

A többlethibák nagyságának célszerű megválasztása az inverzió eredményeinek pontosításához¹

HAJAGOS BÉLA, STEINER FERENC²

A többlethiba-módszer témakörében megjelent első dolgozat példája statisztikus típusú és a mérési adatokban tartalmazott „természetes hibával” azonos nagyságú többlethibát szuperponált a mérési adatokra, mert ha nagyon sokféle többlethiba-realizációval tesszük ezt (a módszert definiáló STEINER [2002] dolgozat egy mikrogravitációs példában ezt $N=21 \times 21=441$ -féleképpen tette), az egyes többlethibás adatrendszer inverziója hiába ad bizonytalanabb értéket a modellparaméterekre, mint a többlethiba nélküli adatoké, minden paraméterre képezve v db v elemű halmaz mediánjainak a mediánját, a végeredmény sokkal megbízhatóbb, mint a többlethiba nélküli mérési adatok közvetlen („egylépéses”) inverziója.

A jelen dolgozat megmutatja, hogy célszerű a többlethibák nagyságát a természetes hibák $c = 2; 4; 8$ és 16 -szorosára is választani, az általunk eddig alkalmazott $c = 1$ megtartásával, és végül minden modellparaméterre az ötféle többlethiba-módszerrel kapott 5 érték mediánját fogadjuk el végeredménynek. Mivel ötször annyi ($5N$) inverzió végrehajtása szükséges a továbbfejlesztett változatban, ennek alkalmazását két körülmény gátolhatja: a direkt feladat algoritmusának bonyolult volta és/vagy viszonylag korlátozott számítástechnikai lehetőségeink.

B. HAJAGOS, F. STEINER: Investigations of the proper choice of the c ratio of the artificial and natural error magnitudes using the surplus error method

The example given in the first article published in the theme “surplus error method” superposed artificial errors of statistical type and of the same magnitude as the natural error has to the measured values many ($21 \times 21=441$) times. After this each modelparameter was determined 441 times by inversion characterized by greater error but the median of the 21 medians for each modelparameter could be characterized by much more accuracy than the result of the “one step inversion” without surplus errors.

The present article shows that it is more advantageous to work with the following five surplus error magnitudes: $c = 1; 2; 4; 8$ and 16 times the magnitude of the natural errors (contained in the measured values); in the last step for each modelparameter the median of 5 values are accepted which were the results of the surplus error method using different c values. As five times more ($5N$) inversions are necessary, this proposal can not be applied in case of very complicated direct algorithms and/or of very limited computing possibilities.

1. Bevezetés

„Quidquid est in intellectu, praeesse deberet in sensu.” (A szerzők fordítása szerint: „Bármilyen van a tudatban, mint megérzésnek már ezt megelőzően léteznie kell.”) Talán nem illetlenség kételkedni egy latin mondás kategorikus, kissé túl általános fogalmazásában, hiszen tisztán logikai úton is levezethetők már ismert tételekből (vagy közvetlenül valamely axiómarendszer alapján) új tudományos megállapítások. Azonban a régi bölcs mondás érvényességi tartományában — amely tágabb, mint azt első pillanatban elfogadni hajlandók vagyunk, — elgondolkodtató a mondandó lényege, amelynek egyik megnyilatkozása a tudomány területén az, hogy a sejtések és megérzések nem egészen jól definiált tartományából intuitív emelünk át valamit — egzakt megfogalmazású tételként vagy jól definiált módszerként — a tudat szintjére.

Ha egy algoritmus a fenti módon született — a többlethiba-módszert [STEINER 2002] bizvást idesorolhatjuk, — akkor a legelső természetes lépés több alternatíva kipróbálása a módszer hatékonyságára vonatkozóan (az idézett példában annak megvizsgálása, hogy a módszer alkalmas-e az inverzió eredményeire vonatkozóan a pontosság szignifikáns növelésére).

Mínt hogy a vizsgált példák mindegyikében a modellparaméter-hibák jelentős csökkenése volt tapasztalható, jogosan merült fel egy elméleti háttér megteremtése, hiszen miért ne lehetne ebben az esetben a valószínűségelmélet, a matematikai statisztika és az inverziós technikák diszciplínáinak már ismert tételei alapján „levezetni” a többlethibák módszerét, sőt, ennek minél több sajátosságát az elmélet alapján analitikusan (tehát elegánsan, nem Monte Carlo-módszerrel) levezetni, hogy ezek birtokában a gyakorlati alkalmazás jól tervezhető legyen?

Sajnos mind ez ideig nem sikerült e sorok szerzőinek megalkotniuk ilyen elméletet, márpedig egy módszer minél sokoldalúbb megismerésére okvetlenül szükség van. A módszersajátságok megismerésének egyelőre alkalmazott útja: olyan kérdések feltevése, amelyeknek Monte Carlo-úton való megválaszolása fényt deríthet ezekre a fontos sajátosságokra.

A mérési adatok természetes hibáira statisztikus típusú többlethibákat szuperponálunk (a statisztikus típust standard esetre az

$$f_{st}(x) = \frac{3}{4} (1+x^2)^{-5/2} \quad (1)$$

sűrűségfüggvény, ill. az

$$F_{st}(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{4 \cdot (1+x^2)^{3/2}} \quad (2)$$

¹ Beérkezett: 2004. február 23-án

² Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszék, H-3515 Miskolc, Egyetemváros

eloszlásfüggvény definiálja). Természetesnek tűnt ez a választás, mivel DUTTER [1986/1987] szerint a természetes hibák maguk is leggyakrabban ilyen típus környezetében várhatók. Az első felmerülő kérdés az volt, hogy a többlet-hiba-módszer alkalmazhatósága nem korlátozódik-e azokra az esetekre, amikor a természetes hibák valóban statisztikus típusúak. HAJAGOS, STEINER [2003a] vizsgálatai megmutatták, hogy a többlet-hiba-módszer akkor is jól működne, ha a természetes hibák netán a statisztikus típustól jelentősen eltérőek, történetesen Laplace- vagy Cauchy-eloszlásúak lennének (utóbbiak sűrűségfüggvényei jól ismertek

$$f_L(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad \text{ill.} \quad f_C(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

standard esetben). Az az igenlő válasz, amelyet HAJAGOS és STEINER [2003a] ad erre a kérdésre, a gyakorlati alkalmazás szemszögéből azért ítéltető jelentősnek, mivel a természetes hibák típusának a meghatározásához szinte soha nem áll elegendő adat rendelkezésünkre. A természetes hibák nagyságát viszont mindig ismerjük, ha az inverziót a mérési adatok és a direkt feladat algoritmusának ismeretében az eltérések P -normája (ld. STEINER (ed.) [1997], 20. old.) abszolút minimumhelyének meghatározásának útján hajtjuk végre, hiszen ekkor mellékeredményként a hibák ε -nal jelölt dihéziója is a kezünkben van (az imént idézett oldalon található az ε -t definiáló egyenlet is).

