Termikus földköpeny-konvekció kétdimenziós numerikus modellezése különböző geometriák esetén[1]

HEREIN MÁTYÁS[2,], GALSA ATTILA[2], LENKEY LÁSZLÓ[3], SÜLE BÁLINT[4]*

A földköpenyben zajló termikus konvekció megértésének egyik leghatásosabb eszköze a numerikus modellezés. A termikus konvekciót leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldására a Boussinesq-közelítést alkalmaztuk. Az egyenletek numerikus megoldásához végeselemes módszert használtunk, melynek segítségével könnyen — és hazai viszonylatban először — modelleztünk termikus köpenykonvekciót nem derékszögű modelltartományon. A derékszögű modelltartományon kapott eredmények nagyon pontos egyezést mutattak az összehasonlító tanulmányok eredményeivel [BLANKENBACH et al. 1989].

A szimulációkat kétdimenziós derékszögű, henger, valamint a valós köpenygeometriát vizuálisan jól közelítő hengergyűrű modelltartományon végeztük. A Rayleigh-szám (Ra) 10^4 és 10^7 között változott. A geometriától függetlennek bizonyult a derékszögű modellgeometria feltételezésével a határréteg elméletből levezetett összefüggés, miszerint a felszíni hőáram Ra közelítőleg 1/3-ik, az átlagnégyzetes sebesség Ra közelítőleg 2/3-ik hatványával nő. Természetesen adott Ra mellett a konkrét hőáram, átlagsebesség és átlagos cellahőmérséklet értékek a geometriától függenek: a legnagyobb értékek derékszögű geometria esetén tapasztalhatók. Adott sebesség mellett a legtöbb hőt a henger geometriájú áramlás képes a felszínre szállítani. Az átlagos dimenziótlan cellahőmérséklet a szimmetrikus geometriájú derékszögű modelltartomány esetén 0,5-nek adódott, míg henger és hengergyűrű modellgeometria esetén ennél kisebb. A hidegebb cella az áramlások — geometria által meghatározott — aszimmetriájából következik. Henger geometria esetén a központi felszálló meleg áramlás felülete kisebb, mint a palást menti hideg leáramlás felülete, hengergyűrű esetén pedig a külső, hűtött felület nagyobb a belső, fűtött felületnél.

M. HEREIN, A. GALSA, L. LENKEY, B. SÜLE: The effect of different 2D geometries on the numerical models of thermal convection in the Earth's mantle

A major tool for understanding thermal convection in the Earth's mantle is numerical modelling. The Boussinesq approximation has been used to formulate the partial differential equation system of the thermal convection. The equations were solved by a finite element method. The flexibility of the method allowed modelling of the thermal convection not only in rectangular domain, but in other geometries, too. The results obtained in rectangular coordinate system were compared with the benchmark study of BLANKENBACH et al. [1989] and the agreement was within 1% error.

The simulations have been carried out in two dimensional rectangular, cylindrical, and in a "mantle-like" cylindrical-shell domain. The Rayleigh number (Ra) varied in the range of 10^4–10^7. It was found that relationships between surface heat flow (Nu) and Ra (Nu ~ Ra 1/3), and root-mean-square velocity (v_{rms}) and Ra (v_{rms} ~ Ra 2/3), originally derived from the thermal boundary layer theory for 2D rectangular domain, are valid in the other studied geometries, too. Obviously, for a given Rayleigh number, Nu, v_{rms} and the mean temperature of the convection cell depend on the geometry: the highest values were obtained in case of rectangular model domain. The significance of the cylindrical geometry is that for a given rms velocity the surface heat flow is the highest. In that sense the most effective heat transport occurs in cylindrical shape convection systems. The dimensionless mean cell temperature was 0.5 in case of symmetric rectangular domain, and it was lower in cylindrical and cylindrical shell domains. The lower mean cell temperature derives from the asymmetry of the flow regimes determined by these geometries. In case of cylindrical convection the surface of the hot upwelling plume in the centre is smaller than the surface of the cold downwelling flow at the rim of the cylinder. In case of cylindrical-shell geometry the outer cold surface of the domain is larger than the inner heated surface resulting in low cell temperature.

1. Bevezetés

A termikus földköpeny-konvekció numerikus modellezésében ma is előszeretettel használnak kétdimenziós modelltartományt egyes jól körülhatárolható problémák szisztematikus vizsgálatára [pl. ČÍŽKOVÁ, MATYSKA 2004; MITTELSTAEDT, TACKLEY 2006; BRUNET, YUEN 2000]. Ennek oka a jelentősen redukált számításigény, valamint a fizikai jelenségek egyszerűbb nyomon követhetősége. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy a háromdimenziós jelenségek kétdimenziósra történő korlátozása az áramlás egészét befolyásolja, ami megnyilvánul az áramlás globális jellemzésére használt átlagparaméterek (hőáram, átlagos sebesség, átlaghőmérséklet) viselkedésében.

A jelen kutatás fő célja annak vizsgálata, hogyan befolyásolja a nagy viszkozitású, földköpenyszerű folyadékok termikus konvekciójának legfontosabb paramétereit a kétdimenziós modellgeometria megválasztása. Mivel először

[1] Beérkezett: 2008. október 13-án

[2] ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Geofizika Tanszék, H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/c.
[*] e-mail: hereinm@gmail.com
[3] MTA-ELTE Geológiai, Geofizikai és Űrtudományi Kutatócsoport, H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/c.
[4] MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézet Szeizmológiai Főosztály, H-1112 Budapest, Meredek u. 18.

használtunk végeselemes módszert a hidrodinamikai folyamatok numerikus modellezésére, hangsúlyt fektettünk az algoritmus tesztelésére is. A végeselemes módszer rugalmassága lehetővé tette számunkra, hogy a kétdimenziós numerikus számításokat derékszögű, henger és hengergyűrű modelltartományon is elvégezzük. A szimuláció során az áramlási rendszer átlagos paramétereit számítottuk, ezek a felszíni hőáram, az átlagnégyzetes sebesség, valamint a tartomány horizontálisan átlagolt hőmérséklete. Az alkalmazott numerikus módszer bemutatását követő részben ezen eredmények összefoglalása, értelmezése található, különös tekintettel az eltérő geometriai modelltartományokban megfigyelt különbségekre.

2. A numerikus módszer

2.1. A Boussinesq-közelítés

A termikus földköpeny-konvekció jelenségét leíró differenciálegyenlet-rendszer a tömegmegmaradást kifejező kontinuitási egyenlet (1), az impulzusmegmaradást leíró Navier–Stokes egyenlet (2), amely Newton második törvénye folyadékokra felírva, valamint az energiamegmaradást kifejező hőtranszportegyenlet (3), derékszögű koordinátarendszerben [CHANDRASEKHAR 1961]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + (\eta + \eta')\nabla(\underline{\nabla}\mathbf{u}), \tag{2}$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)T \right) = K \Delta T. \tag{3}$$

Az (1)-ben $\mathbf{u}=(u,v,w)$ az áramlási sebességek vektora, míg ρ a folyadék sűrűsége. A (2)-ben p a nyomás, η és η' a belső súrlódásra jellemző anyagi együtthatók (dinamikai viszkozitás), $\mathbf{g}$ a nehézségi gyorsulás. A (3)-ban c_p a fajhő, T a hőmérséklet, míg K a hővezető képesség.

Mivel a termikus konvekció folyamatát leíró (1)–(3) egyenletek egy olyan komplex csatolt parciális differenciálegyenlet-rendszert alkotnak, hogy teljes analitikus megoldásuk nem lehetséges, ezért nélkülözhetetlen az egyenletek közelítése még numerikus modellezés esetén is [GALSA et al. 2008]. A termikus konvekció esetében a legáltalánosabban használt közelítés a Boussinesq-közelítés, mely az izotermikus áramlások elméletében használt inkompresszibilis közelítés kiterjesztése nem izotermikus esetre. Ennek lényege, hogy az (1)–(3) egyenletekben a sűrűség változásait mindenhol elhanyagolhatónak tekintjük, kivéve (2)-ben a $\rho \mathbf{g}$ tömegerő tagban, ahol a sűrűség hőmérsékletfüggését lineáris hőtágulásként vesszük figyelembe:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)], \tag{4}$$

hiszen ez a sűrűségváltozás a konvekció hajtóereje. Itt ρ_0 a sűrűség értéke T_0 referencia-hőmérsékleten, és α a hőtágulási együttható.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az összes anyagi paraméter (α, η, K, c_p), valamint a nehézségi gyorsulás állandó. A fentiek alapján a termikus földköpeny-konvekció alapegyenletei a következőre módosulnak:

$$\underline{\nabla}\mathbf{u} = 0, \tag{5}$$

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]\mathbf{g} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}, \tag{6}$$

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)T \right] = K \Delta T. \tag{7}$$

A numerikus modellezés során az (5)–(7) egyenleteket oldottuk meg végeselemes módszerrel a Comsol Multiphysics programcsomag felhasználásával [ZIMMERMAN 2006]. A kezdeti és határfeltételeket az eltérő geometriájú modellek esetén a 2.3. részben közöljük.

2.2. Dimenziótlan mennyiségek

A hidrodinamikában megszokott eljárás, hogy az egyenleteket dimenziótlan alakban írják föl, mivel ekkor az azonos geometriával, határfeltételekkel és dimenziótlan számokkal jellemzett rendszerek ugyanolyan áramlást írnak le. Így az adott áramlásra jellemző dimenziótlan számok segítségével könnyebb az áramlások leírása, összehasonlítása és megértése.

A (6) egyenlet dimenziótlanításával kapható meg a Boussinesq-közelítésnek a termikus konvekciót jellemző egyetlen, független dimenziótlan paramétere, a Rayleigh-szám [GALSA et al. 2008]:

$$Ra = \frac{\rho_0 \cdot \alpha \cdot g \cdot \Delta T \cdot d^3}{\kappa \cdot \eta} = \frac{\textit{felhajtóerő}}{\textit{viszkózus erő}}, \tag{8}$$

ahol d a köpeny vastagsága, ΔT a köpeny alja és a teteje közötti hőmérséklet-különbség, κ pedig a hődiffuzivitás ($\kappa = \frac{K}{\rho_0 c_p}$).

