

# A totális gravitációs variométer megvalósíthatóságának igazolása a Stegena-inga mozgásegyenletének megoldásával<sup>1</sup>

JUHÁSZ SÁNDOR<sup>2</sup>

*A dolgozatban a Stegena-inga mozgásegyenletének megoldását tárgyalom. Bebizonyítom, hogy e torziós ingával a nehézségi erőter potenciáljának valamennyi második deriváltja mérhető!*

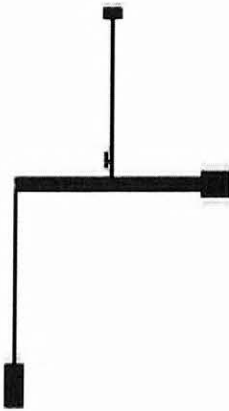
**S. JUHÁSZ: Feasibility of the total gravity variometer: solution of the equation of motion of the Stegena's torsion balance**

*The paper discusses the solution of the equation of motion of Stegena balance. It proves that the Stegena balance measures all 2<sup>nd</sup> derivatives of gravity potential.*

## Bevezetés

Ismert, hogy EÖTVÖS Loránd korát messze meghaladó torziós ingájával a nehézségi gyorsulásnak a billiomod részével való térbeli megváltozása (1 eötvös) is kimutatható (1 Eötvös egység = 1 eötvös =  $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ).

Az Eötvös-ingában az ingarúd igen vékony fémszálon függ, horizontális variométerként ismert változatában a vízszintes ingarúd egyik végén a (másikkal egyenlő nagyságú) terhelő tömege mélyebben van felfüggesztve. Az inga a függőleges tengely körül leng az inhomogén nehézségi erőterreltől származó forgatónyomaték hatására, amelyet a felfüggesztő szál csavarási nyomatéka csillapít. Az egyensúlyi állapotok megfigyeléséből következtetni lehet a nehézségi erőter helybeli változását jellemző mennyiségekre. EÖTVÖS torziós ingájával — a függőleges gradiens kivételével — a nehézségi potenciál minden második deriváltja meghatározható.



1. ábra. Az Eötvös-inga vázlata

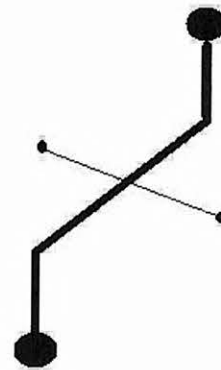
Fig. 1. The scheme of Eötvös's balance

A kutatók körében több próbálkozás is született a hiányzó függőleges gradiens meghatározására, graviméteres méréstől a külön e célra tervezett műszer megalkotásáig. Ezek a módszerek meg sem közelítik EÖTVÖS Loránd műszere eredményeinek eleganciáját, s főleg pontosságát!

STEGENA Lajos torziós ingájának ötlete rendkívül jelentős. A jelen cikk szerzőjét 1970-ben bízta meg a professzor az elképzelés igazolásával. A Stegena-inga mozgásegyenletét 1971-ben sikerült megoldani.

## A Stegena-inga

A Stegena-ingában az ingarúd igen vékony, mindkét végén befogott, vízszintes fémszálon fekszik, vízszintes ingarúdja egyik végén a terhelő tömegét egy függőlegesen felfelé álló, a másik végén lévő pedig függőlegesen lefelé álló merev kar tartja. Az egész ingatest a torziós szátra vonatkozóan középpontosan szimmetrikus, akár alakját, akár tömegeloszlását nézzük. A Stegena-inga a vízszintes tengely körül leng az inhomogén nehézségi erőterreltől származó forgatónyomaték hatására, amelyet a tartó torziós szál csavarási nyomatéka csillapít. Az egyensúlyi állapotok megfigyeléséből következtetni lehet a nehézségi erőter változását jellemző mennyiségekre.



2. ábra. A Stegena-inga vázlata

Fig. 2. The scheme of Stegena's balance

STEGENA Lajos torziós ingájával — *a függőleges gradiens is beleértve* — az Eötvös-tenzor minden eleme meghatározható. Ha ez igaz, akkor a Stegena-féle torziós ingát joggal nevezhetjük totális gravitációs variométernek.

*A jelen dolgozat célja ezen állítás igazolása.*

<sup>1</sup> Beérkezett: 2005. február 28-án

<sup>2</sup> jusan@enternet.hu

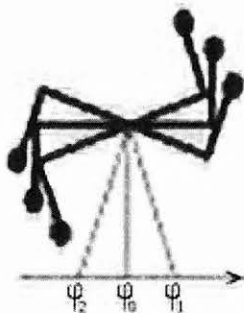
## A műszereskáláról

A Stegena-inga skáláját a műszerhez rögzítettnek képzeljük. Így például ha a Stegena-ingát valamelyik tengelye körül elforgatjuk, vele együtt elforgatjuk a skálát is. Ha a felfelé álló kar emelkedik, akkor a kitérés szöge nő. Ez a pozitív kilengésirány, azaz a kitérés előjele a következőképpen értelmezzük:

$$\frac{\varphi_1}{|\varphi_1|} = +1 \quad \text{és} \quad \frac{\varphi_2}{|\varphi_2|} = -1.$$

Mivel nem tudjuk, hol van  $\varphi_0 = 0$ , helyesebb azt mondani, hogy

$$\varphi_1 > \varphi_2.$$



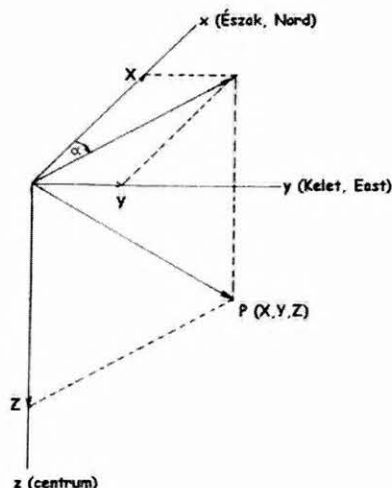
3. ábra. A Stegena-inga kitérésének előjele

Fig. 3. The sign of deflection of Stegena's balance

## Az azimut értelmezése

A Stegena-inga kitérése inhomogén erőterben függ tájolásának földrajzi azimutjától is.