Eddigi vizsgálatainkban minden esetben definiáltunk a mesterségesen generált alkalmazandó többlet-hiba-rendszerek számára vonatkozóan primer módon egy v számot, ahányszor többlet-hibákat szuperponálunk a mérési adatokra; ezen adatrendszerek P -inverziójakor minden modellparaméterre v db értéket kapunk, amelyeket persze — statisztikus értelemben — nagyobb hiba terhel, mint a mérési adatok közvetlen inverziójakor kapottakat, de ha minden modellparaméterre képezzük a v darab érték mediánját, ez akár már pontosabb lehet, mint az egyetlen (közvetlen) inverziós lépéssel adódó. Hogy biztosabbak lehessünk ebben, az egész procedúrát v -szór megismételjük, és végül helyes modellparaméter-értékeként a mediánok mediánját fogadjuk el. Összesen tehát $N = v^2$ többlet-hiba-szuperpozícióra (és persze ugyanennyi inverzióra) van szükség.

Gazdaságossági (azaz „véges” gépidőigényre vonatkozó) indokaink miatt az N értéke túlságosan nagyra nem választható, viszont teljesen kézenfekvő, hogy N növelésével a modellparaméter-értékek egyre nagyobb pontosságát reméljük elérni. HAJAGOS, STEINER [2003b] arra a kérdésre keresi a választ, hogy milyen jellegű a modellparaméter-értékek pontosságnövekedése, ha egyre nagyobbra választjuk a többlet-hiba-szuperpozíciók számát. Meglepő módon már N -nek minimális: 9-es értéke mellett is jelentkezik a modellparaméter-értékek pontosságnövekedése, ez utóbbi azonban csak lassan válik még nagyobbá N növelésével, igazán radikális pontosságnövelést pedig csak akkor tapasztalunk, ha N már százak nagyságrendű.

Milyen jó lenne, ha a többlet-hiba-módszer háttérben készen volna a korábban már említett elmélet! Addig is az eddigi utat kell folytatnunk: „jó” kérdéseket kell feltenni és az ezekre (esetleg továbbra is Monte Carlo-módszerrel) adott válaszok révén a többlet-hiba-módszer egyre több sajátossága fog ismertté válni, sőt, esetleg a válaszadás vizs-

gálatai — *horribile dictu* — magát a módszert is továbbfejleszthetik.

Ilyen „jó” kérdést köszönhetünk VERŐ József akadémikusnak, aki a szerzőknek 2003. szeptember 29-én írt levelében — némi átfogalmazással — azt a kérdést tette fel, hogy a szuperponált többlet-hibákat optimális-e a természetes hibával azonos nagyságúaknak választani? Ez történt ui. minden eddigi publikált példánk esetén, ld. HAJAGOS és STEINER [2003a, b, c] vizsgálatait, — noha a többlet-hiba-módszer STEINER [2002]-beli eredeti definíciója semmilyen megkötést nem tartalmaz a többlet-hibák nagyságára nézve.

A jelen dolgozatban a szerzők VERŐ Józsefnek erre a kérdésre keresik a választ.

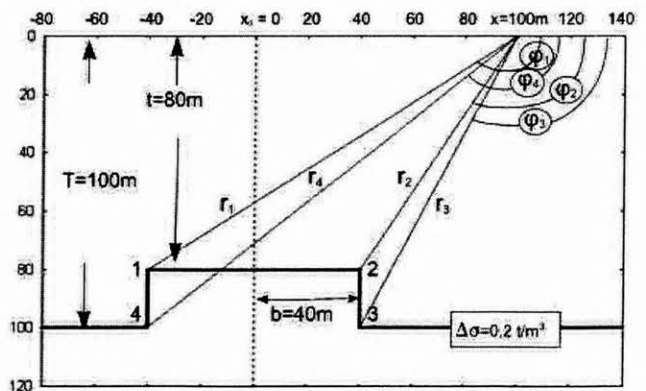
2. Vizsgálati módszer és számszerű eredmények a többlet-hiba-nagyság és a természetes hibák nagyságának célszerű c arányára vonatkozóan

2.1. A vizsgálati módszer ismertetése

Nyilván elkerülhetetlen, hogy a Monte Carlo-vizsgálatok elegendő számú c arányra vonatkozzanak — márpedig a többlet-hiba-módszer egyetlen c esetén is gépidőigényesnek számít. Hogy az ésszerűség határait ne lépjük túl, N -et már eleve viszonylag kicsinyre: 25-re választottuk, és hogy a direkt eljárás is viszonylag egyszerű legyen, az 1. ábra szerinti 2-D sasbérc-modellt vettük alapul. Utóbbinak graviméteres hatása JUNG [1961] szerint a következő képlettel számítható:

$$g = 2f\Delta\sigma[T(\varphi_4 - \varphi_3) - t(\varphi_1 - \varphi_2) + (x+b) \cdot \ln \frac{r_4}{r_1} - (x-b) \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}] \quad (3)$$

Nem tételezzük fel, hogy drága mikrograviméter áll rendelkezésünkre, csak jó minőségű, kb. egy-másfél század mGal hibával jellemezhető kvarcgraviméterrel tervezzük szelvénymérésünket végrehajtani $s = 20$ m-es állomástávolságot alkalmazva, $n = 21$ pontban. Így azután az inverzió kellőképpen túlhatározott, hiszen a $\Delta\sigma = 0,2 \text{ t/m}^3$ értéket a priori ismertnek véve, mindössze 4 modellparaméter: az x_0 , b , t és T értékeit kívánjuk inverzióval meghatározni (1. ábra).