A Rayleigh-szám szoros kapcsolatban áll a konvekció dinamikájával, *Ra* növekedésével az áramlást előidéző felhajtóerő erősödik az őt fékező viszkózus súrlódással szemben, így az áramlás felgyorsul, a hőtranszport fokozódik, a felszíni hőáram megemelkedik. Fontos hangsúlyozni, hogy *Ra* földköpenyre vonatkozó értéke nem pontosan ismert [GALSA et al. 2008]. Ennek fő oka, hogy a Rayleigh-számot leginkább befolyásoló viszkozitás nem állandó, hanem a nyomásnak és a hőmérsékletnek a függvénye. A növekvő nyomás következtében a viszkozitás a köpeny tetejétől az aljáig másfél nagyságrenddel nő [ČADEK, VAN DEN BERG 1998], ami az adott mélységben érvényes viszkozitással definiált ún. lokális *Ra* ugyanilyen mértékű csökkenését okozza. Nyomás- és hőmérsékletfüggő viszkozitás esetén a Rayleigh-számot egy referencia viszkozitással definiálják, ami az *1. táblázatban* is közölt felsőköpeny viszkozitás [SCHUBERT, TURCOTTE, OLSON 2001]. A hőmérséklet-különbség a köpeny alja és a földfelszín között néhány ezer Kelvin [FOWLER 1990], tehát a Rayleigh-szám 10^7 nagyságrendű. Mint említettük, a lokális *Ra* a mélységgel majdnem két nagyságrendet csökken, ezért a modellezés során az állandó viszkozitással definiált Rayleigh-számot 10^4–10^7 tartományban változtattuk.

Fizikai mennyiségek		
Jelölés	**Érték**	**Megnevezés**
ρ_0 [kg·m^{-3}]	4500	sűrűség
η [Pa·s]	$2\cdot10^{21}$	viszkozitás
c_p [J·kg^{-1}·K^{-1}]	1200	fajhő
K [W·m^{-1}·K^{-1}]	5,4	hővezető-képesség
α [K^{-1}]	$2\cdot10^{-5}$	hőtágulási együttható
g [m·s^{-2}]	9,92	nehézségi gyorsulás
d [m]	$2{,}9\cdot10^{6}$	köpeny vastagsága

1. táblázat. A numerikus modell fizikai paramétereinek értékei

Table 1. Values of the physical parameters in the numerical models

A konvekciót jellemző további fontos dimenziótlan mennyiségek a Nusselt-szám (Nu), az átlagnégyzetes sebesség (v_{rms}), valamint az átlagos hőmérséklet (T_{av}). Derékszögű koordináta-rendszerben

$$Nu=\frac{q_T}{q_c}=\frac{K\int_0^d \frac{\partial T(x,\,y=d)}{\partial y}\,\mathrm{d}x}{K\int_0^d \frac{\Delta T}{d}\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{\Delta T}\int_0^d \frac{\partial T(x,\,y=d)}{\partial y}\,\mathrm{d}x. \quad (9)$$

A Nusselt-szám a (9) definíció szerint a teljes felszíni átlagos hőáram (q_T), és a csak hővezetés (kondukció) útján fellépő hőáram (q_c) arányát fejezi ki. Míg

$$v_{rms}=\frac{d}{\kappa}\left\{\frac{1}{d^2}\int_0^d\int_0^d (u^2+v^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

a teljes modelltartományra számított „térfogati" négyzetes átlagsebesség (10), addig T_{av} (11) a modelltartományra számított dimenziótlan „térfogati" átlaghőmérséklet:

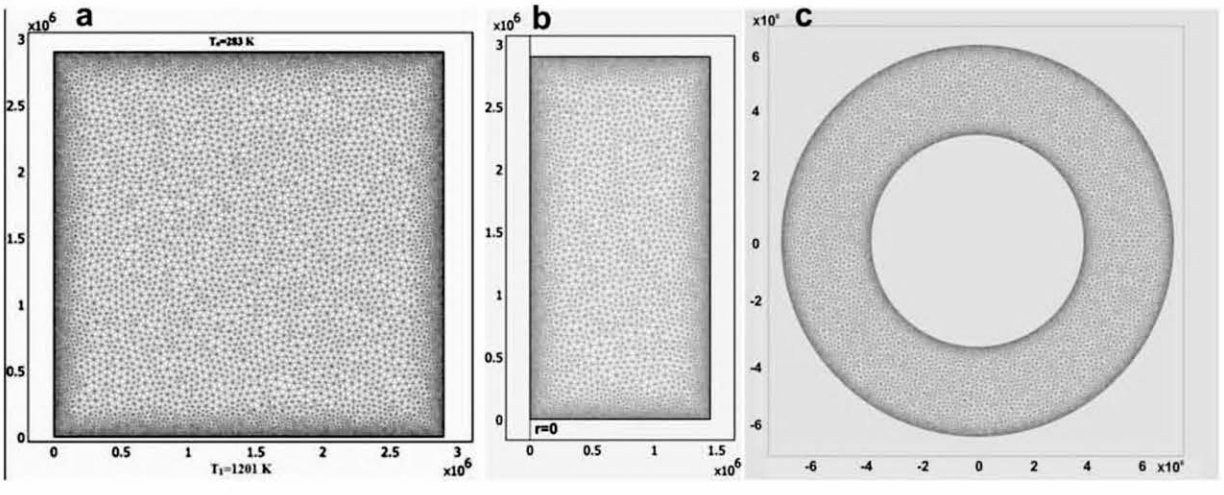
$$T_{av}=\frac{1}{\Delta T}\left\{\frac{1}{d^2}\int_0^d\int_0^d T(x,\,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-T_0\right\}. \quad (11)$$

A modellezések során ezeket a mennyiségeket használtuk a termikus konvekció jellemzésére, természetesen az adott modellgeometriára aktualizálva. Szuperkritikus Rayleigh-számok esetén (amikor az advekció dominál a hőtranszportban), az analitikus egyenletek közelítésén alapuló termikus határréteg elmélet szerint [TURCOTTE, OXBURGH 1967] v_{rms}~$Ra^{2/3}$ és Nu~$Ra^{1/3}$ izotermikus, mechanikailag feszültségmentes határok mellett, kétdimenziós derékszögű modelltartományon.

2.3. A numerikus modell

A numerikus szimulációkat kétdimenziós Descartes-, illetve hengerkoordináta-rendszerben végeztük el négyzet alakú, henger, valamint hengergyűrű modelltartományon (*1. ábra*). A határfeltételek az első két tartomány esetén azonosak voltak. A mechanikai határfeltételek alapján a falak feszültségmentesek és impermeábilisak. A termikus határfeltételek szerint a vertikális határok hőszigeteltek, míg a horizontális határok izotermikusak, az alsón T_1, a felsőn T_0 ($T_1>T_0$) a hőmérséklet. Hengergyűrű geometriában az alsó (köpeny–mag határ) és a felső (felszín) határfeltételek megegyeznek az előző modellek horizontális határaira előírt feltételekkel, azonban oldalsó határ nincs a tartomány geometriája miatt. A hengergyűrű tartományban — a numerikus megoldás stabilizálása végett — egy belső határt helyeztünk el, mely termikusan folytonos, de rajta keresztül nem történik áramlás. A modellek termikus kezdeti feltétele minden esetben a stacionárius konduktív megoldás volt, melyet kismértékben perturbáltunk, hogy meggyorsítsuk az áramlás megindulását.

A modelltartományok végeselemes diszkretizációját az 1. ábra szemlélteti. Jól látható, hogy a határok mentén finomabb felbontást alkalmaztunk, mivel a termikus határréteg elmélet szerint szuperkritikus Rayleigh-számú konvekció esetén a hőmérséklet-változás döntően a határok közelében történik. Az 1.a. ábra a derékszögű modelltarto-



1. ábra. A derékszögű (a), a henger alakú (b), valamint a hengergyűrű (c) modelltartomány végeselemes felbontása. A távolságok méterben értendők. A rétegek vastagsága mindegyik esetben megegyezik a földköpeny vastagságával. Hengergyűrűnél a belső sugár a földmag sugarának felel meg

Fig. 1. The finite element mesh in (a) rectangular, (b) cylindrical and (c) cylindrical-shell domains. The distance is measured in meters. The thickness of the domains is equal to the thickness of the Earth's mantle. The inner radius of the cylindrical-shell domain is equal to the radius of the Earth's core

mány véges elemes felbontását mutatja: a tartomány négyzet alakú, vastagsága d=2900 km. Az 1.b. ábra a kétdimenziós, szögfüggetlen (csak r-től és z-től függő) henger alakú modelltartományt szemlélteti, melynek szimmetriatengelye az r=0 tengely. A háromdimenziós hengertartomány ezen tengely körül történő körbeforgatással nyerhető. A henger magassága és átmérője 2900 km. A hengergyűrű geometriájú tartományt (1.c. ábra) a radiális földmodell alapján szerkesztettük, így a köpeny–mag határ sugara 3470 km, míg a gyűrű vastagsága 2900 km. A henger teste a gyűrű síkjára merőlegesen végtelen kiterjedésű.

A numerikus modellben a földköpeny fizikai paramétereit legjobban közelítő értékeket használtuk, amelyeket az 1. táblázat összegez. A modellezést a Rayleigh-szám 10^4–10^7 tartományán végeztük el, s értékét a modell alsó és felső határai között előírt hőmérséklet-különbséggel szabályoztuk. Ra=10^4 értéknél a hőmérséklet-különbség ΔT≈0,918 K, míg Ra=10^7 értéknél ΔT≈918 K volt. Eszerint az 1. táblázatban található paraméterértékek mellett a köpeny alja és teteje közötti kevesebb mint 1 K hőmérséklet-különbség (Ra=10^4 esetben) termikus konvekció kialakulásához vezet! Ez a meglepő következtetés csak a modell érvényességi körén belül igaz, ezért nem szabad közvetlenül a földköpenyre vonatkoztatni.