Az azimut szöge ( $\alpha$ ) akkor zérus, ha a Stegena-inga síkja É–D-i irányban áll, és a felfelé mutató kar van közelebb É-hoz. Az azimut értéke nő, ha a műszert függőleges tengelye körül az É-i irányból a K-i irány felé forgatjuk. Ez a pozitív forgatásirány.



4. ábra. Az égtájakhoz kötött koordináta-rendszer

Fig. 4. The system of co-ordinates joined in the cardinal points

## A koordináta-transzformációk

1) A felszíni mérési ponthoz és az égtájakhoz kötött  $K$  és az ettől (a  $Z$  tengely körül)  $\alpha$  szöggel (az azimut értékével) elforgatott  $K'$  koordináta-rendszer között a következő összefüggések érvényesek:

$$\begin{aligned} X &= X' \cos \alpha - Y' \sin \alpha, \\ Y &= X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha, \\ Z &= Z'. \end{aligned} \quad (1)$$

2) Az azimutális  $K'$  és az erőter hatására  $\varphi$  szöggel kitért Stegena-inga  $\kappa$  koordináta-rendszere között az alábbi összefüggések állnak fenn (a Stegena-inga forgástengelye az  $Y'$  tengellyel egybeesik):

$$\begin{aligned} X' &= \xi \cos \varphi + \zeta \sin \varphi, \\ Y' &= \eta, \\ Z' &= -\xi \sin \varphi + \zeta \cos \varphi. \end{aligned}$$

3) Ezek után a mérési hely  $K$  koordináta-rendszere és a Stegena-ingához rögzített  $\kappa$  koordináta-rendszer között a következő transzformáció érvényes:

$$\begin{aligned} X &= (\xi \cos \varphi + \zeta \sin \varphi) \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ Y &= (\xi \cos \varphi + \zeta \sin \varphi) \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \\ Z &= -\xi \sin \varphi + \zeta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

## A mozgásegyenlet

Általában az ingamozgást végző testek mozgásegyenlete a következő:

$$\theta_\eta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_{i=1}^n M_i, \quad (3)$$

ahol

$\theta_\eta$  — a Stegena-inga tehetetlenségi nyomatéka az  $\eta$  forgástengelyre vonatkoztatva,

$\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  — a Stegena-inga szöggyorsulása,

$\sum M_i$  — mindazon forgatónyomatékok összege, amelyek a Stegena-ingára hatnak:

$$\sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^4 M_i = M_g - M_\tau - M_s. \quad (4)$$

Az egyes forgatónyomatékok:

1) Ha a forgómozgáshoz tartozó súrlódási erő arányos a szögsebességgel, azaz

$$F_s \sim \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5)$$

akkor ( $\mu$ -vel jelölve a csillapítási együtthatót) a súrlódási erő forgatónyomatéka

$$M_s = 2 \cdot \mu \cdot \theta_\eta \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \quad (6)$$

2)  $M_\tau$  a Stegena-inga forgástengelyében lévő torziós szál forgatónyomatéka:

$$M_\tau = \tau \varphi \quad (\tau: \text{a torziós szál torziómodulusa}). \quad (7)$$

A variométer feladata lényegében egy nagyon kicsiny rugalmas deformációnak a mérése. Ennek észlelhetővé tételére alkalmazzák az *asztatizálást*. Az asztatizáló erő egy segéderő, amely ezzel a deformációval együtt lép fel és vele arányosan nő. A lényeg az, hogy az egész rugalmas rendszer közel legyen a labilis egyensúlyi helyzetéhez, ezáltal jól mérhető kitéréseket észlelhetünk.

Ilyen esetben a  $\tau$  torziómodulusz helyettesíthető:

$$\tau' = \tau - T \quad (T: \text{az asztatizáló erő torziómodulusza}). \quad (8)$$

3)  $M_g$  a nehézségi erőnek az  $\eta$  tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka. Ennek részletezésekor vegyük figyelembe, hogy általában kétféle vektorfelbontás között a kapcsolat ( $\alpha$  szögű elforgatás esetén) ugyanaz, mint a koordináta-rendszerek elforgatása között. Mivel  $M_g$  tulajdonképpen  $M_{y'}$  (vagy, ha úgy tetszik,  $M_\eta$ ), az (1) koordináta-transzformáció inverze pedig

$$\begin{aligned} X' &= X \cos \alpha + Y \sin \alpha, \\ Y' &= -X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \\ Z' &= Z, \end{aligned}$$

ezért

$$M_{y'} \equiv M_g = -M_x \sin \alpha + M_y \cos \alpha, \quad (9)$$

ahol

$$\begin{aligned} M_x &= \int_V (y g_z - z g_y) dm, \\ M_y &= \int_V (z g_x - x g_z) dm. \end{aligned} \quad (10)$$

Az integrálok a Stegena-inga testének teljes térfogatára vonatkoznak.