1. ábra. A vizsgálatok céljára alapul választott kétdimenziós sasbérc-modell. A bejelölt mennyiségekkel a (3) formula alapján számíthatók a felszínre vonatkozó graviméteres hatás értékek

Fig. 1. 2-D model chosen for the present investigations. The gravimetrical effects are to be calculated according to Eq. 3

Hogy következtetéseink majd lehetőleg minél kevésbé legyenek esetlegességektől függőek, 40-féleképpen generáltunk statisztikus hibát a hibátlan g -értékekre, a (2) képlet felhasználásával, de $S = 0,02$ skálaparamétert alkalmazva, amikor is a hibajellemzők a következők: a Q interszextilis félterjedelem értéke 1,1 (ld. [STEINER 1990] 52. oldalán az $a = 5$ feliratú, $S = 1$ -re vonatkozó oszlopot), a szórás pedig $\sqrt{2}$, század mGal-ban kifejezve. Az 1. táblázat $k = 1; 2; \dots; 21$ feliratú oszlopai a 40 szériából az (5) egyenletet követően ismertetendő módszerrel szelektált, 21-féle $g_i^{\text{mért}}$ -nek tekintett, azaz természetes hibát már tartalmazó adatsorozatokot adják meg (az utolsó sorban az egyes hibarealizációk ε_k értékeit tüntettük fel; a dihézió elméleti értéke $\varepsilon = 0,009636$ század mGal, ld. a STEINER [1990]

96. oldalán az $a = 5$ -höz, azaz a statisztikus eloszláshoz a standard esetre vonatkozóan megadott értéket; az ε_k -k ingadozásai pedig teljesen megfelelnek a STEINER [1990] 204. oldalán levő képletből az $a = 5$ -höz számítható $A_\varepsilon / \varepsilon = 1,52$ -es relatív aszimptotikus szórásértéknek). Az 1. táblázat első oszlopa a mérési pontok x -szel jelölt abszcissa-értékeit, a második (g feliratú) oszlop a hibamentes (a (3)-ból az 1. ábrán feltüntetett paraméterértékekkel számított) g_i értékeket adja meg. Utóbbiakat a 2. ábra folytonos vonallal szemlélteti, egyúttal az egyik természetes hibarealizációhoz (ld. az 1. táblázat $k = 16$ -hoz tartozó oszlopát) a $g_i^{\text{mért}}$ értékeket nullkörökkel adja meg.

x	g	$k=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
-200	0,008	-0,003	0,010	0,036	-0,002	-0,004	-0,013	-0,005	-0,012	0,009	-0,012	0,017	0,011	-0,004	-0,003	-0,015	0,019	0,007	0,001	0,004	0,036	0,000
-180	0,010	0,026	0,021	0,014	-0,019	0,017	0,006	0,008	0,013	0,004	0,032	0,006	0,000	0,002	0,028	0,017	0,002	0,030	0,009	0,001	-0,015	-0,004
-160	0,012	-0,001	0,012	0,015	0,031	0,025	0,003	0,018	-0,012	-0,007	0,022	0,012	0,003	0,023	0,011	0,011	0,016	0,026	-0,022	0,030	0,017	0,013
-140	0,014	0,016	0,021	0,025	0,057	0,006	0,002	0,010	0,018	0,024	0,018	0,015	0,010	-0,009	0,020	0,014	0,002	0,012	0,004	0,002	0,006	0,005
-120	0,018	0,016	0,001	0,015	0,024	0,014	0,002	0,001	0,023	0,010	0,030	0,012	0,030	0,005	0,008	0,008	0,021	0,025	0,023	0,024	0,031	0,000
-100	0,022	0,026	0,044	0,033	0,039	0,028	0,025	-0,068	0,014	0,008	0,035	0,020	0,021	0,030	0,019	0,015	0,014	0,005	0,008	0,005	0,017	0,010
-80	0,027	0,036	0,023	0,048	0,025	0,035	0,023	0,019	0,025	0,019	0,025	0,010	0,051	0,029	0,005	0,031	0,016	0,016	0,042	0,035	0,028	0,010
-60	0,033	0,026	0,023	0,032	0,039	0,026	0,055	0,034	0,023	0,040	0,042	0,022	0,016	0,027	0,033	0,047	0,034	0,020	0,020	0,039	0,047	0,038
-40	0,039	0,056	0,024	0,028	0,034	0,031	0,048	0,054	0,043	0,040	0,015	0,045	0,037	0,048	0,052	0,045	0,020	0,030	0,036	0,043	0,037	0,042
-20	0,043	0,046	0,044	0,038	0,040	0,022	0,063	0,043	0,067	0,050	0,038	0,045	0,050	0,053	0,040	0,058	0,036	0,031	0,038	0,068	0,039	0,044
0	0,045	0,041	0,042	0,032	0,052	0,054	0,062	0,061	0,050	0,060	0,059	0,043	0,035	0,046	0,054	0,044	0,022	-0,021	0,047	0,061	0,043	0,026
20	0,043	0,045	0,054	0,049	-0,027	0,102	0,049	0,030	0,041	0,061	0,045	0,053	0,037	0,069	0,045	0,029	0,033	0,034	0,030	0,044	0,030	0,037
40	0,039	0,025	0,040	0,027	0,033	0,044	0,040	0,042	0,045	0,038	0,030	0,036	0,035	0,051	0,050	0,053	0,035	0,060	0,018	0,057	0,040	0,045
60	0,033	0,013	0,030	0,023	0,040	0,050	0,041	0,015	0,020	0,025	0,020	0,042	0,039	0,051	0,013	0,042	-0,004	0,032	0,031	0,034	0,030	0,001
80	0,027	0,027	0,025	0,029	0,027	0,035	0,030	0,016	0,024	0,030	0,045	0,027	0,025	0,013	0,037	0,030	0,029	0,018	0,016	0,018	0,027	0,034
100	0,022	0,024	0,055	0,029	0,010	0,024	0,015	0,068	0,035	0,018	0,023	0,016	0,022	0,021	0,021	0,038	0,034	0,032	0,019	0,019	0,017	0,026
120	0,018	-0,024	0,011	0,018	0,013	0,016	0,020	0,023	0,005	0,021	0,030	0,012	0,024	0,032	0,029	-0,016	0,028	0,036	0,004	0,009	0,032	0,004
140	0,014	0,015	0,038	0,041	0,020	-0,001	0,014	0,013	0,007	0,019	0,004	-0,005	0,014	0,013	0,002	0,020	0,043	0,024	0,017	0,025	0,024	0,021
160	0,012	-0,009	0,027	-0,022	0,014	-0,052	0,012	0,016	0,012	0,027	0,021	0,013	0,021	0,005	-0,010	0,013	0,012	-0,019	-0,005	0,011	0,023	0,001
180	0,010	0,010	0,025	0,008	0,011	0,003	0,009	0,009	0,010	0,033	0,012	0,000	0,009	0,011	-0,017	0,005	0,027	0,014	0,029	0,018	0,013	-0,006
200	0,008	0,015	0,008	0,015	0,017	0,015	0,008	0,016	0,001	0,022	-0,000	0,028	0,044	0,017	0,016	-0,007	0,015	0,007	-0,007	-0,001	0,019	0,010
$\varepsilon_k =$		0,0112	0,0123	0,0080	0,0062	0,0091	0,0068	0,0103	0,0088	0,0076	0,0108	0,0074	0,0071	0,0112	0,0120	0,0083	0,0081	0,0035	0,0109	0,0095	0,0070	0,0134

