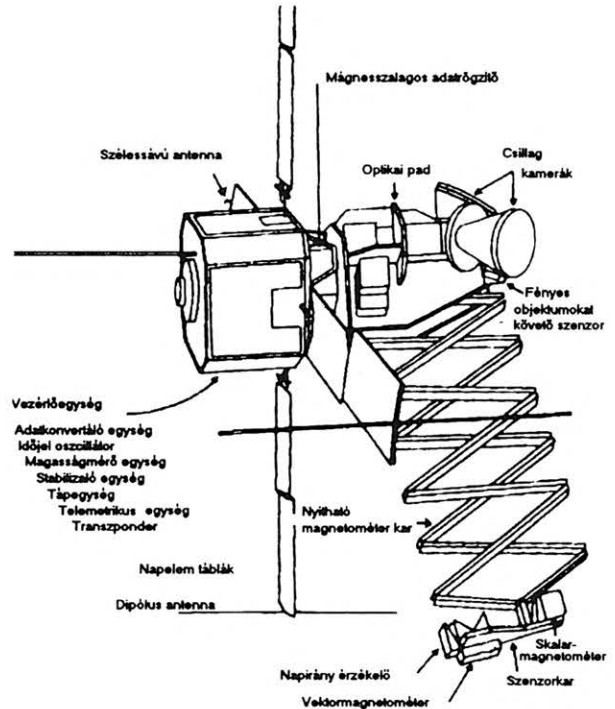
A Föld belső eredetű mágneses terének skalárpotenciálját a Laplace-egyenletnek gömbi polárkoordináta-rendszerben ( $r$  a potenciálpont helyvektorának hossza,  $\theta$  a gömbi pólustávolság,  $\lambda$  a greenwichi kezdő meridiántól mért gömbi hosszúság,  $a$  a Föld sugara) történő megoldása, a

$$W(r, \theta, \lambda) = a \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^n \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \quad (1)$$

<sup>1</sup> Beérkezett: 1993. november 19-én

<sup>2</sup> ELTE Geofizikai Tanszék, H-1083 Budapest, Ludovika tér 2.

<sup>3</sup> Geofizikai Szolgáltató Kft. H-1068 Budapest, Városligeti fasor 42.



1. ábra. A MAGSAT mesterséges hold vázlatos felépítése [LANGEL et al. 1982]

Fig. 1. The MAGSAT spacecraft [ LANGEL et al. 1982]

gömbfüggvény sorfejtés írja le, ahol

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[ \frac{\epsilon_m (n-m)! (1-x^2)^m}{(n+m)!} \right]^{1/2} \quad (2)$$

$$\frac{d^{m+n}}{dx^{(m+n)}} (x^2-1)^n$$

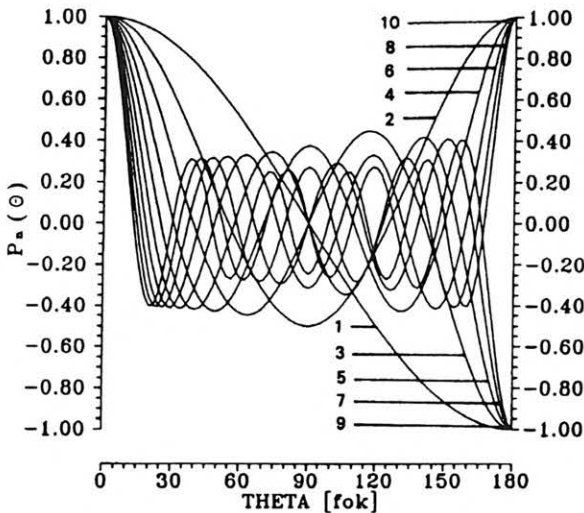
Az előző egyenletben  $\epsilon_m=1$ , ha  $m=0$ , és  $\epsilon_m=2$ , ha  $m \geq 1$ , továbbá  $x=\cos\theta$  [CHAPMAN, BARTELS 1951, VESTINE 1967, LANGEL 1987]. A sorfejtésben szereplő  $g_n^m$  és  $h_n^m$  együtthatók mindig adott epochára érvényesek. A MAGSAT mérési adatait az 1980.0 epochára redukálták. Az 1980.0 epochára vonatkozó együtthatók megtalálhatók PEDDIE [1982] tanulmányában, az 1990.0 epochára vonatkozó együtthatókat LANGEL [1992] cikke tartalmazza.