Tehát az (3) mozgásegyenlet teljes alakja:

$$\theta_\eta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M_x \sin \alpha + M_y \cos \alpha - \tau \varphi - 2\mu \theta_\eta \frac{d\varphi}{dt}.$$

### A nehézségi erő forgatónyomatéka

Ennek meghatározásához a (9) és a (10) összefüggéseket fejtsük ki részletesen! Ehhez az ismert összefüggés szerint a nehézségi erőter felírható egy skaláris potenciáltér negatív gradienseként:

$$\mathbf{g} = -\nabla W = \left[ -\frac{\partial W}{\partial x}, -\frac{\partial W}{\partial y}, -\frac{\partial W}{\partial z} \right].$$

A mérési hely  $K$  koordináta-rendszerének kezdőpontját a Stegena-inga geometriai középpontjába helyezzük. Ekkor az egyes összetevők értéke az  $(x, y, z)$  koordinátájú helyen, Taylor-soruk felhasználásával, tömör írásmóddal:

$$\begin{aligned} -g_x &= W_{x0} + x \cdot W_{xx0} + y \cdot W_{xy0} + z \cdot W_{xz0} + \dots, \\ -g_y &= W_{y0} + x \cdot W_{yx0} + y \cdot W_{yy0} + z \cdot W_{yz0} + \dots, \\ -g_z &= W_{z0} + x \cdot W_{zx0} + y \cdot W_{zy0} + z \cdot W_{zz0} + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

ahol

$$W_{i0} = \left( \frac{\partial W}{\partial i} \right)_{(x,y,z)=(0,0,0)} \quad \text{és} \quad W_{ij0} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial i \partial j} \right)_{(x,y,z)=(0,0,0)},$$

az  $i$  és  $j$  index az  $x$ ,  $y$  és  $z$  komponens-indexek bármelyike lehet.

A  $Z$  tengely — definíciójából következően — párhuzamos  $\mathbf{g}$ -vel; ezért

$$W_{x0} = W_{y0} = 0, \quad W_{z0} = -g_0. \quad (12)$$

A (11) és (12) összefüggések figyelembevételével, a (11)-ben ki nem írt tagok elhanyagolásával, a (10) összefüggések a következők lesznek:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_V (y g_0 - x y W_{xz} - y^2 W_{yz} - y z W_{zz} + x z W_{xy} + y z W_{yy} + \\ &+ z^2 W_{yz}) dm = \int_V [y z (W_{yy} - W_{zz}) - x y W_{xz} + \\ &+ (z^2 - y^2) W_{yz} + x z W_{xy} + y g_0] dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_V (-x z W_{xz} - y z W_{xy} - z^2 W_{xz} - x g_0 + x^2 W_{xz} + \\ &+ x y W_{yz} + x z W_{zz}) dm = \int_V [x z (W_{zz} - W_{xz}) - \\ &-(x^2 - z^2) W_{xz} + x y W_{yz} - y z W_{xy} - x g_0] dm \end{aligned}$$

A (2) transzformáció alkalmazása és a trigonometrikus átalakítások után

$$\begin{aligned} M_g &= \int_V (\xi^2 - \zeta^2) dm \cdot \left[ \frac{\sin 2\varphi}{2} (\cos^2 \alpha \cdot W_{xx} + \sin^2 \alpha \cdot W_{yy} - \right. \\ &- W_{zz} + \sin 2\alpha \cdot W_{xy}) + \cos 2\varphi (\cos \alpha \cdot W_{xz} + \sin \alpha \cdot W_{yz}) \left. \right] + \\ &+ \int_V \xi \zeta dm \cdot \left[ -\cos 2\varphi (\cos^2 \alpha \cdot W_{xx} + \sin^2 \alpha \cdot W_{yy} - W_{zz} + \right. \\ &+ \sin 2\alpha \cdot W_{xy}) + 2 \sin 2\varphi (\cos \alpha \cdot W_{xz} + \sin \alpha \cdot W_{yz}) \left. \right] + \\ &+ \int_V \eta^2 dm \cdot [\text{zérus}] + \\ &+ \int_V \xi \eta dm \cdot \left\{ -\sin \varphi \left[ \frac{\sin 2\alpha}{2} (W_{xx} - W_{yy}) - \cos 2\alpha \cdot W_{xy} \right] - \right. \\ &- \cos \varphi (\sin \alpha \cdot W_{xz} - \cos \alpha \cdot W_{yz}) \left. \right\} + \\ &+ \int_V \eta \zeta dm \cdot \left\{ \cos \varphi \left[ \frac{\sin 2\alpha}{2} (W_{xx} - W_{yy}) - \cos 2\alpha \cdot W_{xy} \right] - \right. \\ &- \sin \varphi (\sin \alpha \cdot W_{xz} - \cos \alpha \cdot W_{yz}) \left. \right\} \\ &+ \int_V \xi dm \cdot [-\cos \varphi \cdot g_0] + \int_V \zeta dm \cdot [-\sin \varphi \cdot g_0] + \\ &+ \int_V \eta dm \cdot [\text{zérus}] \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\int_V \xi^2 dm = A, \quad (13)$$

$$\int_V \zeta^2 dm = B, \quad (14)$$

$$\int_V \xi \eta dm = C, \quad (15)$$

$$\int_V \eta \zeta dm = D, \quad (16)$$

$$\int_V \xi \zeta dm = E, \quad (17)$$

$$\int_V \xi dm = F, \quad (18)$$

$$\int_V \zeta dm = G. \quad (19)$$

Tételezzük fel, hogy a Stegena-inga szögkitérése nagyon kicsi. Akkor igazak a következő közelítések:

$$\begin{aligned} \varphi &\approx 0, \\ \sin \varphi &\approx \varphi, \\ \cos \varphi &\approx 1, \\ \varphi^2 &\approx 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Így a (13)–(20) összefüggések figyelembevételével  $M_g$  a következő lesz:

$$M_g = R\varphi + Q, \quad (21)$$

ahol

$$\begin{aligned} R = & -(A-B)W_{zz} + \left[ (A-B)\cos^2 \alpha - \frac{C}{2}\sin 2\alpha \right] W_{xx} + \\ & + \left[ (A-B)\sin^2 \alpha + \frac{C}{2}\sin 2\alpha \right] W_{yy} + [(A-B)\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha] W_{xy} + \\ & + [4E\cos \alpha - D\sin \alpha] W_{xz} + [4E\sin \alpha + D\cos \alpha] W_{yz} - Gg_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = & EW_{zz} - \left[ E\cos^2 \alpha - \frac{D}{2}\sin 2\alpha \right] W_{xx} - \\ & - \left[ E\sin^2 \alpha + \frac{D}{2}\sin 2\alpha \right] W_{yy} - \\ & - [E\sin 2\alpha + D\cos 2\alpha] W_{xy} + \\ & + [(A-B)\cos \alpha - C\sin \alpha] W_{xz} + \\ & + [(A-B)\sin \alpha + C\cos \alpha] W_{yz} - Fg_0. \end{aligned} \quad (22)$$