1. táblázat. Az x abszcissaértékű pontokra vonatkozóan a g feliratú oszlop a hibamentes graviméteres értékeket, a $k = 1; 2; \dots; 21$ feliratúak pedig a 21-féle természetes hiba-realizációval adódó 21 szimulált graviméteres „mérési adatrendszereket” adják meg.

A természetes hibák ε_k dihézióit a táblázat utolsó sora tartalmazza

Table 1. Error-free g_i values for different, by x characterized points are given in the second column (denoted by g). In the following 21 columns „measured” g values are given, using different realizations of the natural error. In the last line are the values of the ε_k diheisions of the natural errors

Az 1. táblázat utolsó sorának ε_k értékei nyilván már egyetlen (többlethibamentes) inverzió végrehajtásával adódtak k -nak mind a 21 értékére, ezekre a „mérési adat-

rendszerekre” tehát már megtörtént a P -norma abszolút minimumhelyének a meghatározása, azaz a

$$\min_{i=1}^n (4\varepsilon^2 + X_i^2) = \min. \quad (4)$$

feltételt az

$$\varepsilon^2 = 3 \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{(\varepsilon^2 + X_i^2)^2}}{\frac{1}{(\varepsilon^2 + X_i^2)^2}} \quad (5)$$

feltétellel együtt teljesítő $x_{0,k}$; b_k ; t_k és T_k paraméternégyes értékeinek a meghatározása, amely kifejezésekben X_i a mért és számított adatok különbsége:

$$X_i = g_i^{\text{mért}} - g_i^{\text{számított}}.$$

Sőt, ezen felül a

$$\delta_0 = \frac{1}{4} (|x_0 - x_{0,k}| + |b - b_k| + |t - t_k| + |T - T_k|) \quad (6)$$

modelltvolságok számítása is megtörtént, hiszen ezen alapult a 40 $g_i^{\text{mért}}$ szériából az 1. táblázatban található 21-nek a kiválasztása, mert a további vizsgálatok céljaira már csak azokat tartottuk szükségesnek alapul választani, amelyeknél a δ_0 modelltvolság nagyobb volt 10 m-nél. Úgy ítéltük ugyanis, hogy $\delta_0 < 10$ m esetén már csak ritkán indokolt mértékű pontossági igényeknél van valóban szükség a többlethiba-módszer alkalmazására (gyakorlati esetekben persze mindig tudjuk, hogy milyen pontosságot igénylünk).

Talán nem felesleges megjegyezni, hogy korábban döntöttek a szerzők mellett, hogy az $S = 0,02$ -höz tartozó statisztikus típusú természetes hibák 21 realizációja alapján teszik vizsgálat tárgyává a többlethiba-módszert a c -függés szempontjából, — a 21 eset még kezelhető gépidő szempontjából, de vélhetően elegendő is megbízható következtetések levonásához, — ehhez azonban nyilván olyan realizációkból vonható biztonságos következtetés, amelynél a $\delta_0 > 10$ m miatt valóban indokolt a többlethiba-módszert alkalmazni. A korábban már említett 40 db természetes-hiba-generálásnál jutottunk el addig, hogy 21 esetben volt δ_0 nagyobb 10 m-nél. Kérdezhetné valaki, miért éppen 21-re esett a választásunk, hiszen nyilván 20 vagy 22 „mérési” adatsorozat vizsgálata hasonló megbízhatóságú következtetések levonhatóságát eredményezte volna. A 21 választása ugyanis azzal a kényelemmel jár, hogy bármely jellemző értékeit sorba rendezve, a 11-ik a mediánt, a 4-ik az alsó szextilist, a 18-ik érték pedig a felső szextilist közvetlenül szolgáltatja.

A vizsgálatokban alkalmazandó c értékeit illetően triviális, hogy $c \ll 1$ választásával gyakorlatilag elhanyagolható a hibacsökkenés, ezért vizsgálatainkban a $c = 1$ mellett (amelyet a módszer definiáló STEINER [2002] példája is alkalmaz,) csak két kisebb c -t: $1/4$ -et és $1/2$ -et szerepeltettünk (csak a teljesség kedvéért, nem mintha ezen c -k alkalmazásával a $c = 1$ eseténél jobb pontosságjavulást vártunk volna). Munkánk során kiderült azonban, hogy 1-nél lényegesen nagyobb c -k is eredményesen (sőt, alkalmanként előnyösebben) alkalmazhatók, ezért a $c = 2$; 4; 8 és 16 eseteket is vizsgálat tárgyává tettük.

A többlethiba-realizációk az 1. táblázat mind a 21 esetben $c \cdot \varepsilon_k$ dihéziójuk voltak (a későbbi összehasonlítások

nagyobb megbízhatósága érdekében egyetlen többlethiba-realizáció adatait szoroztuk a mindenkor c -vel, ezt hajtottuk végre $N = 25$ -ször,) s mivel $a = 5$ -nek a szimmetrikus stabilis eloszlások közül leginkább az $\alpha = 1,677$ típusparaméterű felel meg (ld. HAJAGOS, STEINER [1995]-öt, vagy a STEINER (ed.) [1997] 328. oldalán levő táblázatot), a természetes és mesterséges hiba összegének $\bar{\varepsilon}_k$ dihézióját jó közelítéssel kapjuk meg az

$$\bar{\varepsilon}_k = \varepsilon_k \cdot (1 + c^{1,677})^{1/1,677} = \varepsilon_k \cdot \kappa \quad (7)$$

formulából, így a többlethibás adatrendszerek inverzióját a következő egyetlen minimumfeltétel teljesítésével hajthatjuk végre:

$$\min_{i=1}^n (4\kappa^2 \varepsilon_k^2 + \bar{X}_i^2) = \min., \quad (8)$$

ahol $\bar{X}_i$ -sal a többlethibás $\bar{g}_i^{\text{mért}}$ és a számított értékek különbségét jelöltük ($\bar{X}_i = \bar{g}_i^{\text{mért}} - g_i^{\text{számított}}$). A korábban már definiált c sorozatra a 2. táblázat adja meg a κ szorzótényező számértékeit. Ahogyan a jelen pont elején már megállapodtunk, $N = 5 \times 5 = 25$ ilyen inverziót hajtunk végre, végül minden modellparaméter mediánjaként képezve és ezeket felülvonással jelölve, a többlethiba-módszeralkalmazások utáni modelltvolságokat a

$$\delta = \frac{1}{4} (|x_0 - \bar{x}_{0,k}| + |b - \bar{b}_k| + |t - \bar{t}_k| + |T - \bar{T}_k|) \quad (9)$$

szerint számítjuk, a δ_0 -t definiáló (6)-tal teljesen analóg módon. A hibacsökkenést legegyszerűbben (minden k -ra és minden c -re) a δ/δ_0 hányadossal jellemezhetjük.

$\kappa = (1 + c^{1,677})^{1/1,677}$							
c	1/4	1/2	1	2	4	8	16
κ	1,057	1,176	1,512	2,362	4,229	8,145	16,09

2. táblázat. A (8) egyenletben szereplő κ mennyiség számértékei a mesterséges és természetes hibák különböző c arányaira vonatkozóan. (A mesterséges hibát is tartalmazó adatrendszerek dihéziója egyenlő $\kappa \cdot \varepsilon_k$ -val, ha ε_k a természetes hiba dihézióját jelöli)

Table 2. The numerical values of the quantity κ figuring in Eq. 8 in function of the c ratio of the artificial and natural errors. (The dihesion of the data set containing also artificial errors equals $\kappa \cdot \varepsilon_k$, where ε_k denotes the dihesion of the natural errors)

2.2. Vizsgálati eredmények a célszerűen alkalmazandó c -kre vonatkozóan

Ahhoz, hogy továbbfejlesztett variánszt definiáljunk dolgozatunk végén, nem tekinthetünk el számszerű eredményeink részletes ismertetésétől. Ezt a nagyméretű 3. táblázat tartalmazza, amely tulajdonképpen 21 db „kisméretű” táblázat minden k értékhez.

A k felvett értékeihez tartozó kis táblázatok $c = 0$ sorában nyilván az egyetlen inverziós lépéssel kapott x_0 , b , t és T paramétereket találjuk, a δ oszlopban ezért itt tulajdonképpen a δ_0 -ák állnak, így mind a 21 esetben az utolsó oszlop δ/δ_0 %-okban kifejezett értéke triviálisan 100%.

$k=1$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	22,88	45,27	61,92	76,89	17,33	100
0,25	19,14	39,76	74,27	92,24	8,22	47,40
0,50	18,03	38,86	75,07	93,79	7,58	43,71
1	15,68	39,01	77,23	95,99	5,86	33,80
2	10,01	40,15	81,87	97,27	3,69	21,29
4	9,92	38,21	83,95	95,99	4,92	28,37
8	8,34	37,99	83,90	100,1	3,58	20,65
16	-8,95	37,97	82,15	101,6	3,69	21,30
med	9,92	38,21	82,15	97,27	4,15	23,93

$k=6$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	4,12	24,35	50,27	82,85	16,66	100
0,25	3,36	32,70	64,01	90,00	9,16	54,99
0,50	3,47	32,15	57,88	91,47	10,49	62,97
1	0,00	37,82	71,37	95,99	3,70	22,23
2	0,00	39,97	75,87	98,15	1,50	9,01
4	0,01	40,02	76,15	99,90	0,99	5,95
8	0,04	41,96	76,01	102,0	1,99	11,93
16	9,92	42,21	75,71	104,2	5,15	30,93
med	0,01	40,02	75,87	99,90	1,06	6,38

$k=2$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-17,72	26,41	88,48	122,3	15,54	100
0,25	-18,01	36,43	88,67	113,5	10,93	70,35
0,50	-19,00	37,94	87,96	109,5	9,64	62,03
1	-23,69	42,00	84,47	107,6	9,44	60,78
2	-10,00	39,92	81,86	104,1	4,02	25,88
4	-9,90	39,94	79,98	103,9	3,46	22,27
8	-5,39	38,08	77,21	96,91	3,30	21,24
16	-8,55	40,48	75,71	104,1	4,36	28,08
med	-9,90	39,94	79,98	104,1	3,53	22,70

$k=7$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	2,97	22,36	56,38	86,99	14,31	100
0,25	2,40	34,24	71,58	95,01	5,40	37,70
0,50	3,88	37,80	73,28	95,79	4,25	29,72
1	0,01	37,94	75,99	96,02	2,52	17,58
2	-5,01	38,01	75,98	96,03	3,75	26,18
4	-5,00	38,05	78,01	98,09	2,71	18,96
8	2,15	38,06	84,01	100,0	2,03	14,19
16	0,04	38,00	76,15	98,28	1,90	13,30
med	0,01	38,01	76,15	98,09	1,94	13,56

$k=3$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	24,30	42,82	126,9	150,1	31,03	100
0,25	15,69	42,03	92,99	112,4	10,77	34,70
0,50	15,35	42,04	88,69	108,8	8,72	28,12
1	10,02	41,87	84,11	104,0	5,00	16,11
2	4,99	41,12	82,26	102,2	2,64	8,50
4	-3,30	42,02	77,74	100,1	1,91	6,15
8	-9,94	39,92	75,96	100,1	3,53	11,39
16	-9,20	42,06	75,86	104,1	4,86	15,68
med	-3,30	41,87	77,74	102,2	2,40	7,74

$k=8$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	6,52	16,33	49,74	92,26	17,05	100
0,25	4,03	31,29	65,34	90,42	9,25	54,23
0,50	3,44	29,46	63,62	90,86	9,87	57,92
1	0,00	37,67	75,51	95,77	2,76	16,20
2	-0,05	38,00	75,94	98,07	2,01	11,79
4	-5,01	40,27	77,22	99,79	2,07	12,12
8	-7,54	39,32	75,98	100,9	3,28	19,25
16	9,72	41,96	75,94	104,1	4,96	29,06
med	-0,05	39,32	75,94	99,79	1,25	7,34