### 3. Zonális gömbfelületi harmonikusok

A sorfejtésben szereplő,  $m=0$ -hoz tartozó,  $P_n^0(\theta)$   $n$ -edfokú, zonális gömbfelületi függvények a

$$P_n^0(\theta) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \{ 2 \cos n\theta + 2 \frac{1}{1} \frac{n}{(2n-1)} \cos [(n-2)\theta] + 2 \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos [(n-4)\theta] + 2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cos [(n-6)\theta] + \dots \} \quad (3)$$

trigonometrikus sorfejtéssel közelíthetők [CHAPMAN, BARTELS 1951]. Ha  $n$  páratlan, akkor a sorozat  $\cos \theta$  többszörösére végződik, míg ha  $n$  páros, akkor az utolsó elem konstans és nem szerepel benne a 2-es szorzó. A 2. ábrán a zonális gömbfelületi harmonikusok képe látható ( $n=1$ -től  $n=10$ -ig) a pólustávolság függvényében. Az  $n$ -ed fokú zonális gömbfelületi harmonikus a  $\theta=0^\circ$  és a  $\theta=180^\circ$  intervallumban  $n$  nullahellyel rendelkezik. Amennyiben  $n$  páros, vagy páratlan  $P_n^0(\theta)$  szimmetrikus, vagy antiszimmetrikus a  $\theta=90^\circ$  helyre.



2. ábra. A zonális gömbfelületi harmonikusok képe  $n=1$ -től  $n=10$ -ig a pólustávolság függvényében  
Fig. 2. The zonal harmonics  $P_1, \dots, P_{10}$  as functions of the polar angle

### 4. Szférikus harmonikusok

Ebben az esetben  $P_n^0$   $n$ -edfokú tagok mellett megjelennek a az  $n$ -edfokú  $m$ -edrendű tagok is, amelyek  $P_n^0$ -ból származtathatók  $m$ -edrendű deriválással:

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}, \quad (4)$$

ha  $m > n$ , akkor

$$P_n^m(\cos \theta) = 0.$$

A számítások során — akárcsak a zonális harmonikusok meghatározása esetében — a  $P_n^m$  meghatározható trigonometrikus sorfejtéssel [CHAPMAN, BARTELS 1951]:

$$P_n^m(\theta) = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} \sin^m \theta \left\{ \cos^{n-m} \theta - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-m-2} \theta + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-m-4} \theta - \dots \right\}. \quad (6)$$

HOBSON [1931] által javasolt eljárás a  $P_n^m(\theta)$  függvények kiszámítására:

$$P_n^m(\cos \theta) = K_n^m \sin^m \theta F(m-n, n+m+1, 1+m, \frac{1-\cos \theta}{2}), \quad (7)$$

ahol

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \beta}{1 \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots, \quad (8)$$

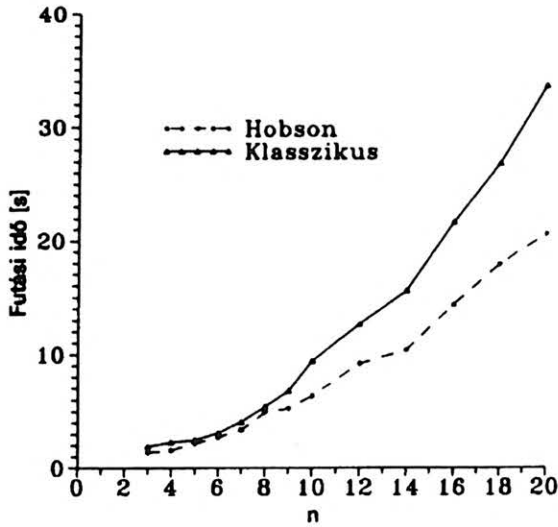
a hipergeometrikus függvény, továbbá  $K_n^m$  együttható  $m=0$  esetén 1, míg  $m > 0$  esetén

$$K_n^m = \frac{2^{1/2}}{2^m m!} \left[ \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