### A mozgásegyenlet megoldása

A (3)–(9) és (21) összefüggések alapján — a (11), (12) és (20) feltevések figyelembevételével — a rendszer mozgásegyenlete:

$$\theta_\eta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = R\varphi + Q - \tau\varphi - 2\mu\theta_\eta \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ez átrendezhető

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\mu \frac{d\varphi}{dt} + k^2 \left( \varphi - \frac{n}{k^2} \right) = 0 \quad (23)$$

alakba, ahol

$$k^2 = \frac{\tau - R}{\theta_\eta} \quad (24)$$

és

$$n = \frac{Q}{\theta_\eta}. \quad (25)$$

Mivel feltehető, hogy legalább a mérés időtartama alatt

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d^2 n}{dt^2} = \frac{d(k^2)}{dt} = \frac{d^2(k^2)}{dt^2} = 0, \quad (26)$$

így az

$$\varepsilon = \varphi - \frac{n}{k^2}$$

függvény bevezetésével (23) a következő alakú lesz:

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2\mu \frac{d\varepsilon}{dt} + k^2 \varepsilon = 0. \quad (27)$$

Ez a csillapított rezgőmozgás ismert differenciálegyenlete. Keressük ennek a differenciálegyenletnek egy megoldását

$$\varepsilon(t) = e^{\lambda t}$$

alakban. Behelyettesítés után a

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + k^2 = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk. A két gyök:

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - k^2}. \quad (28)$$

A (27) egyenlet általános megoldása az  $e^{\lambda_1 t}$  és  $e^{\lambda_2 t}$  partikuláris megoldások lineáris kombinációjából tevődik össze:

$$\varepsilon(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (29)$$

ahol  $c_1$  és  $c_2$  állandók a kezdeti feltételek alapján határozódnak meg. Ehhez oldjuk meg a (27) egyenletet a következő (általános) kezdőfeltételek mellett:

$$\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0, \quad \dot{\varepsilon}(t=0) = \dot{\varepsilon}_0.$$

Az  $\dot{\varepsilon}(t)$  szögsebességet (29) deriválásával kapjuk:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t},$$

így  $t=0$ -nál

$$\varepsilon_0 = c_1 + c_2, \quad \dot{\varepsilon}_0 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2. \quad (30)$$

Ezekből  $c_1$  és  $c_2$  meghatározható:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_0 & 1 \\ \dot{\varepsilon}_0 & \lambda_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{\varepsilon_0 \lambda_2 - \dot{\varepsilon}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_0 \\ \lambda_1 & \dot{\varepsilon}_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

A karakterisztikus egyenlet (28) gyökei szerint három esetet különböztetünk meg.

1) A *gyengén csillapított eset*:  $\mu^2 < k^2$  (azaz a csillapítási együttható egy bizonyos értéknél kisebb). Ekkor (28) szerint

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega_1, \quad (31a)$$

ahol

$$\omega_1 = \sqrt{k^2 - \mu^2}. \quad (31b)$$

Ebből

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -2i\omega_1.$$

Tehát a kezdeti feltételeket kielégítő (általános) megoldás  $\mu^2 < k^2$  esetén:

$$\varepsilon_1(t) = e^{-\mu t} \left( \frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \varepsilon_0 \cos \omega_1 t \right).$$

2) Az erősen csillapított eset:  $\mu^2 > k^2$  (azaz a csillapítási együttható egy bizonyos értéknel nagyobb.) Ekkor is érvényes a (29) általános megoldás, azaz most is

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega_2,$$

ahol viszont

$$\omega_2 = \sqrt{\mu^2 - k^2}$$

és

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -2\omega_2.$$

Vagyis az általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldás  $\mu^2 > k^2$  esetén:

$$\varepsilon_2(t) = e^{-\mu t} \left( \frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_2} \operatorname{sh} \omega_2 t + \varepsilon_0 \operatorname{ch} \omega_2 t \right).$$

3) Az aperiodikus eset:  $\mu^2 = k^2$  (azaz határeset az előző kettő között). Ekkor

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = -\mu$$

és így a (30) egyenletrendszer elveszti egyértelműségét. Ebben az esetben viszont a (27) differenciálegyenletnek van egy szinguláris megoldása is:

$$\varepsilon_{\text{szing}}(t) = t e^{\lambda_0 t}.$$

Így az általános megoldás

$$\varepsilon(t) = e^{\lambda_0 t} (c_1 + c_2 t),$$

deriváltja pedig

$$\dot{\varepsilon}(t) = e^{\lambda_0 t} [\lambda_0 c_1 + (\lambda_0 t + 1)c_2].$$

Ezek alapján  $t=0$ -nál

$$\varepsilon_0 = c_1 \quad \text{és} \quad \dot{\varepsilon}_0 = -c_1 \mu + c_2,$$

azaz

$$c_1 = \varepsilon_0 \quad \text{és} \quad c_2 = \dot{\varepsilon}_0 + \varepsilon_0 \mu.$$

Így a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás az aperiodikus esetre:

$$\varepsilon_3(t) = e^{-\mu t} [(\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0)t + \varepsilon_0].$$

### A megoldásfüggvény kiválasztása

Bevezetve az

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_1} \right)^2 + \varepsilon_0^2}, \quad \delta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_0}{\frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_1}},$$