3. A modellezés eredményei

3.1. Az eredmények ellenőrzése

A Comsol Multiphysics egy végeselemes módszert használó programcsomag általános parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldására. Fontos volt annak ellenőrzése, hogy a program helyesen oldja-e meg a földköpeny termikus konvekcióját leíró (5)–(7) egyenletrendszert. A földköpeny termikus konvekcióját modellező különböző programok eredményeit egymással BLANKENBACH és munkatársai [BLANKENBACH et al. 1989] hasonlították össze, és referenciaértékeket határoztak meg az áramlás néhány jellemzőjére. Az összehasonlításhoz a legegyszerűbb modellt alkalmazták: izotermikus és feszültségmentes síklapokkal határolt homogén közegben, Boussinesq-közelítés esetén kialakuló kétdimenziós termikus konvekciót. Az ugyanilyen feltételek mellett általunk számított Nusselt-számok és átlagnégyzetes sebességértékek összevetését a [BLANKENBACH et al. 1989] által közölt értékekkel a *2. táblázat* tartalmazza. A táblázat alapján megállapítható, hogy a végeselemes módszerrel kapott modelleredmények igen jó egyezést mutatnak az alaptanulmány eredményeivel, az eltérés mindenütt 1% alatt marad.

	Ra	Jelen dolgozat	BLANKENBACH et al. [1989]	Eltérés [%]
Nu	10^4	4,88525	4,884409	0,0172
v_{rms}		42,864943	42,864947	0
Nu	10^5	10,567700	10,534095	0,319
v_{rms}		193,197400	193,21454	0,0088
Nu	10^6	22,06157	21,972465	0,4
v_{rms}		833,99150	833,98977	0,0002

2. táblázat. Derékszögű modelltartományon számított Nu és v_{rms} értékek összehasonlítása az ugyanolyan modell esetén számított referenciaértékekkel

Table 2. Comparison of our results of Nu and v_{rms} with the values of the benchmark study of BLANKENBACH et al. [1989] calculated assuming the same model

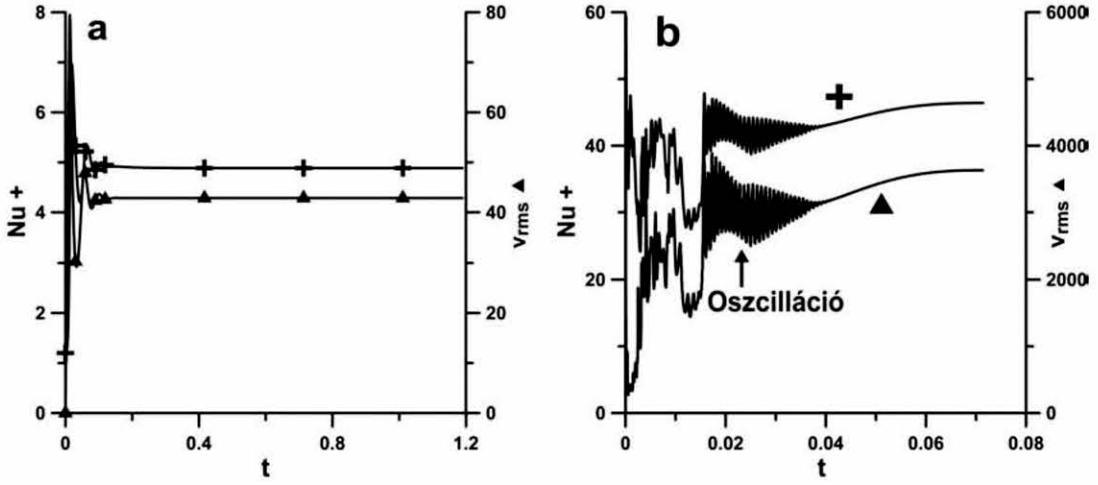
3.2. Derékszögű modelltartomány

A földköpeny geometriája miatt a konvekció leírására a gömbi koordináta-rendszer a legalkalmasabb, a legtöbb numerikus modell mégis derékszögű koordináta-rendszert használ az egyenletek könnyebb kezelhetősége miatt. Másrészt, a konvekcióval kapcsolatos fizikai folyamatok jól vizsgálhatók és értelmezhetők derékszögű modelltartományon is, ezért az ilyen geometria mellett kapott eredmények képezik az alapját a henger- és a hengergyűrű geometriával történő összehasonlításnak.

A Rayleigh–Bénard probléma [BÉNARD 1900] megoldása megadja a kétdimenziós konvekció megindulásához szükséges kritikus Rayleigh-számot Descartes-rendszerben, két horizontálisan végtelen síklemezzel határolt közegben, izotermikus és feszültségmentes határok esetén. A kritikus Rayleigh-szám értéke $Ra_{krit} = \frac{27}{4} \cdot \pi^4 \cong 657{,}5$ [RAYLEIGH 1916], azaz ennél nagyobb Ra esetén termikus eredetű konvekciós áramlás indul meg. Ra=10^5 esetben a rendszer már szuperkritikus állapotban van. A modellezések során a rendszer állapotát jellemző alapvető paraméterként tekintettük Nu (9) és a v_{rms} (10) értékeit. Ezen mennyiségek segítségével eldönthető, hogy az áramlás stacionárius, kvázistacionárius, vagy nemstacionárius.

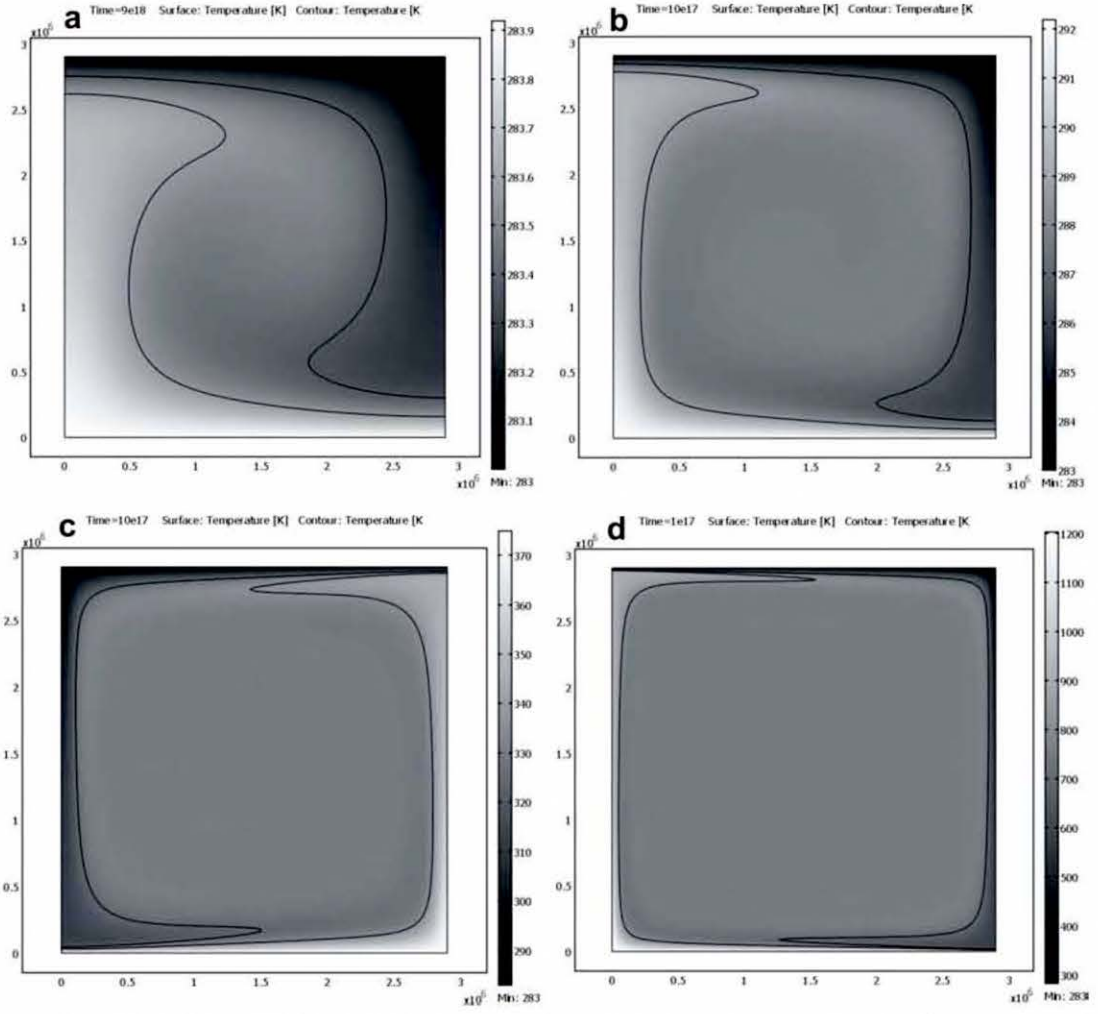
A stacionárius állapot kialakulása látható derékszögű modelltartományon Ra=10^4 esetben a *2.a. ábrán*. Egy nem túl nagy „túllövés" — mely a kezdeti konduktív állapotból a konvektív állapotba való átmenet következménye — után a rendszer stabil, stacionárius állapotba kerül. A *3. ábrán* jól látható, hogy az Ra=10^4–10^7 tartományban minden esetben kialakul a konvekció, létrejön egy felszálló meleg és egy leszálló hideg hőoszlop, valamint kialakulnak a horizontális termikus határrétegek, amelyek a Rayleigh-szám növelésével egyre vékonyabbá válnak. Itt jegyezzük meg, hogy a 3. ábrán egy-egy félcella látható, mert a fel- és leszálló áramlásoknak csak a fele található a cellában. A teljes cella az egyik függőleges oldalra való tükrözéssel kapható meg. A két félcellában az áramlás iránya ellentétes. A továbbiakban a félcellát is cellának fogjuk nevezni az egyszerűség kedvéért.