A  $K_n^m$  együttható alkalmazása a kvázinormalást biztosítja. A (9) és (10) egyenletből adódik, hogy ez a képlet nem egy végtelen hosszú sorozat! Ugyanis belátható, hogy a sorozat elemei  $m-n+1$  tag után — az  $\alpha=m-n$ -nek köszönhetően — nullával egyenlők, mivel az ezt követő tagokban mindig lesz egy 0 a számlálóban.

A két módszer összevetésével levonható a következőket, hogy a Hobson-féle számítási módszer elvégzéséhez 10-20%-kal kevesebb futási idő kell. A

3. ábra néhány  $n$ -re mutatja az összes  $P_n^m$  együttható kiszámításához szükséges futási időt.



3. ábra. A szférikus harmonikusok kiszámítása során alkalmazott algoritmusok futási idejének összehasonlítása  
Fig. 3. Comparison of the required computing time of the conventional and Hobson methods

Mivel az együtthatók között több nagyságrend különbség van, így elengedhetetlen a kapott értékek normálása. A gyakorlatban többféle normálási tényező terjedt el.

$$P_n^m = C \cdot P_n^m,$$

ahol  $P_n^m$  a normálatlan Legendre-együttható,  $C$  pedig a normáló tényező.

A legelterjedtebb normáló faktorok a következők: Gauss-Laplace-féle normálás:

$$C_n^m = \frac{2^n n! (n-m)!}{(2n)!} \quad (10)$$

Schmidt-féle kvázinormálás:

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^m = \left[ \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \quad (11)$$

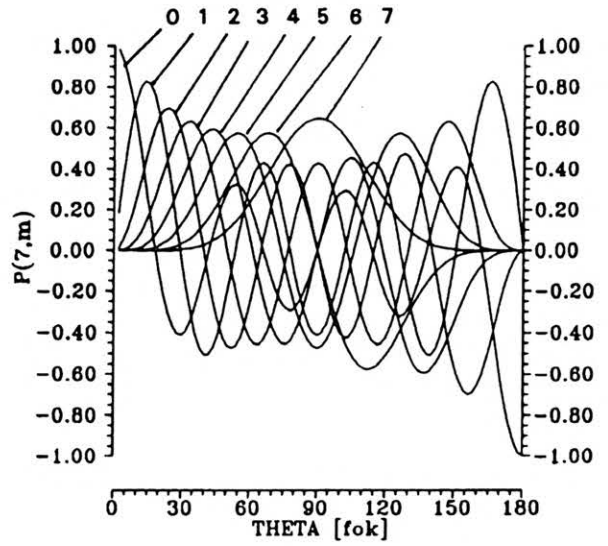
Schmidt-féle teljes normálás:

$$C_n^0 = \sqrt{2n+1}$$

$$C_n^m = \left[ 2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \quad (12)$$

A 4. ábra a  $P_n^m$  7-edfokú,  $m$ -edrendű együtthatókat mutatja  $\Theta$  függvényében.

Mindegyik  $P_n^m(\theta)$  harmonikusnak  $n-m$  különböző zérushelye van a  $\theta=0^\circ$  és a  $\theta=180^\circ$  intervallumban.