$k=4$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	13,60	59,49	97,84	113,2	16,02	100
0,25	9,91	41,90	84,96	104,8	5,40	33,71
0,50	10,01	41,06	84,01	104,0	4,78	29,82
1	9,99	41,81	83,58	103,9	4,82	30,08
2	10,02	42,02	81,48	104,0	4,38	27,31
4	9,92	40,85	79,80	100,2	2,79	17,42
8	9,30	41,85	76,09	102,5	4,39	27,40
16	7,29	42,48	75,68	104,3	4,59	28,65
med	9,92	41,85	79,80	103,9	3,96	24,73

$k=9$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-7,03	18,47	49,39	90,82	17,09	100
0,25	-5,85	33,21	70,96	97,08	6,15	35,98
0,50	-5,00	37,02	73,77	98,81	3,85	22,52
1	-9,94	39,02	75,92	99,91	3,77	22,08
2	-9,86	38,19	75,94	100,2	3,97	23,23
4	-0,04	41,58	76,02	102,2	1,94	11,36
8	0,05	41,76	76,51	103,7	2,26	13,21
16	3,95	42,07	77,18	104,4	3,30	19,34
med	-0,04	41,58	76,02	102,2	1,94	11,36

$k=5$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-17,38	22,74	59,52	93,87	15,31	100
0,25	-15,78	35,80	70,37	94,03	8,90	58,09
0,50	-13,31	38,41	73,93	95,96	6,25	40,84
1	-10,02	38,13	76,00	97,23	4,67	30,47
2	-10,00	39,95	76,06	98,01	4,00	26,09
4	-9,95	40,95	76,03	98,43	4,11	26,84
8	-10,00	40,82	75,82	100,4	3,86	25,18
16	-8,43	42,08	75,81	104,1	4,70	30,72
med	-10,00	40,82	76,00	98,43	4,10	26,78

$k=10$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	17,52	72,28	95,34	108,1	18,41	100
0,25	14,44	44,24	84,90	104,6	7,05	38,28
0,50	10,02	42,25	84,14	104,2	5,15	27,98
1	9,98	40,94	81,91	104,0	4,19	22,78
2	10,01	39,94	76,02	102,2	4,06	22,05
4	10,00	40,11	75,89	101,5	3,92	21,19
8	9,93	42,03	75,86	104,1	5,06	27,49
16	9,97	42,90	74,35	105,0	5,88	31,94
med	9,98	40,94	75,89	104,0	4,75	25,77

$k=11$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-4,41	26,73	60,50	86,48	12,67	100
0,25	-4,03	32,76	67,63	92,46	7,79	61,50
0,50	-3,07	35,79	73,85	94,63	4,70	37,07
1	-3,03	37,98	75,82	95,98	3,31	26,12
2	-0,10	37,93	76,15	96,06	2,49	19,64
4	0,28	38,46	77,87	96,30	1,91	15,09
8	-4,80	38,10	77,98	96,19	3,13	24,71
16	-9,99	38,07	80,15	98,29	3,45	27,19
med	-3,07	38,07	77,87	96,19	2,72	21,49

$k=16$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-55,24	74,05	118,2	130,0	39,39	100
0,25	-41,15	51,11	94,21	109,8	19,07	48,41
0,50	-33,17	51,44	90,75	107,4	15,70	39,85
1	-10,04	44,04	86,49	103,8	6,09	15,46
2	-9,99	40,86	84,27	95,93	4,80	12,18
4	-9,93	37,98	84,52	95,61	5,21	13,24
8	-4,89	37,95	84,07	95,91	3,78	9,59
16	-9,97	37,91	88,20	95,57	6,17	15,67
med	-9,97	37,98	84,52	95,91	5,15	13,08

$k=12$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-8,15	34,59	93,26	117,1	10,98	100
0,25	-5,01	40,76	84,50	105,0	3,82	34,76
0,50	-6,45	41,94	84,10	104,0	4,12	37,54
1	-4,96	41,72	83,98	104,0	3,65	33,28
2	-9,94	41,01	82,11	103,9	4,24	38,64
4	-9,99	40,94	79,93	103,9	3,73	33,96
8	-9,94	42,03	75,82	104,0	5,04	45,95
16	-9,81	42,15	75,72	104,2	5,11	46,56
med	-9,94	41,72	79,93	104,0	3,92	35,72

$k=17$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-42,25	47,88	103,7	120,5	23,57	100
0,25	-18,61	38,88	86,52	105,0	7,82	33,19
0,50	-21,08	41,99	90,44	108,7	10,54	44,73
1	-10,08	41,15	84,16	100,5	3,99	16,91
2	-10,01	40,84	84,09	100,3	3,80	16,12
4	-9,99	40,91	84,05	98,07	4,22	17,91
8	-9,89	38,11	83,92	96,06	4,91	20,83
16	-9,94	38,07	84,09	96,12	4,96	21,05
med	-9,99	40,84	84,09	98,07	4,21	17,88

$k=13$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-10,96	41,74	54,57	73,85	16,07	100
0,25	-10,94	37,24	67,41	92,61	8,42	52,38
0,50	-10,00	38,01	71,44	96,09	6,12	38,05
1	-10,02	38,12	74,92	96,83	5,03	31,33
2	-5,05	39,11	75,90	98,00	3,01	18,72
4	-5,09	40,05	76,13	98,14	2,72	16,91
8	-5,04	41,07	76,06	99,74	2,58	16,03
16	-0,07	42,04	75,96	100,1	1,56	9,69
med	-5,05	40,05	75,96	98,14	2,75	17,11

$k=18$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	8,41	17,89	59,82	91,34	14,84	100
0,25	8,50	32,18	68,84	90,84	9,16	61,72
0,50	8,31	36,15	78,05	94,58	4,88	32,91
1	10,01	38,09	79,44	95,92	4,14	27,89
2	10,00	37,95	80,01	95,96	4,02	27,11
4	9,98	38,32	82,03	96,26	4,36	29,37
8	9,07	40,26	82,35	102,0	3,42	23,04
16	9,42	38,26	83,94	104,0	4,77	32,13
med	9,98	38,26	82,03	96,26	4,37	29,46

$k=14$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-7,13	51,60	60,64	74,76	15,83	100
0,25	-5,10	39,74	73,99	93,50	4,47	28,24
0,50	-4,98	38,68	75,82	95,92	3,64	23,01
1	-2,40	38,95	75,97	95,80	2,92	18,44
2	-3,64	39,91	77,09	96,00	2,66	16,79
4	9,91	40,87	79,71	97,71	3,34	21,08
8	9,95	40,89	82,31	99,90	3,31	20,92
16	9,94	41,58	83,93	95,96	4,87	30,77
med	9,91	40,87	79,71	96,00	3,77	23,80