A *4. ábra* a horizontálisan átlagolt hőmérséklet–mélység görbéket mutatja. A 3. és 4. ábrán jól látható, hogy a cella belseje növekvő Rayleigh-számok esetén egyre inkább izotermikussá válik, kialakul egy állandó, T=0,5 hőmérsékletű „cellamag", és hőmérséklet-változás csak a cella pere-



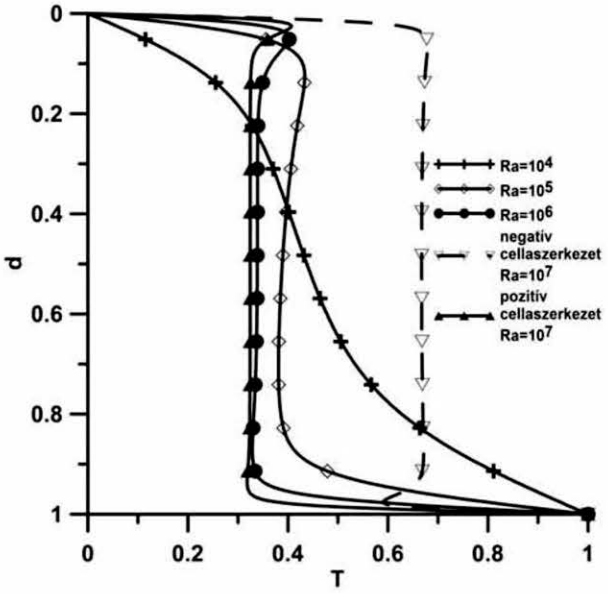
2. ábra. Az átlagos felszíni hőáram (Nusselt-szám, *Nu*) és az átlagnégyzetes sebesség (v_{rms}) változása a dimenziótlan idő függvényében, (a) $Ra=10^4$, (b) $Ra=10^7$. A kezdeti állapot mindkét esetben a konduktív hőtér volt. Az áramlás végállapota mindkét esetben stacionárius

Fig. 2. The mean surface heat flow (Nusselt-number, *Nu*) and the root mean square velocity (v_{rms}) as a function of dimensionless time, (a) $Ra=10^4$, (b) $Ra=10^7$. The initial condition was the conductive thermal regime. Both for $Ra=10^4$ and 10^7 the final states are stationary



3. ábra. Stacionárius hőmérsékletterek különböző Rayleigh-számok esetén derékszögű geometriában (világos – meleg, sötét – hideg). A folytonos vonalak egy meleg és egy hideg izotermát jelölnek. (a) $Ra=10^4$, (b) $Ra=10^5$, (c) $Ra=10^6$, (d) $Ra=10^7$. A hőmérsékletértékek *Ra*-val együtt 10-szeresre nőnek, mert a Rayleigh-számot a réteg alja és teteje közt mérhető hőmérséklet-különbséggel kalibráltuk. A (c) ábrán az áramlás iránya fordított

Fig. 3. Temperature distribution in rectangular model domains in case of stationary convections at different Rayleigh numbers (light colours: hot temperature, dark colours: cold temperature). The continuous lines mark a hot and a cold isotherm. (a) $Ra=10^4$, (b) $Ra=10^5$, (c) $Ra=10^6$, (d) $Ra=10^7$. Note the tenfold increase of the temperature scale with the tenfold increase of *Ra*, because *Ra* was calculated using the temperature difference between the top and bottom boundary. The direction of convection is opposite in Fig. (c)



4. ábra. A horizontálisan átlagolt dimenziótlan hőmérséklet a dimenziótlan mélység függvényében derékszögű modelltartományon különböző Rayleigh-számok mellett. A hőmérséklet-változás az alsó és a felső termikus határrétegben következik be, míg a cella belsejének hőmérséklete állandó. *Ra* növekedésével a határrétegek elvékonyodnak

Fig. 4. Horizontally averaged dimensionless temperature as a function of the dimensionless depth for different Rayleigh numbers in case of rectangular model domain. The temperature changes in the horizontal thermal boundary layers, and the core of the cell has uniform temperature (see also Fig. 3). Higher *Ra* results in thinner thermal boundary layers

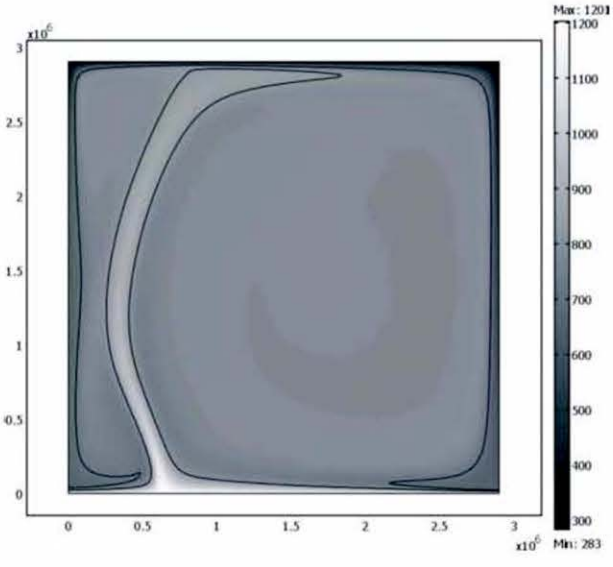
mein, — a horizontális és vertikális határrétegekben — tapasztalható. Ez annak a következménye, hogy a hőtranszport a cellán keresztül advekcióval történik. A vizsgált *Ra* számok tartományában az áramlás sebessége jóval nagyobb, mint a „kondukció sebessége" — pontosabban a hődiffúzió sebessége, — ezért a felszálló anyag emelkedés közben alig hűl. A felhozott hőenergia leadása a felső termikus határrétegen keresztül hővezetéssel történik. A leáramlás hasonló módon szállítja a hőt: a lesüllyedt hideg anyag az alsó határrétegben kondukcióval melegszik fel. Az áramlás sebességétől függően az anyag meghatározott ideig tartózkodik az alsó és a felső határon. Ennyi idő áll rendelkezésre, hogy felmelegedjék, illetve lehűljön. Mivel a kondukció (hődiffúzió) sebessége kicsi, csak egy adott vastagságú rész tud felmelegedni, illetve lehűlni, vagyis stacionárius állapotban nem áramlik hő a cella belsejébe, illetve onnan nem áramlik ki. Ezért jönnek létre a horizontális termikus határrétegek, amelyekben a hőmérséklet változik, míg a cella belsejének hőmérséklete állandó lesz. A Rayleigh-szám növekedésével az áramlási sebesség nagyobb lesz, ami a fentiek értelmében a határrétegek elvékonyodásához vezet.

Hangsúlyozni kell azonban, hogy az anyag áramlása az egész cellában történik, s nem korlátozódik csak a határrétegekre, míg a hő transzportja a határrétegekben zajlik. A hőoszlopban — a vertikális termikus határrétegben — tehát a nevének megfelelően valóban a hő transzportja történik, míg az anyag — a nagy viszkozitású folyadékokra jellemzően — egy jóval nagyobb felületen, jelen geometria esetén egy félcellányi területen áramlik felfelé, illetve lefelé.

A cella belsejében nincs hőtranszport, a fel- és leáramló anyag olyan gyorsan halad át a cellán, hogy közben nem történik számottevő hőcsere a hőoszlop és a környezete között, vagyis a hőmérsékletnek a hőoszlopokban és a cella belsejében az adiabatikus hőmérséklet–mélység profil szerint kellene változnia. A Boussinesq-közelítéssel kapott (3), illetve (7) hőtranszport-egyenlet a kompressziós munkavégzést nem veszi figyelembe, ezért alakul ki a cella belsejében állandó hőmérséklet. A kiterjesztett Boussinesq-közelítés alkalmazásával nyert hőtranszport-egyenlet [pl. (10) egyenlet, GALSA et al. 2008] megoldása már adiabatikus hőmérséklet–mélység profilt eredményez a cella belsejében [CSEREPES 2002]. Ugyanakkor a hőtranszportra és a hőmérséklet-eloszlásra vonatkozó fenti megállapítások az izotermikus cellamag kivételével továbbra is érvényben maradnak.

A T=0,5 dimenziótlan hőmérsékletértékre teljes a szimmetria, mert a geometria és a határfeltételek típusai miatt a kialakuló áramlás is szimmetrikus: a horizontális és vertikális áramlások sebessége páronként megegyezik, csak az előjelük különbözik. Érdemes megemlíteni, hogy az Ra=10^6 esetben a stabil stacionárius állapot, a többihez viszonyítva pont ellenkezőleg jön létre, azaz a feláramlás a cella jobb oldalán található. Mivel a rendszer szimmetrikus, ez semmilyen eltérést nem okoz a megfigyelt fizikai mennyiségekben, amelyet igazol a horizontálisan átlagolt hőmérséklet-mélység görbe is (4. ábra).

Érdekes továbbá, hogy Ra=10^7 esetben a Nusselt-szám és az átlagnégyzetes sebesség időben oszcilláló viselkedést mutat, mielőtt beállna a stacionárius állapot (2. b. ábra). Az átlagolt mennyiségekben tükröződő viselkedést a cella belsejében kialakult feláramlás jobbra-balra történő periodikus mozgása idézi elő (*5. ábra*). Ez a jelenség arra hívja fel a figyelmet, hogy növekvő Rayleigh-számmal csökken a cellák horizontális mérete [GALSA, CSEREPES 2003].



5. ábra. Hőmérséklet-eloszlás pillanatfelvétele Ra=10^7 esetben. A 2.b. ábrán látható Nu és v_{rms} oszcillációját a cella közepén periodikusan mozgó hőoszlop okozza

Fig. 5. Snapshot of the temperature field in case of Ra=10^7. Oscillation of Nu and v_{rms} shown in Fig. 2.b. is caused by the periodic movement of the hot plume in the cell

A modellezés során a tartomány horizontális méretét nem változtattuk, hogy az áramlások könnyebben összehasonlíthatók legyenek. Azonban $Ra=10^7$ esetében a tartomány horizontális mérete egy fél cellának sok, egy teljes cellának kevés. Kezdetben kialakult a teljes cella, belsejében a „hajladozó" feláramlással és az oldalfalakon található két fél leáramlással (5. ábra). Azonban ez az állapot nem volt stabil, és egy átmeneti szakasz után itt is kialakult a félcellás szerkezet. A modelltartomány méretének megválasztásával kényszerítettük a konvekcióra a félcellás szerkezetet, ami átmenetileg periodikusan változó kvázistacionárius áramlást eredményezett. Keskenyebb modelltartományon a stacionárius áramlás gyorsabban alakul ki [SÜLE 2005], vagy fordítva, szélesebb tartományon már kisebb *Ra* esetében is kvázistacionárius áramlás zajlik [GALSA, CSEREPES 2000]. A modelltartomány méretének megválasztása befolyásolja a megoldást, tehát a tartományt — lehetőség szerint — a vizsgálni kívánt jelenségnek megfelelően kell megválasztani [SÜLE 2005].

