

# Sorfejtéses inverzió V. Gyors 2D geoelektromos inverziós módszer

GYULAI ÁKOS<sup>1</sup>, ORMOS TAMÁS<sup>1</sup>, DOBRÓKA MIHÁLY<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Miskolci Egyetem, Geofizikai Intézeti Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros

<sup>2</sup>MTA–ME Műszaki Földtudományi Kutatócsoport, 3515 Miskolc-Egyetemváros

Jelen dolgozat egy cikksorozat része, amelyben a Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszékén kifejlesztett sorfejtéses inverziós módszerrel alapuló adatfeldolgozási/értelmezési eljárásokat mutatjuk be. Az első dolgozatban a Fourier-transzformációt újszerű megközelítésben inverz feladatként tárgyaltuk úgy, hogy a frekvenciaspektrumot sorfejtéssel közelítettük, inverziós változónak a sorfejtési együtthatókat tekintve. A második dolgozatban a sorfejtéses inverzió módszerét a mélyfúrású geofizikai adatok feldolgozására vonatkozólag alkalmaztuk úgy, hogy a petrofizikai paramétereket – mint a mélység függvényeit – sorfejtéssel közelítettük, a sorfejtési együtthatókat az inverziós eljárás keretében állítottuk elő. A harmadik dolgozatban a sorfejtéses inverzió módszerével a gerjesztéspotenciál- (GP-) adatok feldolgozására mutattunk be új módszert. A negyedik dolgozatban a ME Geofizikai Tanszék és a BMGE Általános és Felsőgeodézia Tanszék együttműködése keretében korábban kidolgozott 2D eljárás továbbfejlesztésével bemutattuk a nehézségi erőter háromdimenziós potenciálfüggvényének inverziós előállítását Eötvös-inga-mérési adatok, nehézségi gyorsulási mérések, függővonal-elhajlásértékek és digitális terepmodelladatok együttes felhasználásával. A jelen dolgozatban 2D földtani szerkezeteken mért geoelektromos adatok inverziójára mutatunk be új, hatékony eljárást. A módszer lényege a korábbiakhoz hasonló: a földtani szerkezet vertikális és laterális koordinátáktól függő rétegvastagság és fajlagos ellenállás függvényeit sorfejtéses formában diszkrétizáljuk, és az inverz feladatot a sorfejtési együtthatókra fogalmazzuk meg. A 2D modell sorfejtéssel történő diszkrétizációja révén csökkenthetjük a modellparaméterek (sorfejtési együtthatók) számát, így jelentősen túlhatározott inverz feladatot kapunk, amely további regularizációs feltételek nélkül megoldható. A sorfejtési együtthatók ismeretében a lokális rétegeparamétereket a szelvény mentén pontról pontra számíthatjuk.

## Gyulai, Á., Ormos, T., Dobróka, M.: Series expansion based inversion V. A quick 2D geoelectric inversion method

The present study is a part of a series of articles in which data processing/interpretation methods are presented based on series expansion inverse technique developed by the Department of Geophysics, University of Miskolc. In the first paper the Fourier transform was discussed in a new approach as an inverse problem so that the frequency spectrum was approximated by series expansion and the inversion variables were regarded as series expansion coefficients. In the second article the series expansion inverse method was applied for borehole geophysical data processing so that the petrophysical parameters – such as functions of depth – were approximated by series expansion, the series expansion coefficients were produced within the confines of the inversion method. A new method which processes induced potential (IP) data by series expansion inversion method was presented in the third paper. In the fourth paper we developed the former 2D solution which was elaborated by the cooperation between the Department of Geophysics, MU and the Department of Geodesy and Surveying, BUTE, and an inversion reconstruction of 3D gravity potential was presented which was based not only on the torsion balance and gravity measurements, but also on the deflections of the vertical and digital terrain model data. Now as a continuation, this paper presents the principles of a new inversion method used for determining 2D geological structures. The basis of the method is that horizontal changes in layer-thicknesses and resistivities of the geological structure are discretized in the form of series expansion. The unknown expansion coefficients are determined by linearized iterative least-squares (LSQ) inversion of data provided by surface geoelectric measurements. The discretization of the 2D model by means of series expansion allows to reduce the number of model parameters. Thus, the resulting inverse problem becomes overdetermined and can be solved without the application of additional regularization, e.g., by smoothness constraints, which is usually required for traditional 2D/3D inversion. By knowing the expansion coefficients, the local layer parameters are calculated along the profile, point by point.

*Beérkezett:* 2011. február 20.; *elfogadva:* 2011. február 27.

## Bevezetés

A 2D és 3D földtani szerkezetek kutatásakor a mérési-kiértékelési módszereknek két különböző típusa használatos a geoelektromos mérések (szondázás) gyakorlatában.

Laterálisan „lassan” változó modellek esetén az ún. hagyományos vertikális elektromos szondázási (VESZ) mérések jól alkalmazhatók. A modellt leíró lokális rétegeparamétereket gyakran olyan látszólagos fajlagosellenállás-adatokból becsülik (szondázási görbék), melyeket viszonylag nagy állomásközzel (50–200 m) és egyedi 1D inverziós módszerekkel határoznak meg (Koefoed 1979). Azért, hogy a lehető legjobb közelítést érjük el, a mérőelektróda elrendezésének a földtani szerkezet dőlésirányába kell esnie. Ezután a lokális rétegeparaméterek interpolációjával határozzuk meg a geológiai szerkezetet. Az egyedi inverzió során három- vagy többregeges modell esetén fellépő ekvivalencia gyakran olyan nagy bizonytalanságot okoz a paraméterbecslésben, mely a gyakorlatban nem elfogadható. Ezt a problémát jelentősen csökkenthetjük együttes inverziós módszerek alkalmazásával (Vozoff, Jupp 1975, Hering et al. 1995, Haber, Oldenburg 1997, Misiak et al. 1997, Kis 1998, Szabó 2004, Gallardo, Meju 2004). Annak érdekében, hogy jobb közelítést kapjunk laterálisan lassan változó földtani szerkezetek esetére, új inverziós algoritmust, az ún. 1,5D inverziót vezette be Gyulai és Ormos (1999a). Ez a módszer a szelvény mentén minden egyes VESZ állomáson mért összes adatot egyetlen inverziós eljárásban egyesíti. A modellparaméterek laterális változását (a rétegek fajlagos ellenállásának és vastagságának a laterális koordinátáktól való függését) sorfejtéssel közelítik. Költséghatékony számítás biztosítása érdekében a szerzők 1D előremodellezést használtak. A 1,5D módszer hatékonyságát mind szintetikus, mind terepi adatokon bemutatták (Gyulai, Ormos 1997, 1998, 1999a, 1999b).

2D vagy 3D inverz feladatok előremodellezésének FD módszerrel történő megoldásakor egy négyzetháló rácspontjaiban definiált, szakaszonként állandó ellenállásértékeket feltételeznek, melyek az inverziós eljárás ismeretlenjei. Ez a megközelítés – a mérési adatok számát messze meghaladó számú – ismeretlen eredményez, mely alulhatározott inverz feladathoz vezet. Ismeretes, hogy az alulhatározott inverz feladatnak egyértelmű megoldása érdekében további megkötéseket kell alkalmaznunk. Ezek a megkötések biztosíthatják a megoldás simaságát (Marquardt–Levenberg-módszer) vagy akár egy réteghatár meglétére fókuszálhatnak (Blaschek et al. 2008). Az alulhatározott inverziós algoritmusokat különböző kényszerfeltételekkel stabilá tehetjük, azonban a nem fizikai alapokon nyugvó járulékos kikötések komolyan befolyásolhatják az inverziós eredményeket.

A feladatok többértelműségének csökkentése és gyorsabb program megvalósítása érdekében több szerző kombinálta már a 2D és 1D számításokat (pl. Christiansen, Auken 2004). Auken et al. (2005) 1D-s előremodellezéssel működő, „laterálisan kényszerített” inverziós módszert mutatott be nagyon nagy adatrendszer feldolgozására és értelmezésére. A lokális 1D modelleket laterálisan kapcsolták össze

úgy, hogy a szomszédos paraméterek (tipikusan fajlagos ellenállás és mélység) között hozzávetőleges azonosságot írtak elő meghatározott intervallumon belül (Auken, Christiansen 2004).

Jelen cikkben alternatívát ajánlunk a többértelműség csökkentésére, mely velejárója a hagyományos 2D inverziós sémáknak. Továbbfejlesztve a 1,5D inverziós eljárást az előremodellezési számításokhoz a Spitzer (1995) által kidolgozott FD algoritmust használjuk. Az eljárás lényeges részeként a 2D geoelektromos földtani modell parametrializálását továbbra is a rétegvastagság- és a fajlagosellenállásértékek sorba fejtésével végezzük és a sorfejtési együtthatókat az inverziós probléma ismeretlenjeiként definiáljuk. Ezáltal – a hagyományos véges differenciás (FD) vagy véges elemes eljárás (FEM) alapú inverziós módszerekhez képest – az ismeretlenek száma jelentősen csökkenthető, ami az inverz feladat túlhatározottságát eredményezi további önkényes (regularizációs vagy simasági) kikötés nélkül is. A rövidebb számítási idő elérése érdekében a 1,5D módszert (Gyulai és Ormos 1999a) használjuk az első néhány iterációs lépésben, majd annak eredményeit kezdeti modellként használjuk az ezt követő (2D előremodellezésre épített) inverzióban. Ezt a módszert kombinált geoelektromos inverzióknak (CGI = *Combined Geoelectric Inversion*) nevezzük.