$k=19$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	7,59	17,46	48,84	95,76	16,38	100
0,25	6,38	27,99	63,39	97,25	9,44	57,60
0,50	5,98	33,55	63,86	96,42	8,04	49,05
1	6,19	38,08	75,66	98,00	3,61	22,04
2	4,99	39,08	75,96	99,46	2,62	16,01
4	4,98	39,96	75,93	97,95	2,79	17,02
8	0,86	38,34	75,89	100,1	1,69	10,31
16	0,33	38,43	75,92	100,1	1,52	9,30
med	4,98	38,43	75,92	99,46	2,79	17,05

$k=15$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-5,07	63,63	63,44	76,52	17,18	100
0,25	-5,02	41,76	75,86	97,13	3,45	20,06
0,50	-3,30	41,68	75,90	97,09	3,00	17,45
1	-0,01	41,07	75,77	97,71	1,90	11,05
2	-9,98	40,04	75,97	98,03	4,01	23,32
4	-9,97	41,11	75,91	100,4	3,89	22,62
8	-9,87	42,05	75,98	103,8	4,94	28,74
16	-9,81	42,11	75,90	104,1	5,03	29,30
med	-9,87	41,11	75,91	100,4	3,86	22,47

$k=20$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-1,12	55,91	124,1	142,5	25,92	100
0,25	-1,13	41,53	88,98	109,3	5,23	20,18
0,50	0,08	42,08	87,21	107,4	4,18	16,14
1	0,97	41,00	84,00	103,9	2,48	9,55
2	3,70	40,94	83,81	103,9	3,07	11,86
4	4,98	40,93	82,00	103,8	2,92	11,27
8	-0,10	41,78	83,98	101,6	1,87	7,20
16	-2,30	41,98	83,91	95,92	3,07	11,84
med	0,97	41,00	83,91	103,8	2,41	9,31

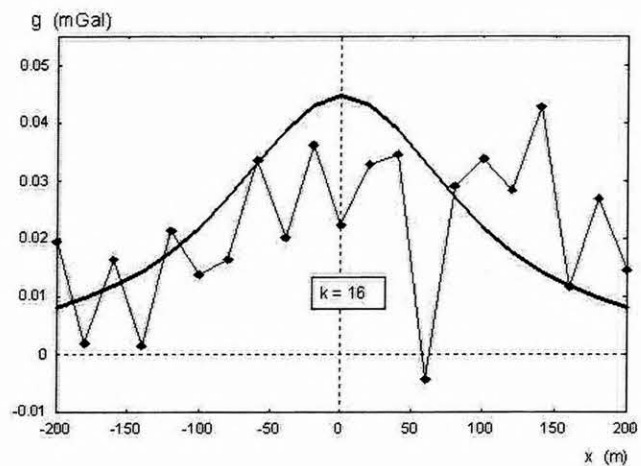
$k=21$						
c	x_0	b	t	T	δ	δ/δ_0
0	-14,08	58,73	58,47	68,02	21,58	100
0,25	-10,62	40,23	75,99	92,60	5,57	25,78
0,50	-8,17	38,47	77,89	94,04	4,44	20,59
1	-8,58	38,04	78,00	95,39	4,29	19,86
2	-5,03	38,99	79,97	96,02	2,51	11,65
4	-9,92	37,87	80,47	96,10	4,11	19,04
8	-9,72	37,96	78,25	95,81	4,42	20,50
16	-9,85	38,11	78,13	95,90	4,43	20,52
med	-9,72	38,04	78,25	95,90	4,38	20,30

3. táblázat. Az 1. táblázat mind a 21 „mérési” adatrendszeréhez egy-egy „kis táblázat” tartozik, amely a többlethibamentes inverzió négyféle modellparaméterként megadott eredményeit ($c = 0$) ugyanúgy tartalmazza, mint a 7-féle c arányhoz tartozóan a többlethiba-módszerrel kapottakat. A $c \neq 0$ sorok δ/δ_0 értékei tájékoztatnak a többlethiba-módszer hibacsökkentő hatásáról. A med jelű sorban a $c = 1; 2; 4; 8$ és 16 értékekhez kapott modellparaméterek mediánjai szerepelnek, valamint az ezekhez tartozó δ , ill. δ/δ_0 értékek. Ha egy vagy több zérus van a tizedesvessző után, nem írtunk számjegyet(ek)et

Table 3. For all 21 “measured data sets” given in Table 1 is given a separate Table (in this great Table 3.) constructed in just the same way. In the row denoted by $c = 0$ are given the model parameter values as the result of the “one step inversion”. In the following seven rows the values of the model parameters are given using the surplus error method. In this rows the δ/δ_0 values inform us about the effectiveness of the surplus error method: the model distances are much less than in case of the one step inversion. In the last row the medians for all four model parameters are given; only the $c = 1; 2; 4; 8$ and 16 cases were taken into consideration (see Fig. 3)

A 2. ábrán nullkörökkel szemléltetett, $k = 16$ -hoz tartozó esetben nem csoda, hogy a δ_0 modelltávolság igen nagy: csaknem 40 m-es értéket ér el, de többlethiba-módszerrel a δ modelltávolságok itt is lecsökkenthetők 4–6 méterre. Ez most is persze ugyanazt jelenti (és ugyanúgy lenne igazolható), mint a HAJAGOS, STEINER [2003c]-ben vizsgált esetre vonatkozóan, hogy ti. kvarcgraviméterrel mérve (amikor is felvett modellünk esetén a 2. ábra szerint a hibamentes értékek teljes tartománya nem egészen kétszerese a természetes hibák nagyságát jellemző interszeptilis terjedelemnek), — de a többlethiba-módszert alkalmazva az inverzió végeredményét jelentő modellparaméterek pontossága megegyezik azzal a pontossággal, amelyet egyetlen inverziós lépéssel csak akkor sikerülne elérnünk, ha módunkban állna drága mikrograviméteres méréssel nyert $g_i^{\text{mért}}$ adatrendszerből kiindulni.