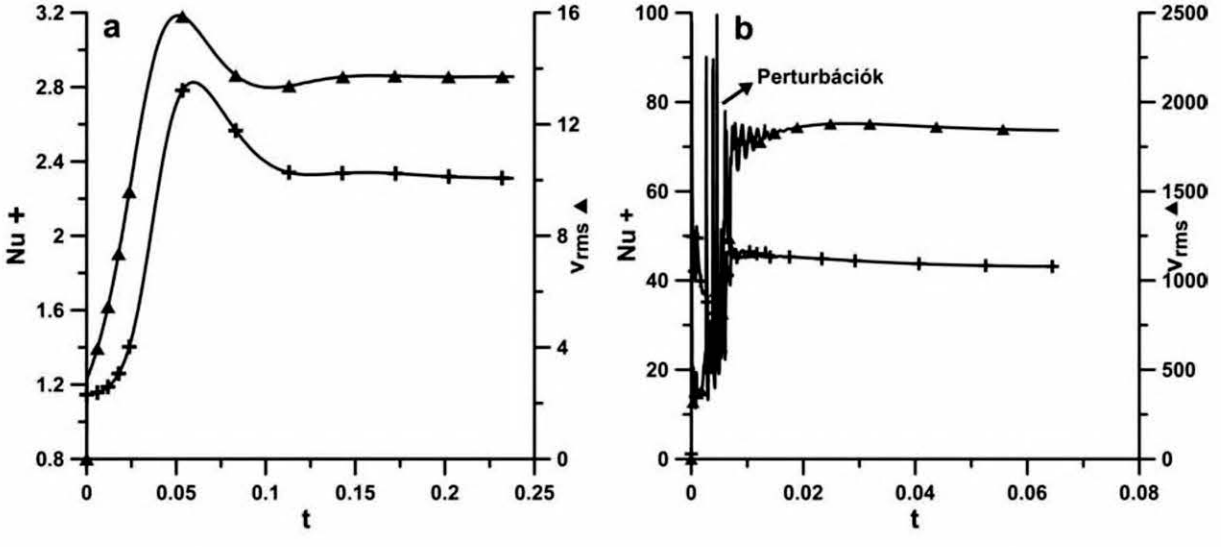
3.3. Henger geometria

A henger geometriában történt futtatások során mindenütt elértük a stacionárius állapotot. A *6. ábra* a felszíni hőáram és az átlagos sebesség időbeli változását mutatja tengelyszimmetrikus, henger alakú modelltartományon egy kis, valamint egy nagy Rayleigh-számú esetben. *Ra* növelése — hasonlóan a derékszögű modelltartománynál tapasztaltakhoz — elvékonyítja mind a horizontális, mind a vertikális termikus határrétegeket (*7. ábra*). A feláramlások a cella belsejében (az ábra bal oldalán) tengelyszimmetrikusan találhatók, míg a hideg leáramlások a henger külső részén. Ennek megfelelően a feláramlások geometriája oszlopszerű, míg a leáramlásoké lepelszerű.

Fontos különbség a derékszögű modelltartományhoz képest, hogy a legkisebb Rayleigh-számnál nem alakulnak ki termikus határrétegek, a megjelenő áramlások mindössze a konduktív hőmérsékleti állapot torzulását eredményezik: a tengelyben kicsit melegebb, a palástnál kissé hidegebb van. Egyértelmű, hogy ebben az esetben a hővezetés összemérhető az advekcióval. A jelenség magyarázata, hogy henger geometriában a kritikus Rayleigh-szám nagyobb, mint a derékszögű tartományon, így $Ra=10^4$ esetben az áramlás korán sem tekinthető szuperkritikusnak.

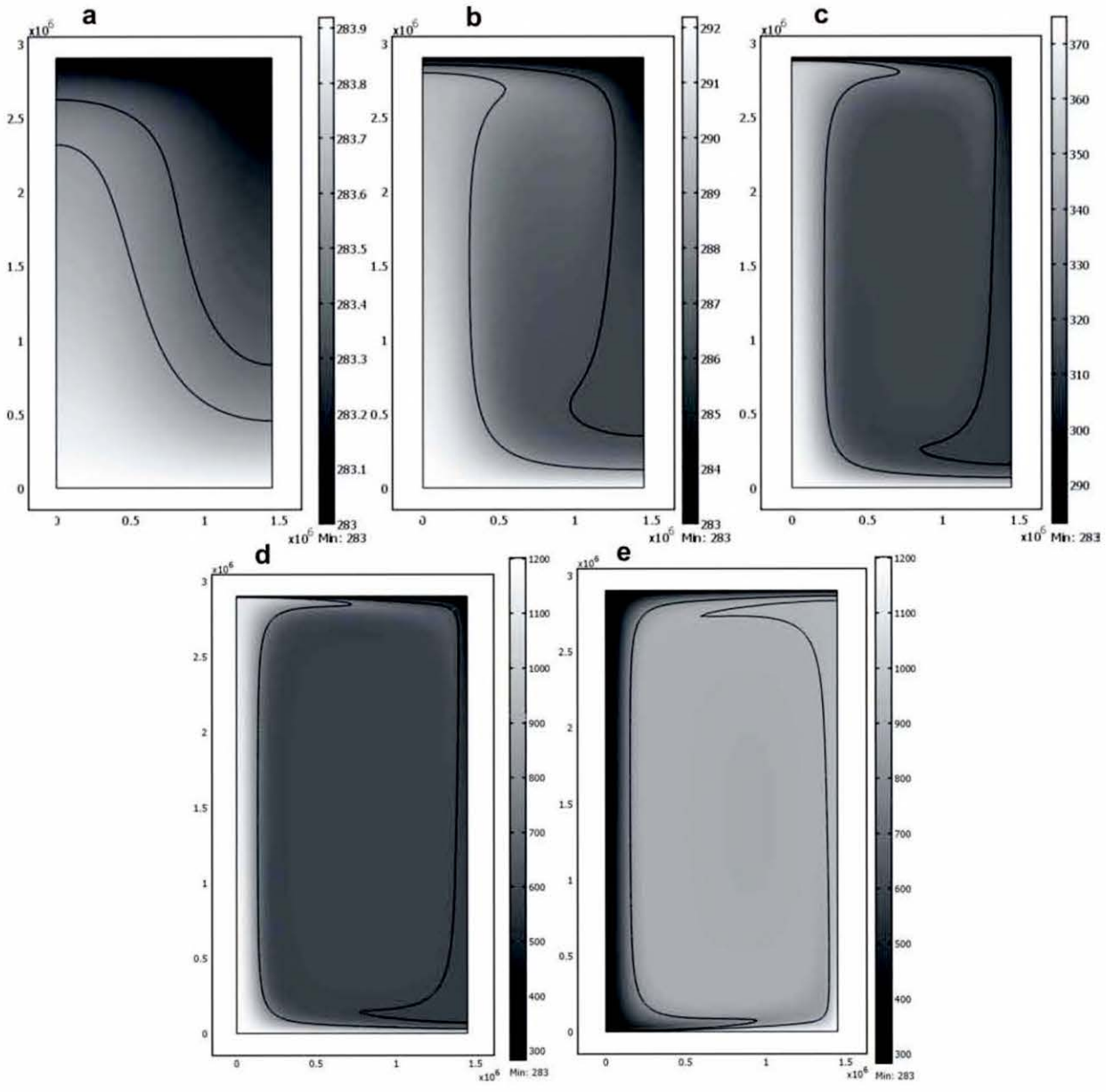
A horizontálisan átlagolt hőmérséklet-eloszlás (*8. ábra*) jól láthatóan alátámasztja a fentebb elmondottakat. $Ra=10^4$ értéknél nincs egyértelműen kijelölhető horizontális termikus határréteg, és nem található izotermikus cellamag sem. Nagyobb *Ra* értékek esetén a derékszögű modelltartománytól eltérően a cellamag dimenziótlan hőmérséklete 0,5 alatt marad, s a Rayleigh-szám növelésével csökken. Ennek oka, hogy az áramlás geometriája nem szimmetrikus: a hengerpalást mentén leszálló hideg ág felülete jóval nagyobb, mint a cella közepén felszálló meleg ág felülete. Mivel a hűtött felület nagyobb, mint a fűtött felület, a cella átlaghőmérséklete csökken. A Rayleigh-szám növekedésével a vertikális határrétegek elvékonyodnak; a cella közepén található hőoszlop felülete csökken, a hideg határréteg pedig jobban rásimul a hengerpalástra, így a hűtött felület nő, tehát a cella átlaghőmérséklete tovább csökken.

Az elmondottakat alátámasztja, hogy a legnagyobb Rayleigh-szám mellett egyaránt stacionárius megoldást kaptunk tengely menti felemelkedésre és palást menti süllyedésre, valamint fordított esetben tengely menti le- és palást menti feláramlásra (7.e. ábra). Az előbbi szerkezetet pozitív áramlási szerkezetnek hívjuk, mivel valószínűleg hasonló áramlási kép létezik a földköpenyben, utóbbit pedig negatívnak [CSEREPES 1992]. Az áramlás kialakulásának korai fázisában perturbáltuk a hőmérsékletteret (6.b. ábra), melynek hatására egyik vagy másik cellaszerkezet kialakulása elősegíthető, avagy gátolható. Számításaink alapján megállapítható, hogy mindkét megoldás egyformán stabil, a felszíni hőáramot, valamint az átlagos sebességet tekintve nincs különbség az eltérő cellaszerkezet között. Ugyanakkor az áramlás iránya erőteljesen befolyásolja a konvekciós cella átlagos hőmérsékletét. Ha a palláston hideg leáramlás zajlik, a cellát hűtő felület dominál az átlagos hőmérséklet kialakításában, ha azonban a palláston meleg feláramlás alakul ki, az felfűti a modelltartományt (8. ábra).