A sorfejtéses inverzió módszerét mutatta be akadémiai doktori értekezésében vezetett hullám szeizmikus adatok feldolgozására Dobróka (1994) (a 2D szeizmikus vezetett hullám direkt feladatát WKBJ közelítésben kezelve). Szeizmikus refrakciós inverz probléma megoldására Ormos (2002), majd Ormos és Daragó (2005) sorfejtéses inverziós eljárást dolgozott ki. Ezekben a dolgozatokban a modell laterális változásait sorfejtéssel diszkrétizálták, az inverziós problémát pedig sorfejtési együtthatókra fogalmazták meg.

## Sorfejtéses geoelektromos inverzió

A CGI módszer első fázisában a 1,5D inverziót megfelelő startmodell felállítására használjuk, ezért kiindulópontként egy rövid áttekintést nyújtunk a 1,5D módszerről, mert ennek is a modellparaméterek sorfejtése az alapja. A linearizált CGI algoritmus a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszerét (LSQ) használja a sorfejtési együtthatók becslésére.

## A 1,5D geoelektromos inverziós módszer

Ahogy azt a bevezetésben már említettük, a 1,5D inverziós módszert a hagyományos VESZ mérések értelmezésére fejlesztették ki (Gyulai, Ormos 1997, 1998, 1999a). A módszert alkalmazva a 2D földtani modell laterális változásait sorfejtéssel írjuk le alkalmasan választott bázisfüggvények segítségével. Ebben az iteratív inverziós algoritmusban 1D előremodellezést alkalmazunk. A sorfejtési együtthatók az inverziós problémában ismeretlenekként szerepelnek.

Amint azt Gyulai és Ormos (1999a) is leírta, a sorfejtési együtthatókat együttesen lehet meghatározni a szelvény menti összes VESZ mérés adataiból. Ebben a megközelítés-

ben a sorfejtési együtthatók (melyek a teljes szelvény mentén megegyeznek) az előremodellezés során használt különböző 1D modelleket kapcsolják össze. A szintetikus és terepi adatokon végzett korábbi vizsgálataink megmutatták, hogy a 1,5D inverziós eljárás pontos és megbízható paraméterbecslést ad, és – az 1D előremodellezés ellenére – az eredmények igen gyakran elfogadhatóak a terepi gyakorlatban (Gyulai, Ormos 1999a, Gyulai et al. 2000, Gyulai 2001).

Korábbi geoelektromos kutatások (Gyulai, Ormos 1997, 1998, 1999a, Kis et al. 1998) bemutatták az 1,5D inverziós módszer néhány előnyét, úgymint számítási sebesség, pontosság, stabilitás stb. Ezeknek az eredményeknek alapján Kis (1998) általánosította a 1,5D inverziós eljárást más típusú bázisfüggvények használatával, és tanulmányozta az ekvivalenciaprobléma felbontására gyakorolt hatását.

A 1,5D közelítő inverzióban a sorfejtéses módszert a modellparaméterek laterális változásainak leírására alkalmazzuk. Feltételezzük, hogy a laterálisan változó modellparaméterek Fourier-sorfejtéssel megfelelő pontossággal közelíthetők (Gyulai, Ormos 1999a):

$$\rho_n(s) = \frac{1}{2}d_n + \sum_{k=1}^{K_n} d_{nk} \cos k \frac{2\pi s}{S} + \sum_{k=1}^{K_n} d_{nk}^* \sin k \frac{2\pi s}{S_p}, \quad (1)$$

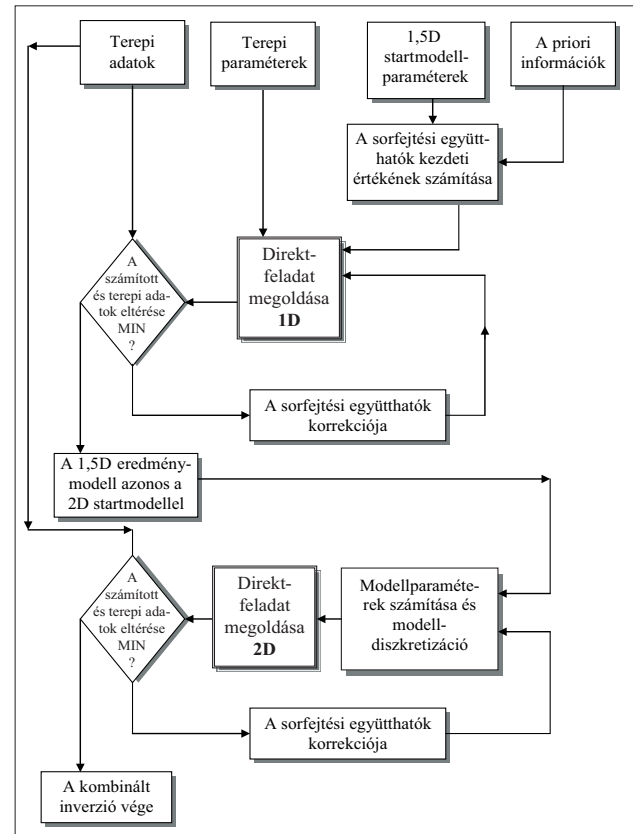
ahol  $n = 1, \dots, N$ ,

$$h_n(s) = \frac{1}{2}c_n + \sum_{l=1}^{L_n} c_{nl} \cos l \frac{2\pi s}{S} + \sum_{l=1}^{L_n} c_{nl}^* \sin l \frac{2\pi s}{S_p}, \quad (2)$$

ahol  $n = 1, \dots, N - 1$ , valamint  $\rho_n(s)$  az  $n$ -ik réteg ellenállásfüggvénye,  $h_n(s)$  az  $n$ -ik réteg vastagsághüvelyne és  $d_{nk}, d_{nk}^*, c_{nl}, c_{nl}^*$  jelölik a sorfejtési együtthatókat.  $N$  a rétegek száma és  $s$  az  $S_p$  hosszúságú szelvény menti laterális koordináta.  $K_n$  és  $L_n$  maximális értékeit a VESZ pontok alapján lehet meghatározni, ahogy azt Gyulai és Ormos (1999a) is leírta. Az inverziós módszer alkalmas a legtöbb elektróda elrendezésben (Wenner, dipól–dipól, pole–pole) mért adatok értelmezésére és kényszerített inverzióként is kezelhetjük (Auken et al. 2005, 2006, Pellerin, Wannamaker 2005). Ebben az értelemben a megkötés a különböző adatrendszer közötti csatlakozás lesz, köszönhetően annak, hogy a sorfejtési együtthatók minden számított adatra azonosak lesznek.

## A kombinált geoelektromos inverziós módszer

Ahhoz, hogy pontosabb eredményeket kapjunk gyorsan változó 2D földtani szerkezetek esetén, pontos előremodellezés alkalmazására van szükség a 2D inverzió során. A 1,5D inverziót ezért továbbfejlesztettük, mivel az 1D előremodellezés gyorsan változó modelleknél elégtelen pontosságú becslést ad. Ebben az új, linearizált CGI inverziós algoritmusban a 1,5D inverziós módszerrel egy startmodell számítottunk (első fázis), ami azt jelenti, hogy az első iterációkban 1D előremodellezést alkalmazunk. Az ezután következő iterációkban (második fázis) a lassúbb, de pontosabb 2D előremodellező FD algoritmust (Spitzer 1995) használjuk az elméleti adatok és a Jacobi-mátrix elemeinek számítására. A Spitzer által kifejlesztett FD előremodellezéses eljárást



1. ábra Az együttes inverziós módszer algoritmusának és folyamat-ábrájának

Figure 1 Algorithm and flow chart of combined inversion method (CGI)

3D számításokra tervezték. 2D vizsgálatban való alkalmazása során a számítási idő növekedését tapasztalhatjuk. Annak ellenére, hogy ismertek gyorsabb módszerek is, a Spitzer-féle eljárását alkalmaztuk azért, hogy megkönnyítsük a programozási feladatokat, ha később kutatásainkat 3D földmodellekre is kiterjesztjük. A CGI eljárásban a sorfejtési együtthatók ismeretlen modellparaméterekként vesznek részt (1. ábra).