4. ábra. A  $P_n^m$  gömbfelületi harmonikusok képe ( $m=0, \dots, 7$ ) a pólustávolság függvényében  
Fig. 4. The associated harmonics  $P_n^m$  for  $m=0, \dots, 7$  as functions of the polar angle

A  $P_n^0(\theta) = P_n(\theta)$  zonális gömbfelületi harmonikusnak  $+1$  az értéke a  $\theta=0^\circ$  helyen, és  $(-1)^n$  az  $\theta=180^\circ$ -ban. Mindegyik  $P_n^m(\theta)$  az  $m>0$  ( $m \leq n$ ) esetben nulla értékkel rendelkezik mindkét póluson. Attól függően, hogy  $n-m$  páros, vagy páratlan,  $P_n^m(\theta)$  szimmetrikus, vagy antiszimmetrikus az Egyenlítőre, tehát ha  $n-m$  páratlan, akkor a zérushelyek közül egy a  $\theta=90^\circ$  helyen jelentkezik. A  $P_n^m(\theta)$  függvények igen kis értékűek a pólusok környezetében.

A  $P_n^m(\theta)\cos m\lambda$  és  $P_n^m(\theta)\sin m\lambda$  gömbfelületi harmonikusok  $n-m$  szélességű helyen vesznek fel nulla értéket, továbbá a  $\cos m\lambda$ , illetve a  $\sin m\lambda$  függvények tulajdonságainak megfelelően  $2m$  meridián mentén válnak nullává a  $\lambda=0^\circ$  és a  $\lambda=360^\circ$  intervallumban. Ezek a zérushelyek a gömb felszínét gömbnégyszögekre, illetve a pólusok körül gömbháromszögekre osztják fel, amelyekben a gömbfelületi függvények azonos előjelűek.

## 5. A mágneses tér számítása a Föld felszínén

Az (1) egyenlettel a gömbfüggvény sorfejtésnek az  $n=1$ -hez tartozó tagjai a dipólus, az  $n=2$ -höz tartozó tagjai a kvadrupólus, az  $n=3$ -hoz tartozó tagjai pedig az oktopólus összetevő potenciálját írják le.

A Föld totális mágneses terét a potenciál negatív gradienseként származtatjuk, amely a gömbi polár-koordináta-rendszerben a következő módon fejezhető ki:

$$T = -\nabla W(r, \theta, \lambda) = -e_r \frac{\partial W}{\partial r} - e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - e_\lambda \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \quad (13)$$

ahol  $e_r$ ,  $e_\theta$  és  $e_\lambda$  az egységvektorokat jelentik. A totális tér abszolút értékét a komponensek négyzetösszegének négyzetgyöke szolgáltatja:

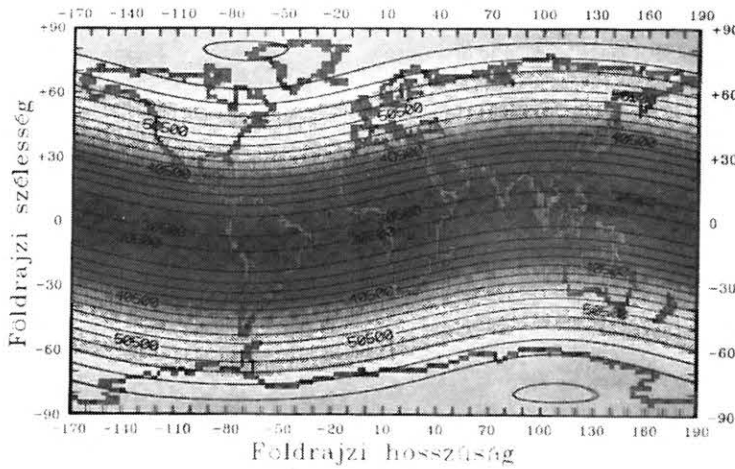
$$T(r,\theta,\lambda) = \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (14)$$

A Föld totális mágneses terének a sorfejtés alapján kiszámolt,  $n=1,2,3$ -hoz tartozó, a centrális dipólus, kvadrupólus és oktopólus által létrehozott totális mágneses terét mutatja be az 5., 6. és 7. ábra. A mágneses tér ábrázolása meridiánban hossztartó valószínűségi területen történt, amelyhez hossztartó Egyenlítő tartozik. A számítások során a Föld sugarát 6372,2 km-nek tekintettük [PEDDIE 1982]. A bemutatott térképek 1990.0 epochára vonatkoznak.