A $k = 21$ -féle természetes hibához tartozó kis táblázatok mindegyike közli a mesterséges hibanagyságok $c = 1/4; 1/2; 1; 2; 4; 8$ és 16 arányaira többlethiba-módszerrel adódó $\bar{x}_{0,k}, \bar{b}_k, \bar{t}_k$ és $\bar{T}_k$ modellparamétereket az x_0, b, t és T -vel feliratozott oszlopokban, valamint az ezekből (9) szerint számított δ modelltávolságokat, végül a módszer hatékonyságát az éppen alkalmazott c -nél jellemző δ/δ_0 hányados. A vonallal elválasztott med jelű sorban a $c = 1; 2; 4; 8$ és 16 hibaarányokra adódó 5–5 modellparaméter mediánjait találjuk (ld. a 3. pont megfontolásait).



2. ábra. A folytonos vonalú görbe az 1. ábra szerinti modell hibamentes graviméteres hatását mutatja (a számértékek az 1. táblázat g felirátú oszlopában találhatók). A nullkörök a szimulált mérési adatrendszer egy realizációját szemléltetik (az 1. táblázat 21-féle realizációi közül a tizenhatodikat választottuk)

Fig. 2. The continuous line demonstrates the error-free g values of the model given in Fig. 1 (for numerical values see the second (g) column of Table 1). The set of points represent simulated “measured” values as one realisation of the possible “natural errors” is already superponated (see the k^{th} column in Table 1)

Az áttekintés megkönnyítésére, végül is a c -től való függés törvényszerűségeinek könnyebb megállapítására a 4. táblázatban együtt közöljük az összes δ/δ_0 hányadosot, az egyes c -khez tartozó alsó sextilist (Q_a -t), a mediánt (med_c -t), valamint a felső sextilist (Q_f -et) is. Mindezeket a mennyiségeket a 3. ábra mutatja be: a δ/δ_0 százalékos értékeit pontokkal ábrázoltuk, a c -nek $1/4; 1/2; 1; 2; 4; 8$ és 16 értékeihez a δ/δ_0 -k mediánjainak szomszédos értékeit, valamint az alsó és felső sextiliseket egyenesekkel kötöttük össze. (A 4. táblázat a 3. ábrához viszonyítva egy sorral ad meg több adatot, amennyiben a 3. táblázat összes med sorában levő δ/δ_0 hányadosokat is közli.)

3. A többlethiba-módszer továbbfejlesztett változata

Verő József akadémikus kérdésére adott válaszuk egyben a többlethiba-módszer továbbfejlesztett változata.

A 3. ábráról egyértelműen leolvasható ugyan, hogy a $c = 4$ választása általában célszerűbb, mint a STEINER [2002] szerinti $c = 1$ alkalmazása, de ez csak statisztikusan igaz: a 4. táblázatból láthatóan a $k = 7; 13$ és 19 esetekben a $c = 16$ választás az összes többinél kisebb δ/δ_0 hányadosot produkál, a $k = 7; 12; 14; 15; 17; 18$ és 20 esetekben pedig a $c = 1$ alkalmazásával kisebbek a δ/δ_0 értékek, mint a $c = 4$ mesterséges-természetes hibaarányra vonatkozó (a $k = 15$ természetes hiba esetén $c = 1$ -nél δ/δ_0 kisebb, mint a $c = 4$ -re adódó δ/δ_0 fele, a többi idézett esetekben azonban lényegesen kisebbek az eltérések).

A többlethiba-módszer továbbfejlesztett változata tehát annyiban különbözik a STEINER [2002]-ben megadott eredeti verziótól, hogy a többlethibanagyság és a természetes hibánagyság arányára vonatkozóan is konkrét javaslatokkal él: a $c = 1; 2; 4; 8$ és 16 arányokra hajtandó végre a többlethiba algoritmus, és az így adódó 5 darab modellparaméter

és Q_a közötti sávja $c = 16$ -nál ($\log_2 c = 4$ -nél) már szignifikáns növekedésnek készül indulni, így feltehető, hogy hiába a hibáknak egyre jobban érvényesülő szimmetrikus jellege, extrém nagy hiba esetén nyilván a P -norma minimalizálása alapján működő inverziós algoritmus sem képes már olyan modellparaméter pontosságokat produkálni a többlethibamódszer keretében, hogy e mediánok mediánjaként adódó modellparaméterekkel számított, a valódi modelltől mért δ modelltávolság ne legyen már kedvezőtlenül nagy: a 3. ábra δ/δ_0 értékei a c további növelésével valószínűleg egyre tovább növekednének. (A 3. ábra bal oldalán a c -nek nullához, azaz $\log_2 c$ -nek a $-\infty$ -hez tartásával triviális, hogy itt a δ/δ_0 értékek aszimptotikusan fognak a 100%-hoz tartani. Mindenesetre érdekes, hogy ez a tendencia már a $c = 1/2$ és $c = 1/4$ esetében kezd jelentkezni a Q_f és Q_a közötti sáv balra „görbülésével”.) — A nagy c -k bizonyos határig való kedvező alkalmazhatósága derülve ki a VERŐ József akadémikus által inicializált vizsgálatainkból, nagy örömünkre szolgált, hogy ennek felhasználásával megbízhatóbbá sikerült tenni a többlethibák módszerét.

HIVATKOZÁSOK

- DUTTER R. 1986/87: Mathematische Methoden in der Montangeologie. Vorlesungsnotizen. Kézirat, Leoben
- HAGAGOS B., STEINER F. 1995: Symmetrical stable probability distributions nearest lying to the types of the supermodel $f_a(x)$. Acta Geod. Geoph. Hung. **30**, 2–4
- HAGAGOS B., STEINER F. 2003a: War against error using the method of surplus errors. Acta Geod. Geoph. Hung. **38**, 4
- HAGAGOS B., STEINER F. 2003b: Effectiveness of the surplus error method in function of the number N of the applied surplus error sets. Acta Geod. Geoph. Hung. **38**, 4
- HAGAGOS B., STEINER F. 2003c: A többlethiba-módszer tesztje egy egyszerű 3-D-modelleken. Magyar Geofizika **44**, 3
- JUNG K. 1961: Schwerkraftverfahren in der angewandten Geophysik. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig
- STEINER F. 1990: A geostatistika alapjai. Tankönyvkiadó, Budapest
- STEINER F. (ed.) 1997: Optimum Methods in Statistics. Akadémiai Kiadó, Budapest
- STEINER F. 2002: A mérési adatokból nyert információk hibáinak csökkentése általunk ismételt generált többlethibáknak a mérési adatokra történő superponálásával. Magyar Geofizika, **43**, 2