Sorfejtéskor a rétegvastagság- és ellenállásértékeket a laterális koordináták folytonos függvényeként fejezzük ki, ezért ezeket a mennyiségeket tetszőleges helyen számíthatjuk. Az FD modellezés (Spitzer 1995) szakaszonként állandó ellenállásértékeket feltételez, melyeket négyzethálón definiálunk. A sorfejtéssel előállított modellparaméterek rácsra történő leképezésére mindegyik direkt feladat számításnál szükség van. Ugyanis mindegyik VESZ állomáshoz „egyedi” rácshálót kell használni, melynek osztásköze az elektródaközöknek és az elvárt modell felbontásának megfelelően mind horizontális, mind vertikális irányban logaritmikus léptékű. A rácspontoknál a fajlagosellenállás-értékek az adott réteg fajlagosellenállás-értékeinek sorfejtésével határozhatók meg, ráadásul abban az esetben, ha a rácspontok a réteg közeli szomszédságában helyezkednek el, súlyozást alkalmazunk. A CGI eljárás alap gondolatát így részletezhetjük:

- az első fázisban 1,5D közelítéssel gyorsan előállítunk egy modellt, melyet a későbbi 2D inverziós eljárások kezdeti modelljének tekinthetünk
- a második fázisban 2D előremodellezéssel számítjuk ki az elméleti adatokat és a Jacobi-mátrix elemeit. A kezdeti modell (lásd az első fázisban) általában elég közel van a megoldáshoz, így csupán néhány további 2D iterációs lépés elegendő egy elfogadható paraméterbecsléshez a második fázisban. A sorfejtéses módszer nagy előnye, hogy az ismeretlenek száma a mért adatokhoz képest sokkal kisebb, s ez biztosítja az inverz feladat túlhatározottságát. Így elkerülhetjük a további, nem fizikai kikötések használatát.

Az inverziós eredmény pontosságának leírására különböző mennyiségeket használhatunk. Az adattérben az  $L_2$  normát alkalmazva a normált  $d$  adattávolságot az alábbiak szerint definiáljuk:

$$d = \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left( \frac{\rho_{a,i}^{(\text{mért})} - \rho_{a,i}^{(\text{számított})}}{\rho_{a,i}^{(\text{számított})}} \right)^2} \times 100\%, \quad (3a)$$

ahol  $I$  jelöli a  $\rho_{a,i}$  mért vagy számított látszólagos fajlagos-ellenállás-értékek számát. Ismert modellen számított szintetikus adatok inverziója esetén ( $\mathbf{m}^{(\text{egzakt})}$  paraméterekkel) a relatív modelltávolságot is lényeges számolni:

$$D = \sqrt{\frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \left( \frac{m_q^{(\text{becsült})} - m_q^{(\text{egzakt})}}{m_q^{(\text{egzakt})}} \right)^2} \times 100\%, \quad (3b)$$

ahol  $Q$  a modellparaméterek számát jelöli.

A paraméterbecslés pontosságát általában a varianciával jellemzik, melyet a paraméterek kovarianciamátrixának főátlóbeli elemeiből származtatunk (Menke 1984). A sorfejtés esetében meghatároztuk mindegyik VESZ állomásnál a kovarianciamátrix elemeit (Gyulai és Ormos 1999a)

$$\sigma_{km} = \sigma_k(x_m) = p_k^{-1}(x_m) \sqrt{\sum_{i=1}^{J(k)} \sum_{j=1}^{J(k)} \{\Psi_{ki}(x_m) \Psi_{kj}(x_m) COV_{ij}\}}, \quad (4a)$$

ahol  $\sigma_k(x)$  jelöli a  $k$ -ik modellparaméter (pl. ellenállás vagy vastagság) becslési hibáját és  $\sigma_{km}$  ugyanezt jelöli az  $m$ -ik VESZ állomáson (ha  $x = x_m$ ).  $K$  a  $p_k(x)$  modellparaméterek számát ( $k = 1, 2, \dots, K$ ), valamint  $M$  a szelvény menti VESZ állomások számát mutatja ( $m = 1, 2, \dots, M$ ).  $J(k)$  a  $k$ -ik modellparamétert leíró sorfejtés bázisfüggvényében az elemek száma,  $\Psi_{ki}(x)$  és  $\Psi_{kj}(x)$  az  $i$ -ik és  $j$ -ik bázisfüggvények, és  $COV_{ij}$  a becsült sorfejtési koefficiensek kovarianciamátrixának elemei (Menke 1984).

Ahhoz, hogy a paraméterbecslésről átfogó képet kapjunk, be kell vezetnünk az  $F$  átlagos (százalékos) becslési hibát:

$$F = \sqrt{\frac{1}{KM} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M \sigma_{km}^2} \times 100\%. \quad (4b)$$

Ahhoz, hogy a becsült modellparaméterek közötti korrelációs mértékét leírjuk, a széles körben használt korrelációs mátrixot alkalmaztuk a teljes szelvény egészére.

$$CORR_{ij} = COV_{ij} [COV_{ii} COV_{jj}]^{-1/2}.$$

A mátrix elemeinek nagy száma miatt hasznos lehet bevezetnünk egy skalárt

$$S = \sqrt{\frac{1}{P(P-1)} \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P (CORR_{ij} - \delta_{ij})^2}, \quad (5)$$

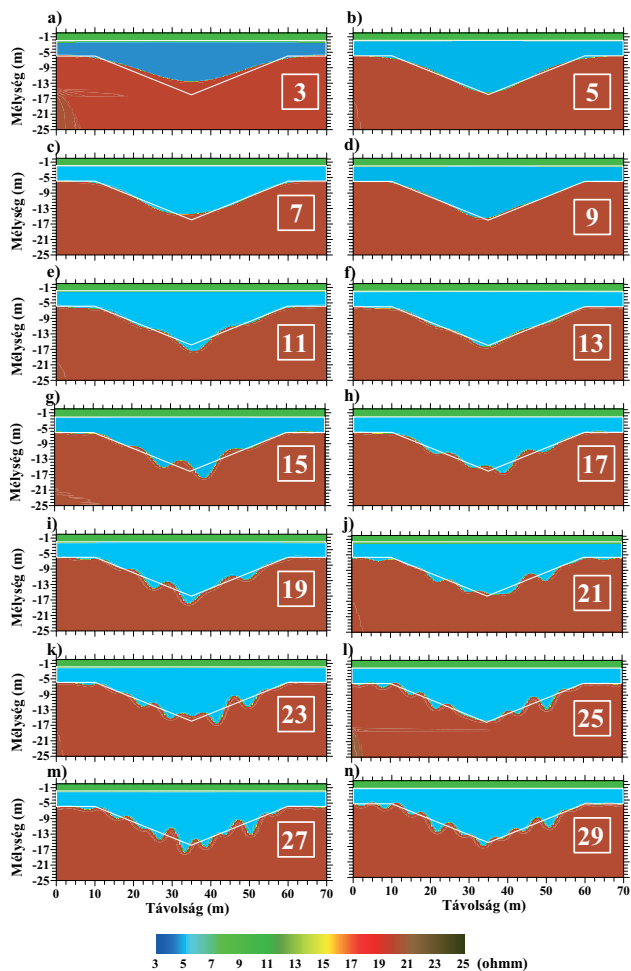
amelyet átlagkorrelációnak nevezünk (Menke 1984). Itt  $P$  a modellparaméterek száma, míg  $\delta_{ij}$  a Kronecker-szimbólum. Minél kisebbek az egész invertált szegmenst jellemző  $D$ ,  $F$  és  $S$  értékei, annál megbízhatóbbak a 1,5D és CGI inverzió eredményei. Terepi esetben az inverziós eredmények jellemzésére csak az  $F$  és  $S$  értékeket tudjuk használni. Ezekon kívül azoknál a kutatásoknál, amelyeknél szintetikus adatokat használunk, a  $D$  modelltávolságot is alkalmazhatjuk. Az együtthatók optimális számának meghatározásához előbb említett mennyiségeket használhatjuk.

## Az együtthatók optimális száma

A sorfejtésen alapuló inverziós módszerek esetén fontos meghatározni a sorfejtési együtthatók optimális számát. Ez a szám a földtani szerkezettől és az adatok által hordozott zajtól függ, azonban magát a szerkezetet csak az inverzió után ismerjük meg. A 1,5D és CGI inverziós eljárások (szintetikus és terepi adatokon végrehajtott) vizsgálatai megmutatták, hogy különböző számú együtthatók többféle eredménymodellt határozhatnak meg a  $d$  normalizált adattávolság hasonlóan alacsony értéke mellett is. Ennek következtében a legjobb eredményül szolgáló modell kiválasztásának az  $F$  átlagos becslési hiba minimumától és a  $D$  modelltávolságtól kellene függnie szintetikus esetben. Az együtthatók optimális számának meghatározását optimalizációs eljárásként is kezelhetjük. Ezt a feladatot különböző számú együtthatókra futtatott CGI programsorozattal oldottuk meg.

Az eljárás bemutatásához két szintetikus modellt használtunk. Az első esetben háromréteges 2D modellt választottunk egyenes szakaszokból álló réteghatárokkal (a 2. ábrán fehér vonalakkal ábrázolva, Gyulai et al. 2007).