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_2} \right)^2 - \varepsilon_0^2}, \quad \delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_0}{\frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_2}},$$

$$\tilde{\varepsilon}_3 = \frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_3}, \quad \delta_3 = \frac{\varepsilon_0}{\frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_3}}$$

jelöléseket, a három csillapítási eset megoldásfüggvényei összehasonlíthatókká válnak:

$$\varepsilon_1(t) = e^{-\mu t} \left( \frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \varepsilon_0 \cos \omega_1 t \right) = e^{-\mu t} \tilde{\varepsilon}_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1),$$

$$\varepsilon_2(t) = e^{-\mu t} \left( \frac{\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0}{\omega_2} \operatorname{sh} \omega_2 t + \varepsilon_0 \operatorname{ch} \omega_2 t \right) = e^{-\mu t} \tilde{\varepsilon}_2 \operatorname{sh}(\omega_2 t + \delta_2),$$

$$\varepsilon_3(t) = e^{-\mu t} [(\varepsilon_0 \mu + \dot{\varepsilon}_0)t + \varepsilon_0] = e^{-\mu t} \tilde{\varepsilon}_3 (\omega_3 t + \delta_3).$$

Ha a  $\tilde{t} = \omega_i t + \delta_i$  „módosított” idő függvényében ábrázoljuk a megoldásfüggvényeket, és az összehasonlítás kedvéért feltesszük, hogy  $\tilde{\varepsilon}_i$ ,  $\mu$ ,  $\omega_i$  értékei azonosak a különböző  $i$  indexek esetén, akkor azt találjuk, hogy leggyorsabban  $\varepsilon_1(t)$  konvergál az egyensúlyi helyzetéhez.

Ezenkívül más — nem kizárólag esztétikai — okok is amellet szólnak, hogy a  $\mu^2 < k^2$  relációval jellemezhető gyengén csillapított esetet, vagyis a csillapított rezgőmozgás esetét valósítsuk meg. (Ilyen ok például az, hogy a megfigyelt amplitúdók viszonyából következtethetünk a csillapodásra, majd ennek ismeretében, a  $T$  periódusidőt mérve, a  $k^2$  értéke is meghatározható a  $k^2 = \omega^2 + \mu^2$  összefüggés alapján.)

Legyen

$$c_{1,2} = \frac{C_0}{2} e^{-i(\delta \pm \frac{\pi}{2})}$$

Így a csillapódó rezgőmozgásra megkapjuk a jól ismert alakot:

$$\varepsilon(t) = C_0 e^{-\mu t} \sin(\omega t + \delta). \quad (32)$$

A  $C_0$  és  $\delta$  állandók meghatározására szolgáló kezdőfeltételek:

$$\varepsilon(t=0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(t=0) = \phi_0. \quad (33)$$

A szögsebességet (32) deriválásából kapjuk:

$$\dot{\varepsilon}(t) = C_0 e^{-\mu t} \{ \omega \cos(\omega t + \delta) - \mu \sin(\omega t + \delta) \}. \quad (34)$$

Ha most a (33) feltételeket (32)-be és (34)-be helyettesítjük, akkor:

$$0 = \sin \delta, \quad \phi_0 = C_0 \omega,$$

tehát a (33)-nak megfelelő megoldás:

$$\varepsilon(t) = \frac{\phi_0}{\omega} e^{-\mu t} \sin \omega t + \frac{n}{k^2}, \quad \text{ahol } \omega = \sqrt{k^2 - \mu^2}. \quad (35)$$

## A Stegena-inga stacionárius kitérése

Biztosítsuk tehát — (30) felhasználásával — a

$$\mu^2 < k^2 = \frac{\tau - R}{\theta_\eta} \quad (36)$$

feltételt!

Elegendően hosszú idő után (35)-ben az időtől függő tag elenyészően kicsi lesz, a Stegena-inga beáll egyensúlyi helyzetébe:

$$\varphi_{\text{stac}} = \frac{n}{k^2}.$$

Figyelembe véve  $n$  és  $k^2$  (24) és (25) definícióját, láthatjuk, hogy az egyensúlyi állapot a nehézségi erőter változásainak a függvénye. (36)-ba behelyettesítve (25)-öt és figyelembe véve az (35) összefüggést, kapjuk, hogy

$$\varphi_{\text{stac}} = \frac{Q}{\theta_\eta(\omega^2 + \mu^2)}, \quad (37)$$

ahol (22)-ből

$$\begin{aligned} Q = & EW_{zz} - \left[ E \cos^2 \alpha - \frac{D}{2} \sin 2\alpha \right] W_{xx} - \\ & - \left[ E \sin^2 \alpha + \frac{D}{2} \sin 2\alpha \right] W_{yy} - [E \sin 2\alpha + D \cos 2\alpha] W_{xy} + \\ & + [(A-B) \cos \alpha - C \sin \alpha] W_{xz} + \\ & + [(A-B) \sin \alpha + C \cos \alpha] W_{yz} - F g_0. \end{aligned}$$

### A közelítések összefoglalása

A (37) eredmény akkor igaz, ha az (5), (7), (11), (12), (20), (26) és (36) összefüggések igazak.

A Stegena-ingára eddig az egyetlen kikötésünk az volt, hogy rá a külső erőknek csak a (9) összefüggés szerinti vízszintes forgatónyomaték-összetevői hatnak.

### Egyszerűbb gradiensmérők

#### 1. „Vertikális gradiensmérő”

A Stegena-inga valójában csak akkor lehetne a szó szoros értelmében vertikális gradiensmérő, ha a (37) kifejezésben csak  $W_{zz}$  együtthatója nem lenne zérus. Ehhez a következőknek kell teljesülnie bármilyen azimutértékre:

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} \sin 2\alpha = E \cos^2 \alpha & \rightarrow D = E \operatorname{ctg} \alpha, \\ -\frac{D}{2} \sin 2\alpha = E \sin^2 \alpha & \rightarrow D = -E \operatorname{tg} \alpha, \\ (A-B) \cos \alpha = C \sin \alpha & \rightarrow C = (A-B) \operatorname{ctg} \alpha, \\ (A-B) \sin \alpha = -C \cos \alpha & \rightarrow C = -(A-B) \operatorname{tg} \alpha, \\ -D \cos 2\alpha = E \sin 2\alpha & \rightarrow D = -E \operatorname{tg} 2\alpha, \\ -F = 0 & \rightarrow F = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

E következményeket áttekintve kijelenthetjük, hogy nincsen olyan összeállítás, amelyre

$$\varphi_{\text{stac}} \sim W_{zz},$$

mivel a (38)-ból kapott

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\alpha$$

egyenletrendszer csak az

$$\alpha = \arctg \sqrt{-1}$$

feltétel esetén eléggül ki, aminek viszont fizikai tartalma nincsen.