6. ábra. A Nusselt-szám és az átlagnégyzetes sebesség időbeli változása henger geometriában zajló áramlás során, (a) $Ra=10^4$ és (b) $Ra=10^7$

Fig. 6. Nu and v_{rms} as a function of dimensionless time in case of cylindrical geometry, (a) $Ra=10^4$ and (b) $Ra=10^7$



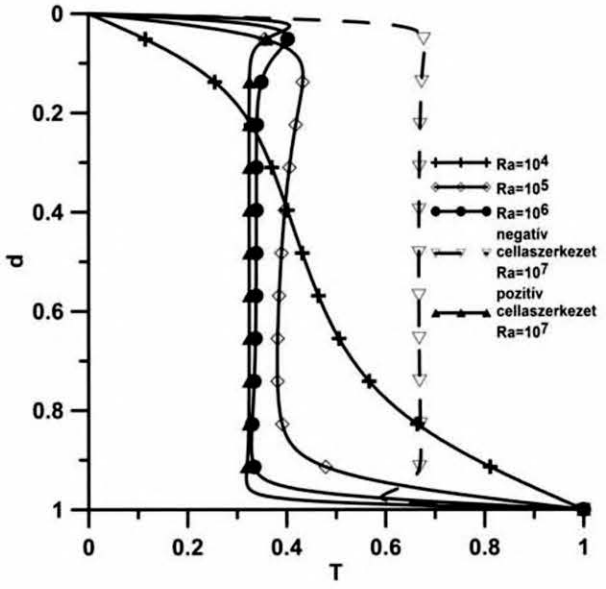
7. ábra. Stacionárius hőmérséklettér különböző Rayleigh-számok esetén henger alakú modelltartományon. Jelölés mint a 3. ábrán. A feláramlás a cella szimmetriatengelyében, a leáramlás a henger palástja mentén történik: (a) Ra=10^4, (b) Ra=10^5, (c) Ra=10^6, (d) Ra=10^7. (e) Hőmérséklet-eloszlás negatív cellaszerkezet esetén: leáramlás a henger belsejében és feláramlás a henger palástja mentén, Ra=10^7

Fig. 7. Stationary temperature distribution in a cylindrical domain convection for different Rayleigh numbers. (a) Ra=10^4, (b) Ra=10^5, (c) Ra=10^6, (d) Ra=10^7. The upwelling is situated in the center of the cell, downwelling happens along the surface of the cylinder. Fig. 7.e. shows the temperature field in case of negative cylindrical cell structure. Downwelling occurs in the centre of the cell, upwelling occurs along the rim of the cylinder, Ra=10^7

3.4. Hengergyűrű geometria

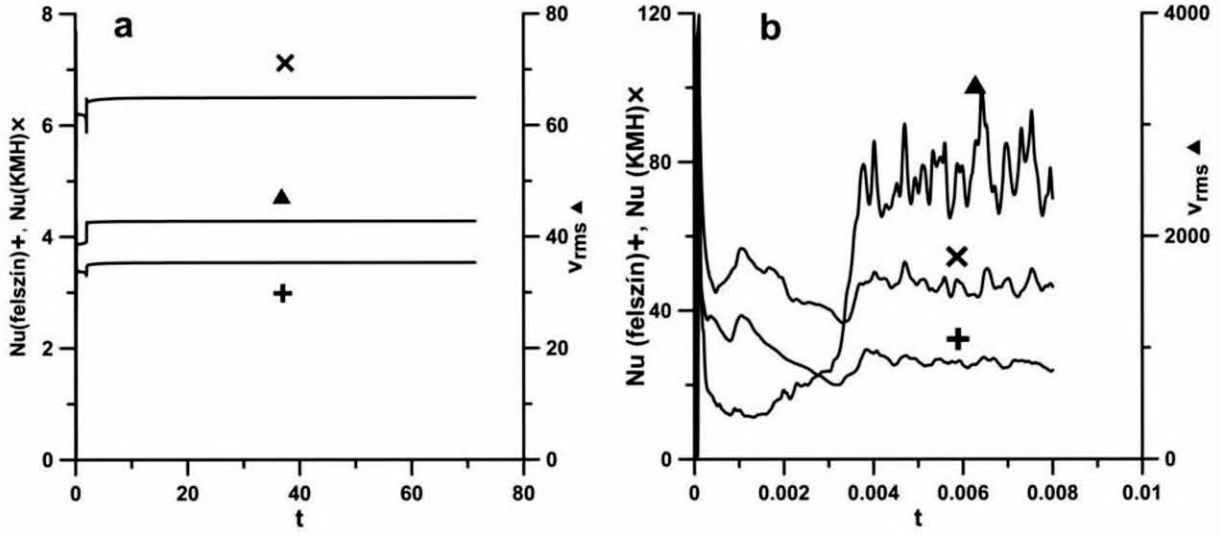
A hengergyűrű alakú modelltartomány abban különbözik az eddig ismertetett geometriáktól, hogy görbültsége révén alsó és felső határfelülete nem azonos, így ebből a szempontból a valós földköpenyt jobban közelíti. Azonban ez a geometria is csak kétdimenziós, mert a gyűrű síkjára merőlegesen az áramlás nem változik, a hengergyűrű egy végtelen hosszú henger tengelyirányára merőleges síkmetszetként kapható meg. Különbség az eddigi modellekhez képest, hogy sokkal nagyobb a konvekciós áramlások rendelkezésére álló tér, ezért várhatóan többcellás áramlás alakul ki.

A nagyobb modelltartomány által biztosított szabadabb áramlás már a Nusselt-szám és az átlagos sebesség időbeli változásában is megmutatkozik. Az eddigi modellekkel ellentétben csak Ra=10^4 esetben kaptunk stacionárius megoldást (*9. ábra*). Jól megfigyelhető, hogy a felszíni hőáram durván a fele (0,545-szöröse) a köpeny–mag határon (KMH) megfigyelt hőáramnak. Azaz a hőáramok viszonyában visszatükröződik a földmag, illetve a Föld teljes sugarának aránya, mert a modell nem tartalmazza a köpeny radioaktív hőtermelését.



8. ábra. Horizontálisan átlagolt dimenziótlan hőmérsékletek a dimenziótlan mélység függvényében különböző Rayleigh-számok esetén henger geometriában. Pozitív cellaszerkezet (belül feláramlás, kívül leáramlás) mellett a nagyobb hűtött felület következtében a cella belsejének hőmérséklete kisebb mint 0,5. Negatív cellaszerkezet (fordított áramlási irány) esetén a hőmérséklet–mélység görbe centrálisan szimmetrikus a d=0,5 ; T=0,5 pontra

Fig. 8. Horizontally averaged dimensionless temperature as a function of dimensionless depth for different Rayleigh numbers in cylindrical model domain. In case of positive cell structure (upwelling in the centre, downwelling at the rim) the outer cooler surface is larger resulting in lower than 0.5 mean temperature in the cell. In case of negative cell structure (opposite flow direction) the temperature–depth curve is symmetric with respect to the point d=0.5 and T=0.5



9. ábra. A Nusselt-szám (felszínen kereszttel, a köpeny–mag határon x-szel jelölve) és az átlagnégyzetes sebesség (háromszög) időbeli változása hengergyűrű rendszerben. (a) Ra=10^4 stacionárius, (b) Ra=10^7 nemstacionárius áramlás

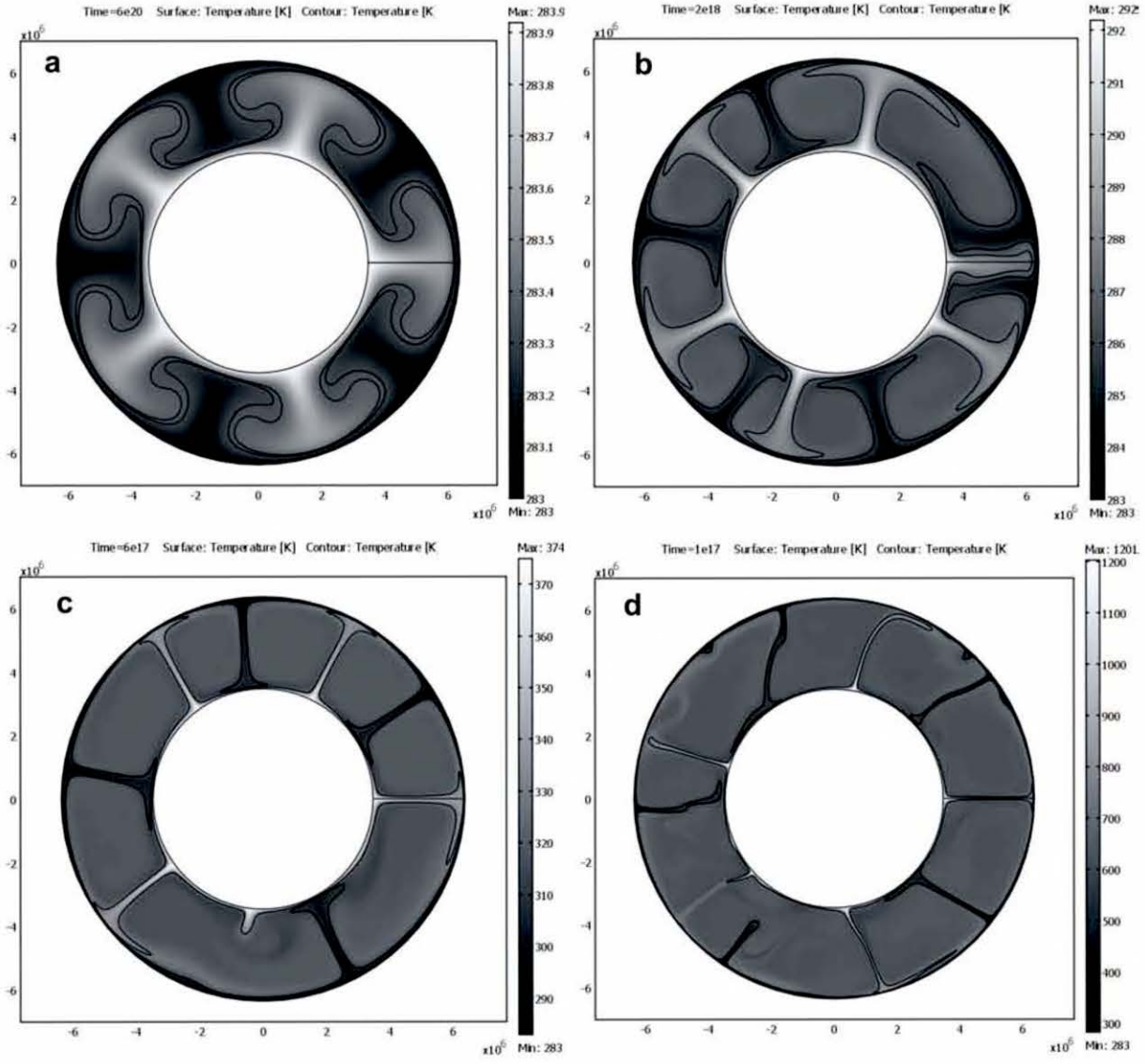
Fig. 9. Nusselt number at the surface (cross), the core-mantle boundary (x), and the *rms* velocity (triangle) as a function of time in cylindrical-shell model domain. (a) Ra=10^4 stationary, (b) Ra=10^7 non-stationary convection

A megnövelt modelltartomány hatása a hőmérséklet-térben is egyértelmű. A *10. ábra* a hengergyűrű modelltartományon kialakuló hőmérséklet-eloszlásnak egy-egy pillanatképét mutatja különböző Rayleigh-számok esetén. Növekvő *Ra* értékek mellett a fel- és leáramlások mindinkább dinamikusabbak, változékonyabbak, a valós földköpenyt megközelítő esetben (Ra=10^7) az áramlás időben erősen változó, kaotikus jelleget ölt. A termikus határréteg elmélet állítása, mely szerint *Ra* fokozásával a határrétegek elvékonyodnak, hengergyűrű geometriában is helytálló.