E vizsgálat során a modellben csupán a rétegvastagságok változtak laterálisan. A 2. ábrán látható modellparaméterek értékei a következők:  $\rho_1 = 10 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 5 \Omega\text{m}$  és  $\rho_3 = 20 \Omega\text{m}$ . A rétegvastagságokat trigonometrikus sorokkal írtuk le. Az első rétegvastagság esetén az együtthatók száma 3 volt. A második rétegvastagság becsléséhez 3 és 29 között változó számú együtthatót választottunk (a 2. ábrán fehér négyzetekben foglalt számokkal jelölve). A modelleket a CGI módszer segítségével értékeltük egyenként, minden egyes együtthatószámra. Az eredmények a 2. és 3. ábrán láthatók (Gyulai et al. 2007). A 3.a ábrán azt figyelhetjük meg, hogy a  $d$  normalizált adattávolság az együtthatók számának függvényében gyorsan eléri a minimális értékét, és azután nem változik. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy számos különböző, eredményül kapott modell létezhet (különböző számú együtthatókkal) ugyanolyan  $d$  adatilleszkedési érték mellett (zöld pontok és illesztési görbe a 3.a ábrán). Az  $F$  átlagos becslési hiba és a  $D$  relatív modelltávolság is 9-nél éri el a minimális értékét, mely az optimális együtthatószámnak tekinthető. A legjobb illeszkedéshez tartozó eredmények grafikusán a 2. ábrán láthatók.

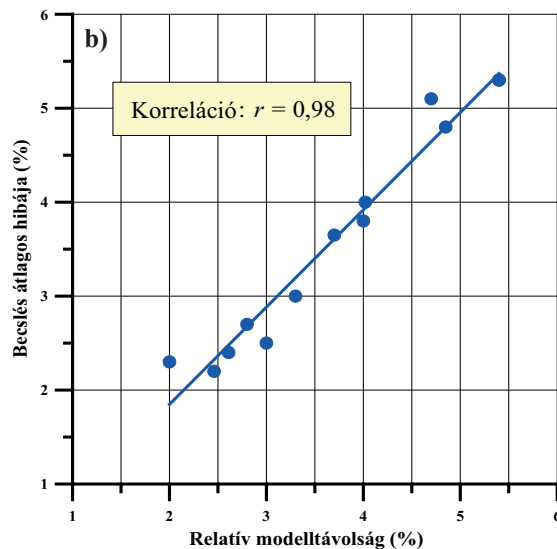
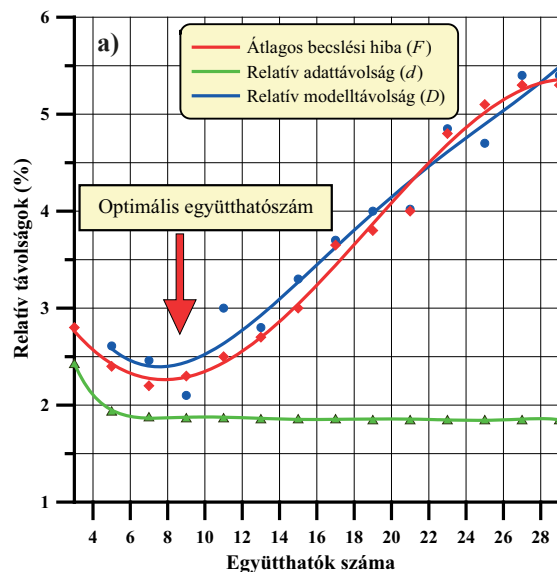


**2. ábra** Az együtthatók optimális számának keresése. a–n) A második réteg vastagságának (fehér téglalapok) megfelelő együtthatók számát alkalmazó CGI eredményei. d) Az együtthatók optimális száma 9 (lásd még a 3.a ábrán)

**Figure 2** Finding the optimal number of the coefficients. a–n) Results of CGI-s using different number of coefficient regarding to the second layer thickness (white boxes). d) The optimal coefficient number is 9. (See also in Fig. 3.a)

Az  $F$  és  $D$  közötti korreláció értéke közel 1 (lásd 3.b ábra). Ennek következtében terepi alkalmazás esetén (ahol a  $D$  relatív modelltávolságot nem lehet meghatározni) az együtthatók optimális számát  $d$  és  $F$  egyidejű minimumánál kell keresni. Egy ettől eltérő típusú szintetikus modell esetére szintén hasonló eredményt kaptunk

A második esetben a modellünket egy homogén féltérbe helyeztünk, nagy fajlagos ellenállású „blokk” alkotta (fehér négyzetek a 4. ábrán). Az ilyen típusú modell leírására nem a trigonometrikus sorba fejtett folytonos függvényvel való leírás a legalkalmasabb. (A modellparaméterek és a 4. ábrán használt szintetikus adatok később a szövegben olvashatók.) E vizsgálat során minden modellparamétert (vastagság és fajlagos ellenállás) trigonometrikus sorokkal írunk le (az eljárás stabilitása miatt) 3-3 együtthatóval. Ez alól kivétel a második réteg fajlagos ellenállásának együtthatóinak száma, melyet 7-ről 15-re változtattunk, öt lépésben

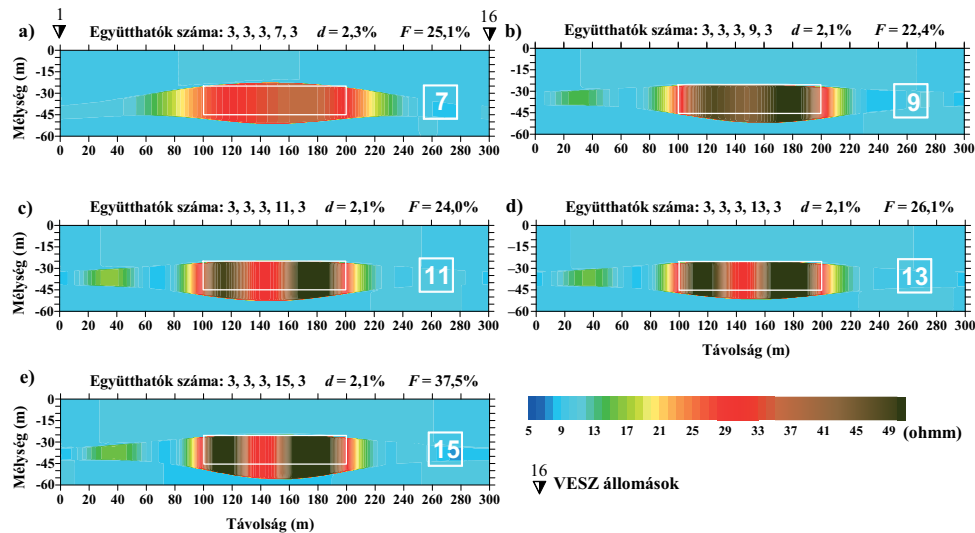


**3. ábra** a) Az együtthatók optimális száma  $d$ ,  $F$  és  $D$  minimumánál található. Lásd még 2.d ábrán. b) A becslés átlagos hibája ( $F$ ) és a relatív modelltávolság ( $D$ ) majdnem teljesen korrelál

**Figure 3** a) The optimal number of coefficients can be found at the minimum of  $d$ ,  $F$  and  $D$ . See also in Fig. 2.d. b) The main estimation error ( $F$ ) and the relative model distance ( $D$ ) are almost entirely correlated

(fehér négyzetek az együtthatószámmal a 4. ábrán) CGI inverziók sorozatával.

A  $d$  normalizált adattávolság az együtthatók számának függvényében 2,1%-nál érte el minimumát. Ez az érték változatlan maradt minden olyan eredményül kapott modell esetén, melyeket több mint 7 együtthatóval közelítettünk. Az  $F$  átlagos becslési hiba minimális értéke 22,4% volt 9 együttható esetén. (E modelltípus esetén nem használhatjuk a  $D$  relatív modelltávolságot, mert a „blokkmodellen” kívüli féltér rétegvastagság értékei meghatározhatatlanok.) Az együtthatók optimális számát  $d$  és  $F$  egyidejű minimális



**4. ábra** Az együtthatók optimális számának keresése. a–e) A CGI eljárás eredményei eltérő számú együttható alkalmazásával tekintettel a második réteg ellenállására (téglalappal). b) Az együtthatók optimális száma 9, amely a  $d$  és  $F$  minimumához tartozik

**Figure 4** Finding the optimal number of the coefficients. a–e) Results of CGI-s using different number of coefficients regarding to the second layer resistivity (white boxes). b) The optimal coefficient number is 9, which is to be found at the minimum of  $d$  and  $F$

értékeit keresve *trial and error* eljárás eredményeként kaphatjuk meg. A gyors CGI eljárással több inverziót hajthatunk végre különböző együtthatószám kipróbálására viszonylag rövid időn belül. Az együtthatók optimális száma a jelenlévő zaj mennyiségétől és típusától függhet, azonos modellek esetén is különböző értékek adódhatnak.

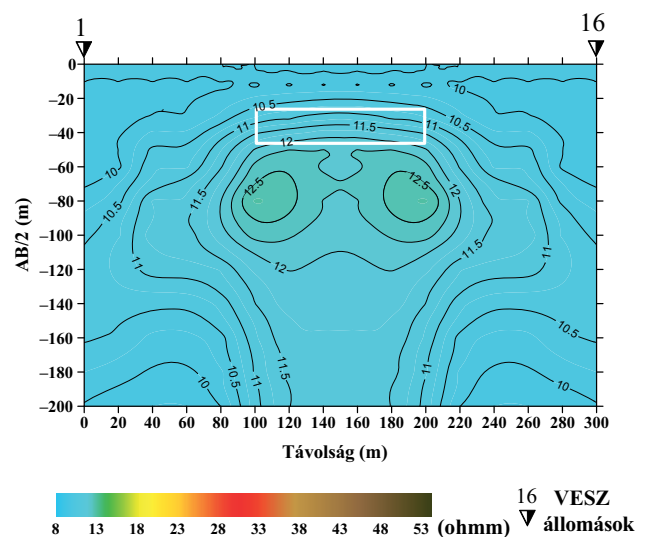
### A CGI módszer szintetikus adatokon történő alkalmazása

A javasolt inverziós módszerek legfontosabb jellegzetességeinek leírásához szintetikus adatrendszereket generáltunk egy olyan modellen, melyet már korábban publikáltak (Loke, Barker 1996). Ebben a modellben  $\rho = 50$  ohmm ellenállású 2D téglalap alakú ( $20 \times 100$  m) testet ágyasztunk 25 m mélységben a 10 ohmm ellenállású közegbe. Ugyanezt a modellt használtuk annál a vizsgálatnál, melyet a 4. ábra mutat be.