#### 2. Nemhorizontális gradiensmérő

Az inga kitérésének stacionárius értéke  $\alpha' = \alpha + 180^\circ$  esetén, (37) szerint

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{stac}}(\alpha + 180^\circ) = & \frac{1}{\theta_\eta(\omega^2 + \mu^2)} \{ EW_{zz} + \\ & + \left( \frac{D}{2} \sin 2\alpha - E \cos^2 \alpha \right) W_{xx} - \left( \frac{D}{2} \sin 2\alpha + E \sin^2 \alpha \right) W_{yy} - \\ & - [(A-B) \cos \alpha - C \sin \alpha] W_{xz} - [(A-B) \sin \alpha - C \cos \alpha] W_{yz} - \\ & - (D \cos 2\alpha + E \sin 2\alpha) W_{xy} - F g_0 \} \end{aligned} \quad (39)$$

Ha (37) és (39) összegét vesszük, a horizontális gradiensek kiesnek:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{stac}}(\alpha) + \varphi_{\text{stac}}(\alpha + 180^\circ) = & \frac{2}{\theta_\eta(\omega^2 + \mu^2)} [ EW_{zz} + \\ & + \left( \frac{D}{2} \sin 2\alpha - E \cos^2 \alpha \right) W_{xx} - \left( \frac{D}{2} \sin 2\alpha + E \sin^2 \alpha \right) W_{yy} - \\ & - (D \cos 2\alpha + E \sin 2\alpha) W_{xy} - F g_0 ] \end{aligned}$$

A horizontális gradiensek kiesése a (13), (14) és (15) összefüggésekkel megadott  $A$ ,  $B$ ,  $C$  integrálok tetszőleges voltát jelenti.

#### 3. Újabb ötletek a térfogati integrálok felhasználásával

Válasszuk meg az inga geometriai-fizikai paramétereit úgy, hogy azok a  $\xi$  és  $\zeta$  tengelyek által kifeszített síkra nézve szimmetrikusak legyenek (a Stegena-ingát ilyennek képzeljük). Ebben az esetben automatikusan teljesül:

$$C = D = 0, \quad (40)$$

Ha ezenkívül még azt is biztosítjuk, hogy az inga azonos tömegsűrűségű térfogatelemei az  $\eta$  tengelytől azonos távolságra legyenek, akkor

$$F = 0. \quad (41)$$

Az azonosságok teljesítése közül a (40) összefüggésé talán könnyebb: az ingának legyen egy felezősíkjá, amelyet aztán  $\zeta\zeta$  síknak nevezünk.

A (41) azonosság teljesítése már nehezebb feladat: jelentése tulajdonképpen az, hogy a tömegközéppont az  $\eta\zeta$  síkban van.

A (40) és (41) fennállásakor

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{stac}}(\alpha) = & \frac{1}{\theta_\eta(\omega^2 + \mu^2)} \left[ E(W_{zz} - \cos^2 \alpha \cdot W_{xx} - \sin^2 \alpha \cdot W_{yy} - \right. \\ & \left. - \sin 2\alpha \cdot W_{xy}) + (A-B)(\cos \alpha \cdot W_{xz} + \sin \alpha \cdot W_{yz}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{stac}}(\alpha) + \varphi_{\text{stac}}(\alpha + 180^\circ) = & \frac{2E}{\theta_\eta(\omega^2 + \mu^2)} (W_{zz} - \\ & - \cos^2 \alpha \cdot W_{xx} - \sin^2 \alpha \cdot W_{yy} - \sin 2\alpha \cdot W_{xy}) \end{aligned}$$

Az ingának az  $\eta\zeta$  síkra vonatkoztatva nem szabad szimmetrikusnak lennie, mert csak akkor igaz, hogy

$$E \neq 0.$$

Ez elég könnyen teljesíthető, viszont a  $C = D = F \equiv 0$  feltételek megvalósítása meglehetősen nehéz.

### A gradiensek mérése a Stegena-ingával

A Stegena-inga (37) megoldásfüggvénye 7 db ismeretlen mennyiséget tartalmaz:

$$W_{zz}, W_{xx}, W_{yy}, W_{xz}, W_{yz}, W_{xy}, g_0.$$

(Az  $\omega$  nem tekinthető ismeretlennek, mert időben történő folyamatos regisztrálás esetén a regisztrátumból meghatározható.)

Azt most már nem lehet elhallgatni, hogy

$$\varphi_{\text{mért}} \neq \varphi_{\text{stac}},$$

hanem

$$\varphi_{\text{mért}} = \varphi_{\text{stac}} + \varphi_0, \quad (42)$$

ahol  $\varphi_0$  az inga csavarásmentes állapotát jelenti. Emiatt a fenti hét paraméterhez a  $\varphi_0$  nyolcadikként csatlakozik:

$$W_{zz}, W_{xx}, W_{yy}, W_{xz}, W_{yz}, W_{xy}, g_0, \varphi_0. \quad (43)$$

A nyolc ismeretlen meghatározásához több azimutban végzett mérés szükséges:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \quad (n \geq 8).$$

A (42) egyenlet — (37) felhasználásával — így fog meg többszöröződni:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{mért}}(\alpha_i) &= \varphi_{\text{stac}}(\alpha_i) + \varphi_0 = \\ &= \frac{1}{\theta_\eta(\omega_i^2 + \mu^2)} \left\{ EW_{zz} \left[ E \cos^2 \alpha_i - \frac{D}{2} \sin 2\alpha_i \right] W_{xx} - \right. \\ &- \left[ E \sin^2 \alpha_i + \frac{D}{2} \sin 2\alpha_i \right] W_{yy} - [E \sin 2\alpha_i + D \cos 2\alpha_i] W_{xy} + \\ &+ [(A-B) \cos \alpha_i - C \sin \alpha_i] W_{xz} + \\ &+ [(A-B) \sin \alpha_i + C \cos \alpha_i] W_{yz} - F g_0 \left. \right\} + \varphi_0 \end{aligned} \quad (44)$$

ahol  $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ .

A (44) nem más, mint  $n$  db 8-ismeretlenes lineáris inhomogén egyenletrendszer.

### Az egyenletrendszer együttható-mátrixának rangja

A (44) egyenletrendszer mátrixa, bevezetve az

$$s_i = \frac{1}{\theta_\eta(\omega_i^2 + \mu^2)}$$

$$a \text{ mátrixot ld. a 43. oldalon.} \quad (45)$$

A mátrixelméletből ismert szabályokat alkalmazva, (45) mátrix rangja sem fog megváltozni, ha

- a 7. oszlopához hozzáadjuk az 1. oszlop  $F/E$ -szeresét;
- az 1. oszlopához hozzáadjuk a 2. és a 3. oszlopot;
- a 2. oszlopához hozzáadjuk a 3. oszlopot;
- ezt a 2. oszlopot megszorozzuk  $(-1)$ -gyel.

A kijelölt műveletek elvégzése és a csak zérus elemeket tartalmazó oszlopok elhagyása után a mátrix:

a mátrixot ld. a 43. oldalon. (46)

Mivel feltételezhető, hogy nincs olyan  $\alpha_i$  értékűsereg, amelyeket használva különböző azimutként, a mátrix két sora között arányosságot okoz, azt állapíthatjuk meg, hogy az egyenletrendszer mátrixának rangja bármely  $\alpha_i$  értékűseregre

$$r = 6,$$

a hat független oszlopnak megfelelően (természetesen  $n$ -nek — a különböző azimutok számának — is legalább 6-nak kell lennie).

### Az egyenletrendszer kibővített mátrixának rangja

Tegyük fel, hogy  $W_{zz}, W_{xx}, W_{yy}, W_{xz}, W_{yz}, W_{xy}, g_0, \varphi_0$ , tehát az összes változó, az összes azimutban történő mérés lezajlása alatt nem változik meg. Ekkor megtehetjük azt, hogy a kibővített mátrix 9. oszlopához — azaz a  $\varphi_{\text{mért}}(\alpha_i)$ -khez — hozzáadjuk

— az 1. oszlop  $(-W_{zz})$ -szeresét,

— a 2. oszlop  $(-W_{xx})$ -szeresét, és így tovább, tehát

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{mért}}(\alpha_i) - s_i E W_{zz} - s_i \left( \frac{D}{2} \sin 2\alpha_i - E \cos^2 \alpha_i \right) W_{xx} + \\ + s_i \left( \frac{D}{2} \sin 2\alpha_i - E \sin^2 \alpha_i \right) W_{yy} - \\ - \dots + s_i F g_0 - \varphi_0 = 0 \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

azaz a kibővített mátrix 9. oszlopa csak zérus elemeket tartalmaz, ami tehát elhagyható. Vagyis a kibővített mátrix az egyenletrendszer együttható-mátrixává degenerálódott. Tehát a kibővített mátrix rangja is, alkalmazva rá is az együttható-mátrixra elvégzett rangcsökkentő műveleteket:

$$r' = r = 6.$$

Következtetés: a (44) egyenletrendszer megoldható, de a (43)-ban felsorolt nyolc ismeretlen mennyiség közül csak 6 egymástól független változó értékét határozhatjuk meg.

Hogy melyik lehet a hat független a nyolc ismeretlen közül, azt ne vizsgáljuk, hanem azt nézzük meg, hogyan lehetne szaporítani a meghatározható ismeretlenek számát.

### Az egyenletrendszer kibővítése a Laplace-egyenlettel

A nehézségi erőter konzervatív erőter. Potenciálfüggvénye eleget tesz a Laplace-egyenletnek, vagyis a (44) egyenletrendszerhez hozzáadhatjuk  $n+1$ -ediknek a  $W = W(x, y, z)$  potenciálfüggvényre vonatkozó

$$\Delta W = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 0$$

Laplace-egyenletet.

Mivel nyolc ismeretlenünk van, legalább nyolc egyenlet kell az egyértelmű megoldáshoz. Legyen hét azimut-egyenlet, megtoldva nyolcadikként a Laplace-egyenlettel.

$$\varphi_{\text{mért}}(\alpha_i) = s_i \left( \sum_{j,k} [f_{jk}(\alpha_i) \cdot W_{jk}] - F g_0 \right) + \varphi_0,$$

$$0 = \Delta W = \sum_j W_{jj}, \quad (47)$$

ahol  $i = 1, 2, 3, \dots, 7$ ;  $j = 1, 2, 3$ ;  $k = j, j+1, \dots, 3$ .