Megvizsgálva a hengergyűrű-modell körív mentén átlagolt hőmérséklet-mélység profilját (*11. ábra*) látható, hogy a henger geometriához hasonlóan a kisebb cellahőmérséklet felé történik eltolódás. Lényeges különbség azonban, hogy a csökkent átlaghőmérséklet (T≈0,4) függetlennek tűnik a Rayleigh-számtól. Ezen megfigyelés — a henger modelltartománynál tárgyaltaknak megfelelően — azzal magyarázható, hogy *Ra* növelésével a termikus határrétegek ugyan elvékonyodnak, tehát a felső, hideg határréteg felülete nő, míg az alsó, meleg határrétegé csökken. Ugyanakkor azonban a horizontális határrétegek felületének változása sokkal kisebb mértékű, mint a henger alakú modelltartományon a vertikális határrétegeké, hiszen hengergyűrű geometria esetén a horizontális határrétegek maximális, illetve minimális felülete adott a földfelszín és a köpeny–mag határ felülete által.

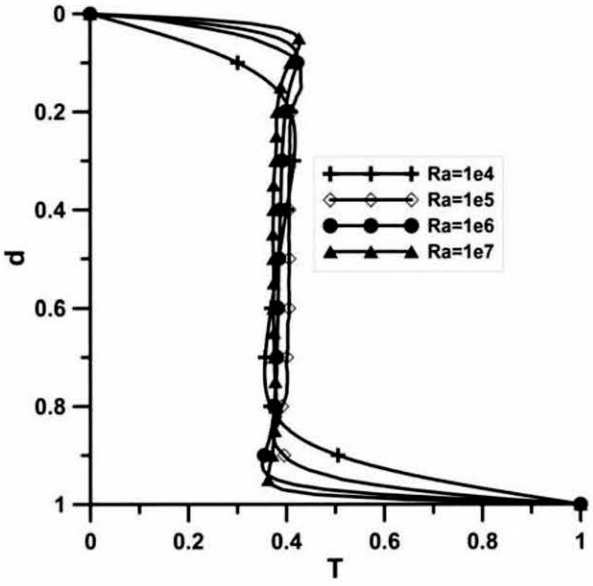
3.5. A különböző geometriájú modelltartományok összehasonlítása

A *12. ábra* a Nusselt-szám és az átlagnégyzetes sebesség változását mutatja a Rayleigh-szám függvényében az általunk vizsgált eltérő geometriájú modelltartományok esetén. Megállapítható, hogy a felszíni hőáram hozzávetőlegesen a



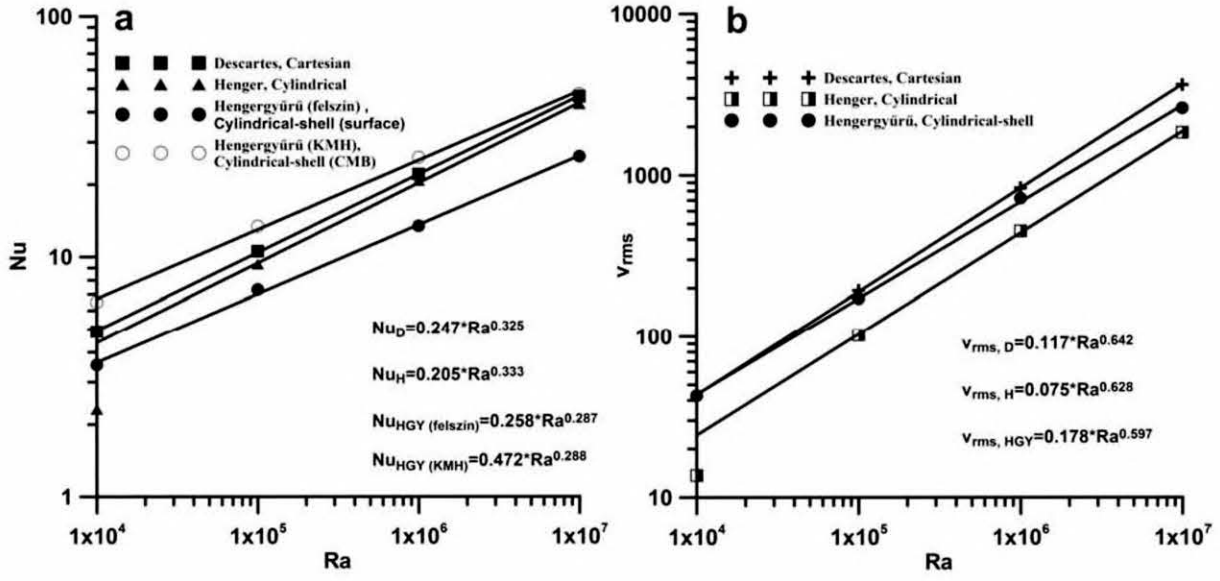
10. ábra. A hőmérséklettér pillanatképe hengergyűrű geometriában különböző Rayleigh-számok mellett (világos – meleg, sötét – hideg). Stacionárius végállapot: (a) Ra=10^4, nemstacionárius végállapot: (b) Ra=10^5, (c) Ra=10^6, (d) Ra=10^7

Fig. 10. Snapshots of the temperature field in cylindrical-shell geometry for different Rayleigh numbers (light shading: hot, dark shading: cold). Stationary state: (a) Ra=10^4, non-stationary state: (b) Ra=10^5 (c) Ra=10^6, and (d) Ra=10^7



11. ábra. Körív mentén átlagolt dimenziótlan hőmérséklet–mélység görbék hengergyűrű modelltartomány esetén különböző Rayleigh-számok mellett. A külső, hűtött felület nagyobb, mint a belső fűtött felület, ezért a cella belseje lehűl

Fig. 11. Spherically averaged dimensionless temperature–depth curves in cylindrical-shell domain for different Rayleigh-numbers. The outer cooled surface is larger than the inner heated surface leading to low mean cell temperature



12. ábra. (a) A Nusselt-szám és (b) az átlagnégyzetes sebesség a Rayleigh-szám függvényében különböző modellgeometriák esetén. A nemstacionárius megoldások esetén a számított paraméterek időbeli szórása a szimbólum nagyságrendjébe esik

Fig. 12. (a) Nusselt-number and (b) *rms* velocity as a function of the Rayleigh-number in case of different model geometries. In case of non-stationary solutions the standard deviation of the computed parameters is less or equal to the symbol size

Rayleigh-szám 1/3-ik, míg az átlagos sebesség *Ra* 2/3-ik hatványával arányosan emelkedik, függetlenül a használt modellgeometriától. A köpenykonvekció modellezésében ismert, hogy a numerikus módon meghatározott kitevők valamivel kisebbek a számos közelítést magában foglaló határréteg elméletből adódó kitevőknél ($Nu \sim Ra^{1/3}$, $v_{rms} \sim Ra^{2/3}$) [SOLOMATOV 1995; GALSA, LENKEY 2007]. Esetünkben az eltérés a hengergyűrű geometriában a legnagyobb, vélhetően azért, mert itt a legjelentősebb a különbség az analitikus közelítés és a numerikus modell között. Az illesztésnél nem vettük figyelembe a henger alakú modelltartományon $Ra=10^4$-nél kapott eredményeket, hiszen — a fentebb részletezett okok miatt — itt az áramlás nem tekinthető szuperkritikusnak, a kondukció hatása nem hanyagolható el az advekció mellett. A 12. ábrán feltüntettük a hőáram- és sebességértékek időbeli szórását is, noha ezek értéke oly csekély, hogy összemérhető a szimbólum nagyságával.

A hőáram- és a sebességgörbék további tanulmányozásakor észrevehető, hogy a hengergeometriában észlelt kis átlagsebességhez relatíve nagy felszíni hőfluxus tartozik (12. ábra). Azaz a lassabb áramlás is képes nagy hőmennyiséget szállítani, vagyis — ha szabad ilyen értelemben hatékonyságról beszélni — a henger alakú tartományon kialakuló hőtranszport a leghatékonyabb. Megjegyezzük, hogy a földköpenyben a legvalószínűbb geometriájú áramlási forma is ilyen, azaz henger alakú feláramlás (hőoszlopok) és lepelszerű leáramlás (szubdukálódó lemezek), habár nyilvánvaló, hogy a köpenyben számtalan más fizikai jelenség is befolyásolja az áramlási rendszert.

A vizsgálat megmutatta, hogy az átlagos cellahőmérséklet nem független a numerikus számításoknál használt modelltartományok geometriájától (*13. ábra*). Szimmetrikus geometria és határfeltételek esetén derékszögű tartományon a hőmérséklet–mélység profil is szimmetrikus, a dimenziótlan átlagos hőmérséklet hibahatáron belül T=0,5, értéke független a Rayleigh-számtól. Hengergeometriában a Rayleigh-szám növekedésével a vertikális határrétegek elvékonyodása miatt a hűtött és fűtött felületek aránya növekszik, ami az átlaghőmérséklet csökkenését okozza. Hengergyűrű geometriában a határrétegek vastagságának változása nem befolyásolja érzékelhetően a hideg és meleg felületek arányát, ezért annak az átlaghőmérsékletre gyakorolt hatása sem mutatható ki.