A vizsgálathoz a szintetikus látszólagos fajlagosellenállás-adatokat 16 állomásnál, 3,2–200 méteres AB/2 távolságok mellett Schlumberger-elektroda elrendezésben számítottuk Spitzer (1995) FD programja segítségével. A 5. ábra a modellt (téglalappal) és a számított Schlumberger-féle látszólagos fajlagosellenállás-értékek pszeudoszelvényét ábrázolja.

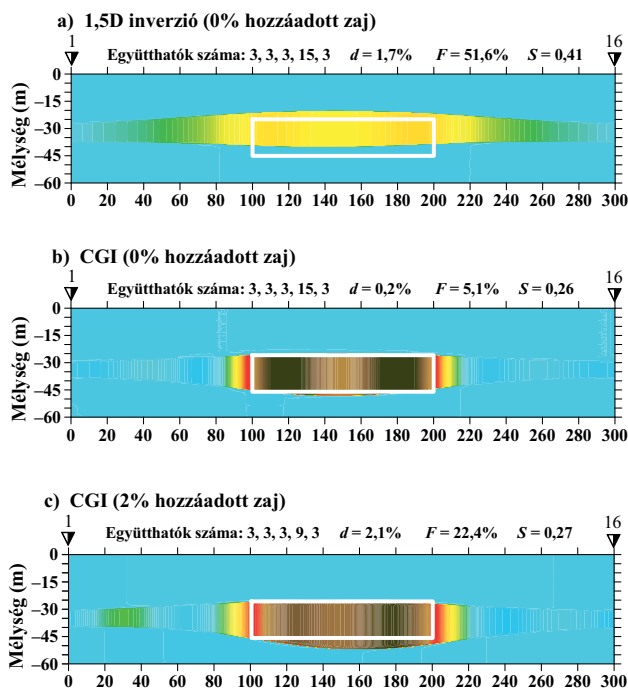
Ezt a zajmentes adatrendszert használtuk bemeneti adatként a CGI és 1,5D inverziós eljárásoknál. A kutatott 2D modell három rétegből áll, laterális irányban folyamatosan változó paraméterekkel. Mind a rétegvastagságokat, mind a fajlagosellenállás-értékeket Fourier-sorfejtéssel diszkrétizáltuk. Minden rétegvastagság, valamint az első és harmadik fajlagos ellenállás 3-3, míg a második 17 együtthatóval írható le.

A 6.a ábra a 1,5D inverzió eredményét mutatja be 35 iterációs lépés után. Ez volt az inverziós eljárás első fázisa (lásd 1. ábra). (A 6.a és 6.b ábrán a sorfejtési együtthatók maximális száma  $2L_1 + 1, 2L_2 + 1, 2K_1 + 1, 2K_2 + 1, 2K_3 + 1$  látható, melyeket az (1) és (2) egyenletekben találunk. Például, ha „az együtthatók száma: 3, 3, 3, 15, 3” a két vastagságértéket 3 sorfejtési együtthatóval írjuk le, míg a rétegek  $\rho_1(s), \rho_2(s), \rho_3(s)$  fajlagos ellenállásának függvényeit rendre 3, 15 és 3 együtthatójú Fourier-sorfejtési együtthatóval közelítjük).



**5. ábra** Homogén féltérben 2D téglalap alapú hasábmmodell (fehér téglalap) és az FD eljárással Schlumberger-elrendezésben, 16 állomásra számolt látszólagos fajlagosellenállás-értékei

**Figure 5** 2D rectangular prism model in a homogeneous half space (white box), and its apparent resistivity response calculated by FD method for Schlumberger array at 16 stations

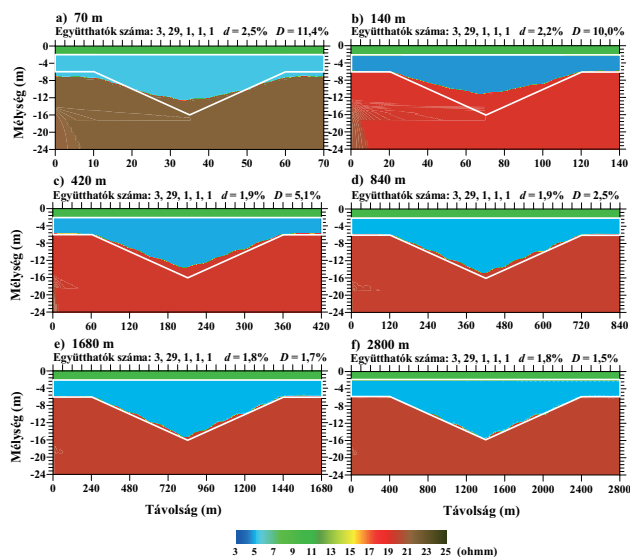


6. ábra Az inverziós eredmények összehasonlítása az 5. ábra szintetikus adatait felhasználva. a) 1,5D inverzió zajmentes adatokkal; b) CGI zajmentes adatokkal; c) CGI 2%-os zajjal terhelt adatokkal

Figure 6 Comparison of inversion results using synthetic data of Fig. 5. a) 1,5D inversion with noise-free data; b) CGI with noise-free data; c) CGI with 2%

A CGI eljárás a második fázisban 2D előremodellezéssel (1. ábra) folytatódott, melynek eredményei 4 iterációs lépést követően a 6.b ábrán láthatóak. A 1,5D és CGI módszerek eredményének összehasonlítása végett azonos számú sorfejtési együtthatót használtunk. Összehasonlítva a  $d$ ,  $F$  és  $S$  értékeket kijelenthetjük, hogy a javulás jelentős, hiszen a 1,5D inverziós  $d = 1,7\%$ ,  $F = 51,6\%$  és  $S = 0,41\%$  értékek a CGI eljárást alkalmazva  $d = 0,2\%$ ,  $F = 5,1\%$  és  $S = 0,26\%$  értékekre csökkentek. A CGI első fázisában (zajmentes adatok esetében) a viszonylag magas értékű  $d$  a kombinált inverzió első részében alkalmazott 1D előremodellezés következménye. A fajlagosellenállás-anomália alakja majdnem pontosan közelíti a téglalap alakú inhomogenitás alakját, valamint a fajlagosellenállás-értékek is közel állnak a tényleges értékekhez ( $\rho_1 = 10$  ohmm,  $\rho_2 = 50$  ohmm,  $\rho_3 = 10$  ohmm). Az inverzióban az ismeretlenek (sorfejtési együtthatók) száma 27 volt.

Fontos látni, hogyan is működik a CGI módszer zajos adatok esetén, ezért az előző adatrendszert (5. ábra) 2%-os Gauss-eloszlású zajjal terheltük. Ahogy azt a 6.c ábra is mutatja, az együttes inverziós módszer hasonlóan jó eredményt ad zajos adatok esetén is. Ebben az esetben – zaj jelenlétében – a második réteg fajlagosellenállás-függvénye együtthatóinak optimális száma 9. Ez az eljárás és a legjobb modell az előző részben bemutatott 4b. ábrán látható. A relatív adattávolság 2,1% (közel azonos a bemeneti adatok hibaszázalékával). Az átlagos becslési hiba (a (4a) egyenlet-



7. ábra A 1,5D inverziós módszer használhatósága különböző hosszúságú 2D földtani modellek esetén, zajos szintetikus adatok felhasználásával. a–b) Viszonylag rövid modellek esetén az 1D közelítés csak számottevő hibával használható. c–f) hosszú modellek, melyek 1D-ként kezelhetők, esetén az 1D közelítés elfogadható hibát eredményez

Figure 7 Test of the 1,5D inversion on models with different length, using noisy synthetic data. a–b) In the case of relatively short models the 1D approximation can be used only with considerable error; c–f) in the case of the long models, which can be treated as nearly 1D ones, the using 1D approximation results in acceptable errors