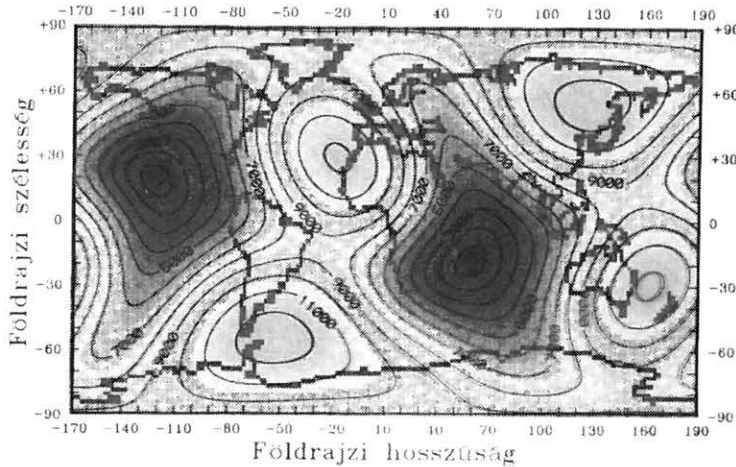
A szférikus harmonikusokat bemutató és a totális teret ábrázoló térképek a kifejlesztett programok működését illusztrálják.

## 6. Investigator-B adatok

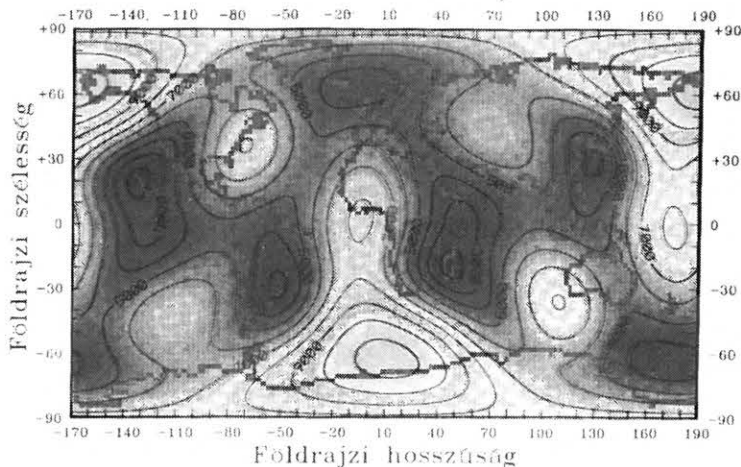
Az OTKA Bizottság döntése alapján elnyert pályázat célkitűzése: regionális mágneses anomáliatérkép levezetése a Pannon Medence területére, illetve az anomáliák értelmezése. Az adatokat a NASA-tól megrendelt Investigator-B mágnesszalag tartalmazza. A mágnesszalag 8,5 megabyte adatot tartalmaz. A mágnesszalagon lévő adatrendszer 852 Header rekordból és 2320 adat rekordból áll. Az adatok konverziója két lépésben történt meg. Első lépés: a mágnesszalagon hexadecimális formátumban tárolt adatok átírása floppydiszkekre; második lépés: a hexadecimálisan formátumú adatok konverziója ASCII formátumba, illetve file-okba történő rendezése. A mágneses adatok rendezése a  $K_p$  indexek alapján történt. A  $K_p$  indexek értelmezése megtalálható LINCOLN [1967] munkájában. Azok a pályamenti adatok kerülnek feldolgozásra, amelyekre a felszálló- és leszállócsomó helyén adott  $K_p$  index  $\leq 2$ .