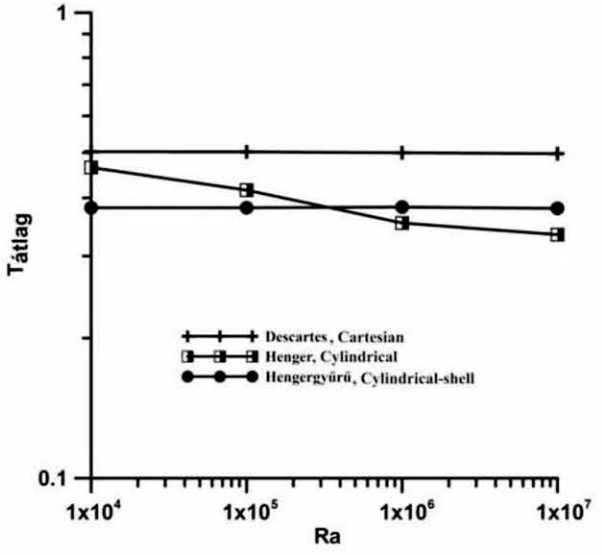
4. Összefoglalás, további tervek

Hazai viszonylatban először használtunk végeselemes numerikus módszert a földköpenyben zajló termikus konvekció modellezésére, ezért elkerülhetetlen volt az alkalmazott program tesztelése. A nemzetközi tanulmányokkal való összevetés alapján kijelenthető, hogy a numerikus számítások eredményei megbízhatóak. A módszer előnye, hogy nagyon rugalmasan képes kezelni a különböző alakú modelltartományokat, mely lehetővé tette, hogy — szintén hazai viszonylatban először — vizsgáljuk meg a termikus földköpeny-konvekció jelenségét nem derékszögű modelltartományokon.

A kétdimenziós geometria hatását tanulmányoztuk derékszögű, henger és hengergyűrű modelltartomány esetén. A modellekben a legegyszerűbb feltevéseket alkalmaztuk: homogén, izoviszkózus, alulról fűtött réteg, és az egyenletek Boussinesq-approximációval való közelítése. Ezért az eredmények nem vonatkoztathatók közvetlenül a földköpenyre. A modellezett áramlások annyiban földköpenyszerűek, amennyiben a fizikai paraméterek értékei, és így az áramlás intenzitását meghatározó dimenziótlan Rayleigh-szám a földköpenyre jellemző nagyságrendben vannak.

Szuperkritikus Rayleigh-szám esetén a hő transzportja a konvekciós cella peremein a termikus határrétegekben történik, míg a cellák belsejének hőmérséklete a

Boussinesq-közelítés mellett állandó marad, egyébként adiabatikusan változik. A függőleges hőtranszport a cellán keresztül a hőoszlopban, a vertikális határrétegben advekcióval zajlik, míg a horizontális határrétegekben a hőtranszport kondukcióval történik. A cella peremein természetesen nagyobb az áramlás sebessége, mint a cella belsejében, de a sebességtérben nem alakulnak ki határrétegek, áramlás az egész cellában zajlik. A termikus határrétegek kialakulása a kondukciónak az advekcióhoz viszonyított lényegesen kisebb „sebességének" következménye. *Ra* növelésével az áramlási sebesség is nő, ami a határrétegek elvékonyodását okozza.



13. ábra. A dimenziótlan átlaghőmérséklet és a Rayleigh-szám kapcsolata a vizsgált modellgeometriák esetében. A henger geometriájú áramlásban *Ra* növekedésével bekövetkező határrétegek elvékonyodása a hűtött külső felület növekedését és a belső fűtött felület csökkenését eredményezi, ezért a cella átlaghőmérséklete csökken

Fig. 13. Dimensionless mean temperature of the convection cell plotted against the Rayleigh number for the studied model geometries. In cylindrical convection the increase of *Ra* results in thinner boundary layers, which in turn leads to larger cooled surface and smaller heated surface. Therefore, the mean temperature of the cell decreases with increasing *Ra*

Mindhárom geometria esetén közelítőleg fennáll, hogy szuperkritikus Rayleigh-számok mellett a felszíni hőáram ($Nu \sim Ra^{1/3}$), az átlagnégyzetes sebesség ($v_{rms} \sim Ra^{2/3}$) szerint nő. Számításaink alátámasztják, hogy a kétdimenziós derékszögű modelltartományra levezetett határréteg-elméletből adódó összefüggések általános érvényűek nagy viszkozitású folyadékok termikus konvekciója esetén. Természetesen adott *Ra* mellett *Nu* és v_{rms} értéke, valamint a cella belsejének hőmérséklete már függ a választott modell geometriájától.

Derékszögű tartományon szimmetrikus határfeltételek mellett mind a horizontális, mind a vertikális termikus határrétegek szimmetrikusak, így a horizontálisan átlagolt hőmérséklet–mélység görbe is az, és a cella átlaghőmérséklete (T=0,5) független a Rayleigh-számtól. Henger geometria esetén a központi határréteg oszlopszerű, a felülete jóval kisebb, mint a henger palástján található határréteg felülete. Ezért a cella átlaghőmérsékletét a palást mentén zajló áramlás hőmérséklete határozza meg; pl. központi meleg feláramlás és palást menti hideg leáramlás esetén a cella lehűl. Ilyen áramlási irány esetén a Rayleigh-szám emelkedésével a vertikális határrétegek felületének csökkenése miatt az átlaghőmérséklet tovább süllyed. Hengergyűrű geometriában, a henger geometriához hasonlóan, a külső hűtött határfelület nagyobb, mint a belső fűtött határfelület, ami miatt a cella átlaghőmérséklete kisebb lesz T=0,5-nél. *Ra* növelésével a határrétegek felületének változása nem számottevő, így annak az átlaghőmérsékletre gyakorolt hatása sem számszerűsíthető egyértelműen.

Megegyező átlagnégyzetes sebességek mellett a legnagyobb felszíni hőáram hengergeometriában tapasztalható. Ebben az értelemben ez az áramlási forma képes a leghatékonyabb hőtranszportra, noha ismert, hogy a cellaméret megválasztása (az áramlás hullámhossza) befolyásolja a kialakuló átlagos paramétereket [GRIGNÉ, LABROSSE, TACKLEY 2005].

A földköpenyben számos olyan fizikai jelenség létezik, amely érdemben képes módosítani az itt bemutatott eredményeket [GALSA et al. 2008]. A közeljövőben a mélységfüggő, illetve mélység- és hőmérsékletfüggő viszkozitás, valamint a belső, radioaktív hőtermelés hatását kívánjuk tanulmányozni.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást az OTKA a K-72665 sz. pályázat, illetve a Nemzeti Kutatási és Technológiai Hivatal az OMFB-00124/2007 szerződésszámú Öveges József Program keretén belül támogatta.

HIVATKOZÁSOK

BÉNARD H. 1900: Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Revue Generale des Sciences Pures et Appliquees **11**, 1261–1271, 1309–1328

BLANKENBACH B., BUSSE F., CHRISTENSEN U., CSEREPES L., GUNKEL D., HANSEN U., HARDER H., JARVIS G.,, KOCH M., MARQUART G., MOORE D., OLSON P., SCHMELING H., SCHNAUBELT T. 1989: A benchmark comparison for mantle convection codes. Geophys. J. Int. **98**, 23–38

BRUNET D., YUEN D. A. 2000: Mantle plumes pinched in the transition zone. Earth Planet. Sci. Lett. **178**, 13–27

ČADEK O., VAN DEN BERG A. P. 1998: Radial profiles of temperature and viscosity in the Earth's mantle inferred from the geoid and lateral seismic structure. Earth Planet. Sci. Lett. **164**, 607–615

CHANDRASEKHAR S. 1961: Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Clarendon Press, Oxford

ČÍŽKOVÁ H., MATYSKA C. 2004: Layered convection with an interface at a depth of 1000 km: stability and generation of slab-like downwellings. Phys. Earth Planet. Inter. **141**, 269–279

CSEREPES L. 1992: A földköpeny termikus konvekciójának háromdimenziós szerkezetéről. Doktori értekezés, ELTE Geofizika Tanszék, Budapest

CSEREPES L. 2002: Convective motions in the mantle. Acta Geod. Geoph. Hung. **37**, 1, 3–27

FOWLER C. M. R. 1990: The Solid Earth: An Introduction to Global Geophysics. Cambridge University Press

GALSA A., CSEREPES L. 2000: The number of hotspots in mantle convection: effect of depth-dependent viscosity and internal heating in two-dimensional models. Acta Geod. Geoph. Hung. **35**, 383–396

GALSA A., CSEREPES L. 2003: The number of hotspots in three-dimensional numerical models of mantle convection. Acta Geod. Geoph. Hung. **38**, 103–109

GALSA A., LENKEY L. 2007: Quantitative investigation of physical properties of mantle plumes in three-dimensional numerical models. Phys. Fluids **19**, 116601

GALSA A., LENKEY L., SÜLE B., HEREIN M. 2008: A földköpenyben zajló konvekcióról. Magyar Geofizika **49**, 2, 75–87

GRIGNÉ C., LABROSSE S., TACKLEY P. J. 2005: Convective heat transfer as a function of wavelength: Implication for the cooling of the Earth, JGR 110, B03409

MITTELSTAEDT E., TACKLEY P. J. 2006: Plume heat flow is much lower than CMB heat flow. Earth Planet. Sci. Lett. **241**, 202–210

RAYLEIGH 1916: On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Phil. Mag. **32**, 529–546

SCHUBERT G., TURCOTTE D, OLSON P. 2001: Mantle Convection in the Earth and Planets. Cambridge University Press

SOLOMATOV V. S. 1995: Scaling of temperature- and stress dependent viscosity convection. Phys. Fluids **7**, 2, 266–274

SÜLE B. 2005: The structure and the surface manifestation of mantle plumes in depth-dependent three-dimensional models. Acta Geod. Geoph. Hung. **40**, 1, 89–104

TURCOTTE D. L., OXBURGH E. R. 1967: Finite amplitude convective cells and continental drift. J. Fluid. Mech. **28**, 29–42

ZIMMERMAN W. B. J. 2006: Multiphysics modeling with finite element methods. World Scientific Publishing Company, 432 p.