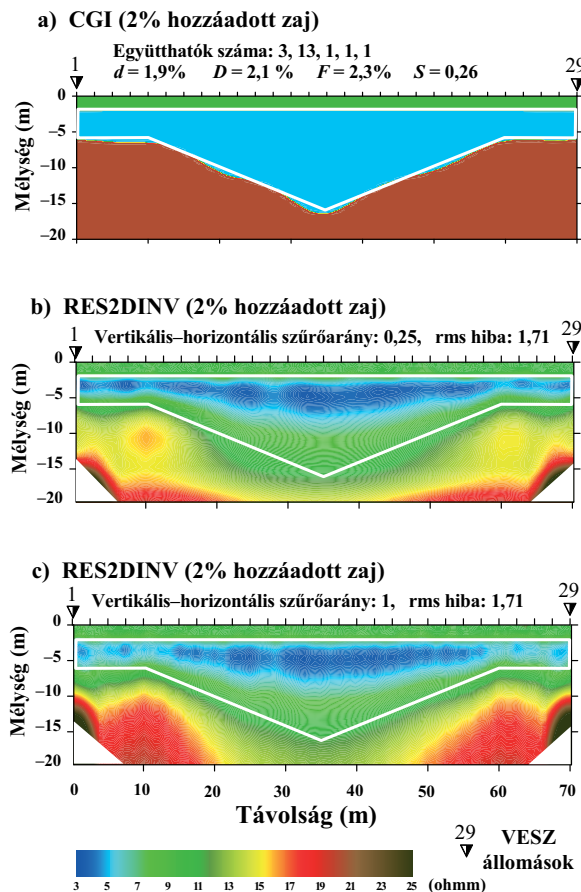
ben definiálva)  $F = 22,4\%$ , mely viszonylag magas, amelyet a második rétegben a fajlagos ellenállások értékeinek kisebb hullámzása okozott (ez a Fourier-sorfejtésből adódik). Az átlagkorreláció, mely a sorfejtési együtthatók természetét írja le,  $S = 0,27$ , gyengén korrelált (azaz megbízható) eredményeket mutat. Ezzel ellentétben az 1D inverzió és normál terepi körülmények esetében  $S$  értéke elérheti a 0,7-et.

Fontosnak találtuk a 1,5D közelítés pontosságát különböző mértékben változó földtani szerkezetek sorozatán megvizsgálni. Ahhoz, hogy ezt megtehesük, hat azonos alakú modellt definiáltunk (7. ábra).

Minden modell háromréteges, a második és harmadik réteg között húzódó réteghatár egyenes szakaszokból áll. A szelvényhossz a modell mentén, azaz profiltávolság, 70 m és 2800 m között változik 6 lépésben, míg az összes modell vertikális mérete változatlan marad.

Így egy modellsorozatunk adódik, amely 2D (7.a ábra) és majdnem 1D (7.f ábra) között változik. A szintetikus adatokat FD módszerrel számítottuk 1,6 és 50 m közötti elektrodátávolságú Schlumberger-elrendezésre a szelvény mentén, 29 állomáson. A szintetikus adatokat 2%-os Gauss-zajjal terheltük.

A 1,5D módszer tesztelése során a diszretizáláshoz Fourier-sorfejtést használtunk. Az első vastagságértéket 3, a másodikat pedig 29 együtthatóval írtuk le. Hogy tisztán lássunk, az ellenállás laterálisan változatlan; azaz mindegyiket



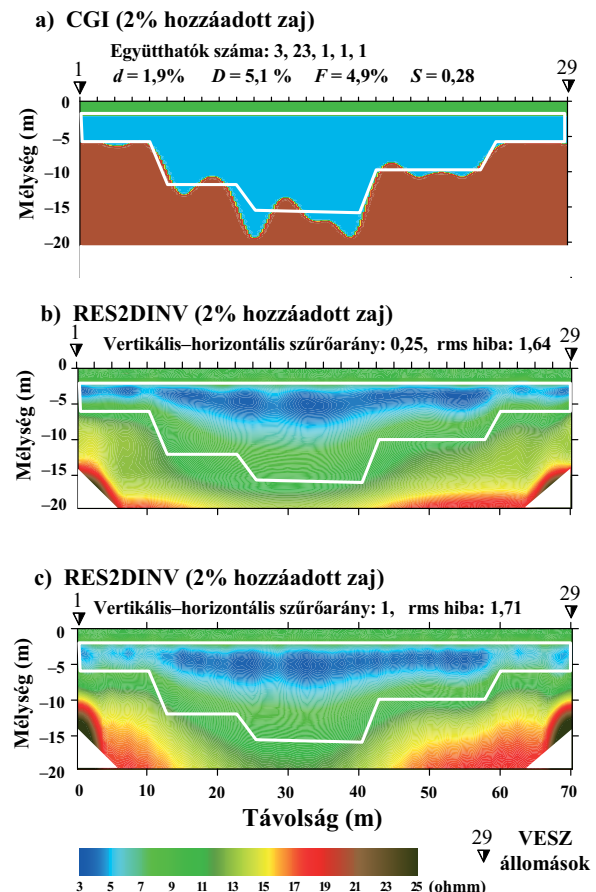
**8. ábra** Zajos szintetikus adatrendszer inverziós eredményeinek összehasonlítása. a) CGI eredményei; b) RES2DINV eredményei, ahol a vertikális-horizontális szűrőarány: 0,25; c) RES2DINV eredményei, ahol a vertikális-horizontális szűrőarány 1,0

**Figure 8** Comparison of inversion results of noisy synthetic data. a) Result of CGI; b) result of RES2DINV using vertical to horizontal filter ratio of 0,25; c) result of RES2DINV using vertical to horizontal filter ratio of 1,0

egy-egy együtthatóval írtuk le (ami egyébként nem lenne szükség szerű). Így a sorfejtési együtthatók a tesztek során rendre: 3, 29, 1, 1, 1 voltak.

Ahogy a 7.a-f ábrán is látható, a pontos és becült modellek közti relatív távolság a modell-távolság ( $D$  a (3b) egyenletben definiálva) a modell laterális méretének növekedésével jelentősen csökken. A várakozásoknak megfelelően az 1,5D inverzió (1D előremodellezést tartalmazva) jobb becslést ad hosszú modellek (7.c-f ábra) esetén, ahol 1D modellezés helyes közelítés. Azonban a 7.a-b ábra modelljei esetében az 1D közelítés csak számottevő hibával alkalmazható annak ellenére, hogy az 1,5D egyébként az egyedi 1D inverzióhoz képest jobb eredményt ad.

Ezen okból kifolyólag a számítást 5 CGI iterációval folytattuk, hogy tökéletesítsük a modellt. A gyorsan változó modellel (7.a ábra) elvégzett együttes inverzióval elérhető adott pontosság a 2D előremodellezésnek köszönhető. A modellre vonatkozóan a CGI inverzió eredménye a 2.d ábrán látható.  $D$  értékére 2,1%-ot kaptunk CGI esetében és



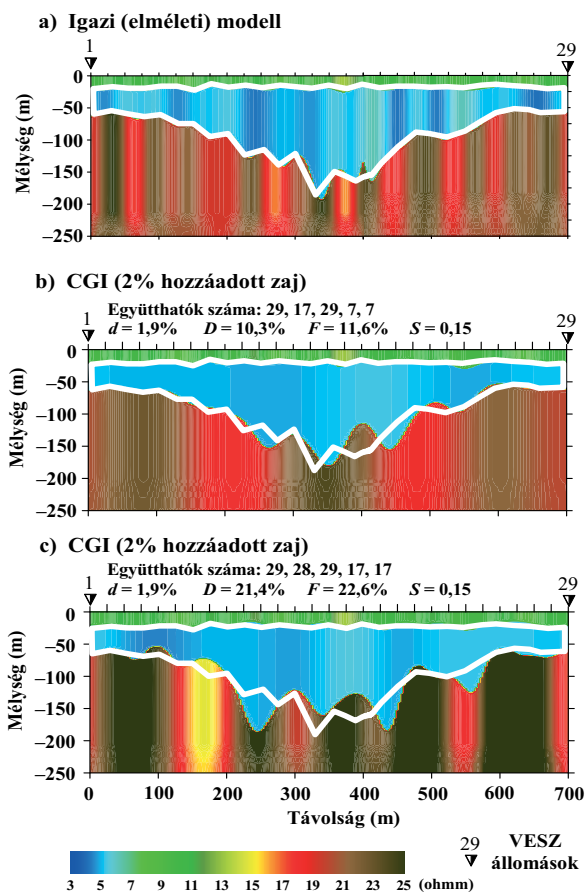
**9. ábra** Zajos szintetikus adatrendszer inverziós eredményeinek összehasonlítása hibás modellen. a) CGI eredményei; b) RES2DINV eredményei, ahol a vertikális-horizontális szűrőarány: 0,25; c) RES2DINV eredményei, ahol a vertikális-horizontális szűrőarány 1,0

**Figure 9** Comparison of inversion results of noisy synthetic data on a fault model. a) Result of CGI; b) result of RES2DINV using vertical to horizontal filter ratio of 0,25; c) result of RES2DINV using vertical to horizontal filter ratio of 1,0

11,4%-ot (7.a ábra) 1,5D inverzió esetében. Gyakorlatilag mindkét esetben  $d$  értékei ugyanazok.