5. ábra. A centrális dipólus összetevő totális mágneses terének izovonalai a Föld felszínén (az izovonalak egysége nT)  
Fig. 5. Isolines of equal total magnetic intensity corresponding to the centric dipole at the Earth's surface (isolines are given in nTs)



6. ábra. A centrális kvadrupólus összetevő totális mágneses terének izovonalai a Föld felszínén (az izovonalak egysége nT)  
Fig. 6. Isolines of equal total magnetic intensity corresponding to the centric quadrupole at the Earth's surface (isolines are given in nTs)

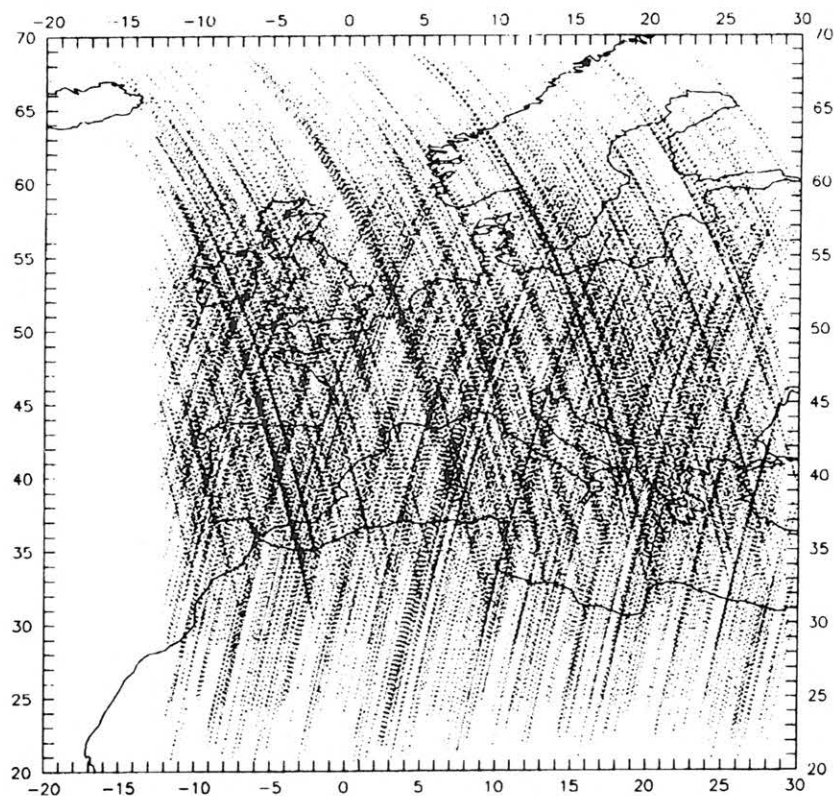


7. ábra. A centrális oktopólus összetevő totális mágneses terének izovonalai a Föld felszínén (az izovonalak egysége nT)  
 Fig. 7. Isolines of equal total magnetic intensity corresponding to the centric octupole at the Earth's surface  
 (isolines are given in nTs)

Ilyen szelekció alapján 43583 darab, a mágneses tér  $x$ ,  $y$  és  $z$  komponensét, illetve a totális tér abszolút értékét megadó adat áll rendelkezésre a további számítások elvégzésére. A szelektált adatok eloszlását mutatja a 8. ábra.

### Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki SZILÁGYINÉ FERENCZ Erzsébet szoftver csoportvezetőnek (Geofizikai Szolgáltató Kft.) a MAGSAT adatainak mágnesszalagról floppydiszkekre történő konverziójáért.



8. ábra. Az Investigator-B szelektált adatainak eloszlása  
 Fig. 8. Distribution of the selected Investigator-B data

**HU ISSN 0025—0120**

---

*Főszerkesztő:* dr. Bodoky Tamás

*Szerkesztőbizottság:* dr. Ádám Oszkár, dr. Ferenczy László, Kakas Kristóf, dr. Kis Károly, Tóth Lajos,  
Verő László, Zelei András

*Szerkesztőség címe:* Budapest, II., Fő u. 68. (1371 Budapest, Pf. 433)

Telefon: 201-9815

---