Az egyenletrendszer mátrixa:

$$a \text{ mátrixot ld. a 43. oldalon.} \quad (48)$$

A mátrix rangja nem fog változni, ha a 3. oszlopához hozzáadjuk az 1. és a 2. oszlopot, azaz

— az 1–7. sor 3. elemére

$$-s_i \left( \frac{D}{2} \sin 2\alpha_i + E \sin^2 \alpha_i \right) + s_i \left( \frac{D}{2} \sin 2\alpha_i + E \cos^2 \alpha_i \right) + s_i E = 0,$$

— a 8. sor 3. elemére

$$1 + 1 + 1 = 3;$$

az így kapott 3. oszlopot végigosztjuk  $(-3)$ -mal és hozzáadjuk az 1. oszlophoz:

— az 1–7. sorra

$$s_i E + 0 = s_i E,$$

— a 8. sorra

$$1 + 3/(-3) = 0;$$

az így kapott 1. oszlop  $F/E$ -szeresét hozzáadjuk a 7. oszlophoz:

— az 1–7. sorra

$$-s_i F + s_i E \cdot F / E = 0, \quad (49a)$$

— a 8. sorra

$$0 + 0 = 0. \quad (49b)$$

Végrehajtva ezeket a műveleteket, a 7. oszlopban végig zérusokat kapunk, vagyis ez az oszlop a mátrix rangjának változása nélkül elhagyható. Ez az oszlopelhagyás azt jelenti, hogy a mátrix rangja még így is kisebb 1-gyel az ismeretlen mennyiségek számánál.

Nyilvánvaló, hogy ebben az egyenletrendszerben  $g_0$ -t választhatjuk azon változónak, amelyik összefügg a többivel. Ugyanis abban az esetben, ha egyébként az egyenletrendszer változatlan lenne, de  $\varphi_{\text{mért}}(\alpha_i)$  valami okból nem függne  $g_0$ -tól, akkor a (49a) és (49b) összefüggéseknek értelmük nem lenne, s emiatt a mátrix rangja nem lenne kisebb az ismeretlen mennyiségek számánál. Emiatt el kell tekintenünk attól, hogy a Stegena-ingával  $g_0$ -t is meghatározunk.

### A $g_0$ „eltüntetése” az egyenletrendszerből

Az „eltüntetésnek” két módja van. Az egyik lehetőség:

Az inga méreteit és fizikai tulajdonságait (szimmetria, tömegeloszlás) úgy választjuk meg, hogy

$$\int_V \xi \, dm = F = 0$$

legyen. Ekkor a (47) egyenletrendszerben a  $g_0$ -t tartalmazó tag kiesik, az ismeretlenek száma 1-gyel csökken, és ezen ismeretlenek meghatározásához elégséges a 6 db azimut-egyenlet és a Laplace-egyenlet.

A másik eljárás:

Megmérjük a  $g_0$ -t. Ekkor a (47) egyenletrendszert így írhatjuk át:

$$\varphi_{\text{mért}}(\alpha_i) + s_i F g_0 = s_i \left( \sum_{j,k} [f_{jk}(\alpha_i) \cdot W_{jk}] - F g_0 \right) + \varphi_0, \quad (50)$$

$$0 = \Delta W = \sum_j W_{jj},$$

ahol  $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ ;  $j = 1, 2, 3$ ;  $k = j, j+1, \dots, 3$ .

A (50) egyenletek bal oldala ismert értékeket jelent, a jobb oldalon pedig hét ismeretlen mennyiség lineáris kombinációja áll.

Mivel a két megoldási lehetőség a  $g_0$  „eltüntetése”-re algebrai szempontból azonos eset, csak az ismert értékek térnek el egymástól, vezessünk be egy közös jelölést. Legyen

$$\phi_{\text{mért}}(\alpha_i) = \begin{cases} \varphi_{\text{mért}}(\alpha_i), & \text{ha } F \equiv 0; \\ \varphi_{\text{mért}}(\alpha_i) + s_i F g_0, & \text{ha } F \neq 0. \end{cases}$$

(A két esetben az egyenletek csak alakilag egyeznek. Az  $F \equiv 0$  és az  $F \neq 0$  esetben a többi konstans értéke is eltérő.)

Tehát az egyértelmű feladat egyenletrendszere:

$$\phi_{\text{mért}}(\alpha_i) = s_i \sum_{j,k} [f_{jk}(\alpha_i) \cdot W_{jk}] + \varphi_0, \quad (51)$$

$$0 = \Delta W = \sum_j W_{jj},$$

ahol  $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ ;  $j = 1, 2, 3$ ;  $k = j, j+1, \dots, 3$ .

Az (51) egyenletrendszer mátrixa hasonló (48)-hoz, ennek 7. oszlopa és valamelyik azimutsorának elhagyása után.

Amiként a (48) egyenletrendszer mátrixának rangját meghatároztuk, ugyanúgy belátható, hogy a (51) egyenletrendszer mátrixának rangja megegyezik a

$$W_{zz}, W_{xx}, W_{yy}, W_{xz}, W_{yz}, W_{xy}, \varphi_0$$

ismeretlenek számával, azaz

$$r = 7.$$

Az (51) egyenletrendszer kibővített mátrixa rangjának meghatározása teljesen analóg a (44) egyenletrendszer kibővített mátrixán végrehajtott eljárással.

Mivel az (51) egyenletrendszer mátrixának és kibővített mátrixának rangja megegyezik, és ez a közös rang egyenlő az ismeretlenek számával, azért ez az egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

STEGENA Lajos torziós ingájával a nehézségi erőter összes jellemző paramétere (a  $g_0$  kivételével) — a függőleges gradienst is beleértve — meghatározható, következésképpen a Stegena-féle torziós ingát joggal nevezhetjük totális gravitációs variométernek.

### Befejezés

A dolgozatom célja ezen állítás igazolása volt.

Ez a levezetés 34 évvel ezelőtt született meg. Pályám ekkor fordulatot vett, a témával többé nem foglalkoztam. A dolgozathoz egyetlen hivatkozást sem csatoltam, mivel a felhasznált fizikai-matematikai apparátus, amelyet a cikkben felvonultattam, egyetemi tananyag.

Viszont a gondolat, amelynek igazolására ez a levezetés annak idején megszületett, STEGENA Lajos érdeme! Volt egy elképzelése: az, hogy létezhet egy olyan mérőberendezés, amelynek mérési adataiból a nehézségi erő vertikális gradiense ugyanúgy meghatározható, mint az Eötvös-ingával a többi gradiense. Ezt a mérőberendezést a jelen cikkemben neveztem el — az ő tiszteletére — Stegena-ingának.