Összehasonlításképpen a 8.a ábra a CGI eljárás használatával (lásd még 3.d ábra) előállított 2D modellt mutatja, ahol a következő értékeket kaptuk:  $d = 1,9\%$ ,  $D = 2,1\%$ ,  $F = 2,3\%$  és  $S = 0,26$ . A kereskedelemben kapható inverziós szoftvert, a RES2DINV-et (Geotomo Software) alkalmazva, melyet a geoelektromos gyakorlatban elterjedten használnak, a 8.b-c ábrán látható eredmények adódtak. Itt a legjobb eredmény elérése érdekében az alábbi értékeket használtuk: vertikális-horizontális szűrőarány = 0,25 (8.b ábra) és 1,0 (8.c ábra), a modellblokkok maximális száma 50. A RES2DINV szoftverrel számított rms-érték 1,71 mind a 8.b és 8.c ábrára vonatkozólag. A 8.a-c ábra adatrendszerei 2%-os Gauss-zajjal terheltek.

A 9.a ábrán a 8. ábrához hasonló modell látható azzal a különbséggel, hogy a második rétegben vetők sorozatát látjuk. A CGI eljárás használatával a következő értékeket kaptuk:  $d = 1,9\%$ ,  $D = 5,1\%$ ,  $F = 4,9\%$  és  $S = 0,28$ .



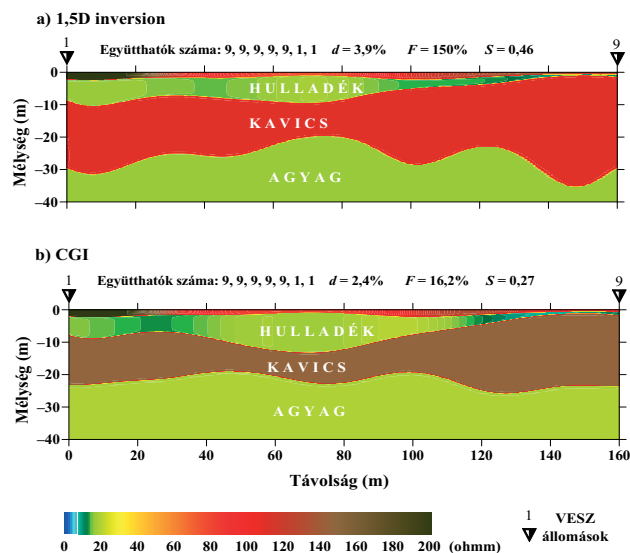
**10. ábra** Zajos szintetikus adatrendszer CGI eredményeinek összehasonlítása horizontálisan gyorsan változó modellen. a) Igazi (elméleti) modell; b) CGI eredményei kisszámú együtthatót használva; c) CGI eredményei nagyszámú együtthatót használva

**Figure 10** Comparison of CGI results of noisy synthetic data on a model with horizontal rapidly changing parameters. a) True (theoretical) model; b) result of CGI using lower number of coefficients; c) result of CGI applying higher number of coefficients

A RES2DINV esetében a szoftver belső paramétereire az alábbi értékeket használtuk: vertikális–horizontális szűrősimaság = 0,25 (9.b ábra) és 1,0 (9.c ábra), a modellblokkok maximális száma 50. A RES2DINV szoftverrel számított rms-érték 1,64 a 9.b és 1,71 a 9.c ábrára vonatkozólag. A 9.a–c ábra adatrendszereit 2%-os Gauss-zajjal terheltük.

Mint azt az előző összehasonlítása megmutatja, a CGI módszer túlhatározott inverz feladatot old meg (bármiféle nem fizikai feltétel vagy simítás nélkül), ezért sokkal éleesebb határokat ad, mint a RES2DINV, melynek használatával simított földtani modellt kapunk átmeneti réteghatárokkal.

A CGI eljárás tesztelésére a 10. ábrán látható új, gyorsan változó modellt definiáltunk úgy, hogy az előbbi, lassan változó modellparaméter-értékeket (azaz fajlagos ellenállást és rétegvastagságot) véletlenszerűen megváltoztattuk 10%-kal. Ezen a modellen Spitzer módszere alapján FD modellezéssel számított látszólagos fajlagos ellenállásokat 2%-os Gauss-zajjal terheltük. A CGI eljárással kapott modellek a



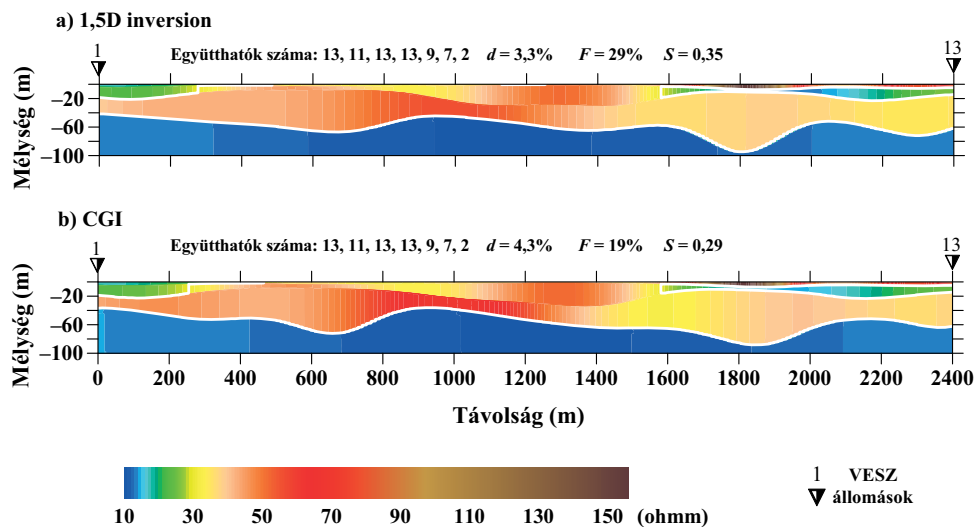
**11. ábra** Hulladéklerakó felett mért VESZ adatok CGI és 1,5D inverziós eredményeinek összehasonlítása. a) Magas értékű  $d$ ,  $F$  és  $S$ -et eredményező 1,5D inverzió eredményei; b) A CGI megbízhatóbb eredményt szolgáltat, mert jelentősen alacsonyabb értékeket eredményez  $d$ ,  $F$  és  $S$ -re

**Figure 11** Comparison of 1,5D and CGI inversion of VES data, measured over a waste deposit. a) The 1,5D inversion results high values of  $d$ ,  $F$  and  $S$ ; b) The CGI gives considerable less values for of  $d$ ,  $F$  and  $S$ , yielding more reliable results

10.a és 10.b–c ábrán láthatóak. Az együtthatók optimális számát 29, 17, 29, 7, 7-nek választottuk. Így a  $d = 1,9\%$ ,  $D = 10,3\%$ ,  $F = 11,6\%$  és  $S = 0,15$  értékek adódtak. A 10.b ábrán látható, hogy minél gyorsabb az ellenállás változása, annál nagyobb számú együtthatót kell használnunk a CGI módszer esetében. De a 10.c ábrán az is látszik, hogy az együtthatók számának indokolatlan növelése lerontja az inverziós eredmény minőségét, amelyet az együtthatók optimális számának megválasztásával elkerülhetünk.

### Terepi példa

A 1,5D és CGI inverziós módszereket in situ környezet-geofizikai problémán is tanulmányoztuk. A kutatási terület egy hulladéklerakó volt Miskolc közelében, Északkelet-Magyarországon. A szelvény mentén 9 VESZ állomáson 198 adatot gyűjtöttünk. A sorfejtési együtthatók mindegyik esetben azonosak voltak: 9, 9, 9, 9, 9, 1, 1. Ahogy az a 11. ábrán látható, a 1,5D módszer olyan becsült modellt adott eredményül, melynek közepes becslési hibája rendkívül nagy ( $F = 150\%$ ), és a sorfejtési együtthatók közti korreláció viszonylag magas ( $S = 0,46$ ). Másrészről az új CGI eljárás jelentősen kisebb adattávolságot és közepes paraméterbecslési hibát ( $F = 16,2\%$ ) eredményezett. A relatív nagy hibát mindegyik esetben az igen vékony első réteg paramétereinek becslési hibája okozta, annak ellenére, hogy az ismeretlenek száma mind a két inverziós feladatban megegyezik, az átlagszórás (definiálva az (5) egyenletben) számottevően kisebbnek adódik a CGI eljárásban ( $S = 0,27$ ),



**12. ábra** Vízadó összlet felett mért VESZ adatok CGI és 1,5D inverziós eredményeinek összehasonlítása. a) 1,5D inverzió eredménye; b) A CGI eredménye. Az is látszik mindkét ábrán, hogy a sorfejtéses módszer láthatóvá teheti a rétegek kibúvását vagy vékony rétegvastagságokkal, vagy a szomszédos rétegek ellenállás értékeinek csaknem megegyezésével

**Figure 12** Comparison of 1,5D and CGI inversion of VES data, measured over an aquifer. a) The result of 1,5D inversion; b) The result of CGI. It is also seen in both figures that the technique of expansion series may visualize the outcrop of layers with thin layer thickness or nearly the same value of resistivities in adjacent layers

s ezzel a CGI módszer kevésbé korrelált (azaz megbízhatóbb) paraméterbecslést mutat.

A másik terepi példa a Tisza folyónál fekvő víztározó kavicsos összlet kutatása volt. A földtani szerkezet agyagos aljzattal rendelkező inhomogén kavicsos-homokos rétegsor. A szerkezetet 4 réteges modellel közelítettük és megengedtük, hogy mind a fajlagos ellenállások, mind a rétegvastagságok gyorsan változhatnak. Az együtthatók optimális száma ebben az esetben 13, 11, 13 a vastagságokra és 13, 9, 7, 2 az ellenállásokra. A szelvény mentén 13 VESZ állomáson 312 adatot gyűjtöttünk. A 1,5D és a CGI inverzió eredményeit a 12. ábra hasonlítja össze. Az ábrán látszik, hogy ez a módszer láthatóvá teheti a rétegek kiemelődését vékony rétegvastagságokkal vagy a szomszédos rétegek ellenállásértékeinek (közel) azonosságával. Ennek alapján levonható az a következtetés, hogy a CGI inverziót az előforduló legnagyobb rétegszámra kell futtatni, ha valamely réteg(ek) kiemelődik(nek), azt az inverzió az előbb említett módon „megoldja”. Ez látható például  $s = 1200$  m-nél. Összehasonlítva a 1,5D és CGI eljárásokat, az átlagos paraméterbecslési hiba 29%-ról 19%-ra, valamint az átlagos korreláció 0,35-ről 0,29-re csökkent.

## Összefoglalás

Összefoglalásképpen megállapíthatjuk, hogy a sorfejtéses inverziós eljárás alkalmazása 2D szerkezeteken mért geoelektromos adatok feldolgozásában is termékeny gondolat, és az erre épített új, kombinált inverziós eljárás ígéretes a kétdimenziós földtani szerkezetek paramétereinek meghatározására. A sorfejtéssel történő diszkrétizáció következtében – a nemzetközi gyakorlatban általánosan használt mód-

szerekkel összehasonlítva (melyekben a rácsháló minden eleme ismeretlen paramétert jelöl) – az ismeretlenek száma drasztikusan csökkenthető úgy, hogy az a mérési adatok számánál is lényegesen kisebbnek adódik. A túlhatározott inverz feladat megoldása miatt a sorfejtéses inverziós (CGI) módszer nagy pontossággal állítja vissza a szintetikus 2D földtani modelleket. A rövidebb számítási idő érdekében a CGI módszer két fázisból állt. Először 1,5D inverzióval (1D előremodellezést alkalmazva) egy megfelelő startmodell számítottunk a második fázishoz, ahol a linearizált inverziós eljárásban 2D előremodellezést hajtottunk végre.

Bemutattunk, hogy egy adott zajszintnél csak kisebb pontossággal tud visszaállítani bonyolultabb modelleket, mint ugyanazon fizikai paraméterekkel rendelkező, de egyszerűbb modelleket (lásd 8.a és 9.a ábra).

Mindemellett az együtthatók számának indokolatlan növelésével csökkentjük az inverziós eredmények minőségét, amelyet elkerülhetünk, ha az együtthatók számát optimálisnak választjuk (lásd 2–4. és 10. ábra). Az adathibáktól függetlenül az inverzióval meghatározható modell bonyolultsága korlátozott van. Az előbbi határon túl jobb inverziós eredményeket akkor kaphatunk, ha együttes inverziós módszert használunk és további adatrendszereket és/vagy fúróluk információkat vonunk be.

A 2D CGI módszert könnyen általánosíthatjuk 3D földtani szerkezetek esetére. A Spitzer által kifejlesztett előremodellezési módszer bár bonyolultabb más 2D eljárásoknál, lehetőséget ad dőlés- és csapásirányú mérési adatok együttes inverziójára vagy olyan szerkezetek kutatására, amelyeknél csak csapásirányban végezhető mérések (például partfalak stabilitásvizsgálata). Úgy gondoljuk, hogy hasznos lenne különböző mérési elrendezésben, a sorfejtés-

ben más típusú bázisfüggvényekkel bonyolultabb modelleken további kutatásokat végezni és ellenőrizni a módszert számos 3D terepi modellen.

### Köszönetnyilvánítás

A fentiekben bemutatott kutatásainkat részben az Országos Tudományos Kutatási Alap támogatásával folytattuk (OTKA T042686 és T062416). Az MTA–ME Műszaki Földtudományi Kutatócsoport tagjaként az egyik szerző (D. M.) köszönetét fejezi ki a Magyar Tudományos Akadémiának a kutatócsoport támogatásáért.

### Hivatkozások

Auken E., Christiansen A. V., 2004: Layered and laterally constrained 2D inversion of resistivity data. *Geophysics* 69, 752–761

Auken E., Christiansen A. V., Jacobsen B. H., Foged N., Sorensen K. I., 2005: Piecewise 1D laterally constrained inversion of resistivity data. *Geophysical Prospecting* 53, 497–507

Auken E., Pellerin L., Christiansen N.B., Sorensen K.I., 2006: A survey of current trends in near surface electrical and electromagnetic methods. *Geophysics* 71/5 G249–G260

Blaschek R., Hördt A., Kemna A., 2008: A new sensitivity-controlled regularization scheme for the inversion of induced polarization data based on minimum gradient support. *Geophysics* 73, F45–F54

Christiansen A. V., Auken E., 2004: Optimizing a layered and laterally constrained 2D inversion of resistivity data using Broyden's update and 1D derivatives. *Journal of Applied Geophysics* 56, 247–261

Dobróka M., 1994: Változó rétegvastagságú inhomogén szeizmikus hullámvezetőben terjedő Love-típusú hullámok diszperziós relációja; az abszorpciós-diszperziós jellemzők inverziója. MTA doktori értekezés. Miskolc – Budapest

Gallardo L. A., Meju M. A., 2004: Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints. *J. Geophysical Research* 109, 03311

Geotomo Software: RES2DINV ver. 3.55, Malaysia. ([www.geoelectrical.com](http://www.geoelectrical.com))

Gyulai Á., 2001: 2D földtani szerkezetek interpretációja együttes geoelektromos inverziós módszerekkel. MTA doktori értekezés. Miskolc – Budapest

Gyulai Á., Ormos T., 1997: Vertikális elektromos szondázások kiértékelése 1.5-D inverziós módszerrel. *Magyar Geofizika* 38, 25–36

Gyulai Á., Ormos T., 1998: Újabb eredmények a VESZ adatok 1.5-D inverziós kiértékelésében. *Magyar Geofizika* 38, 257–264

Gyulai Á., Ormos T., 1999a: A new procedure for the interpretation of VES data: 1.5-D simultaneous inversion method. *Journal of Applied Geophysics* 41, 1–17

Gyulai Á., Ormos T., 1999b: Hohlraumortung mit geoelektrischen und oberflächenseismischen Methoden. 59. DGG Tagung, Braunschweig, March 8–12, 1999. PGT05, p. 116

Gyulai Á., Ormos T., Dobróka M., Kavanda R., 2007: The strategy of joint inversion using function series. EAGE Near Surface Conference and Exhibition, Istanbul 3–5. September 2007. p. 24

Gyulai Á., Ormos T., Dresen L., 2000: A joint inversion method to solve problems of layer boundaries, differently defined by seismics and geoelectrics. 6th Meeting of Environmental and Engineering Geophysical Society – European Section, September 3–7, 2000. Bochum, Germany (P-CH04)

Haber E., Oldenburg D., 1997: Joint inversion: a structural approach. *Inverse Problems* 13, 63

Hering A., Misiek R., Gyulai Á., Ormos T., Dobróka M., Dresen L., 1995: A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface wave seismic data: Part I. Basic ideas. *Geophysical Prospecting* 43, 135–156

Kis M., 1998: Felszínközeli földtani szerkezetek vizsgálata szeizmikus és egyenáramú geoelektromos adatok együttes inverziójával. PhD értekezés. Miskolci Egyetem, Miskolc

Kis M., Gyulai Á., Ormos T., Dobróka M., Dresen L., 1998: A new approach for the investigation of 2-D structures – method development and case-history. 60th EAGE Conference and Technical Exhibition, 8–12 June 1998

Koefoed O., 1979: *Geosounding Principles, Resistivity Sounding Measurements*. Amsterdam

Loke M. H., Barker R. D., 1996: Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudo-sections by a quasi-Newton method. *Geophysical Prospecting* 44, 131–152

Menke W., 1984: *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Academic Press Inc.

Misiek R., Liebig A., Gyulai Á., Ormos T., Dobróka M., Dresen L., 1997: A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface seismic data: Part II. Application. *Geophysical Prospecting* 45, 65–85

Ormos T., 2002: Inversion of refracted travel-times for near-surface investigations. EAGE 64th Conference and Exhibition, 27–30 May. 2002. Florence, Italy. D025 Extended abstracts.

Ormos T., Daragó A., 2005: Parallel inversion of refracted travel times of P and SH waves using a function approximation. *Acta Geodetica and Geophysica Hungarica* 40, 215–228

Ormos T., Gyulai Á., Nyári Zs., 1999: Cavity detection with resistivity and shallow seismic methods. 5th EEGS-ES Meeting, September 6–9, 1999. Budapest, Proceedings, VoP2.

Pellerin L., Wannamaker P. E., 2005: Multi dimensional electromagnetic modelling and inversion with application to near-surface earth investigation. *Computers and Electronics in Agriculture* 46, 71–102

Spitzer, K., 1995: A 3-D finite difference algorithm for DC resistivity modelling using conjugate gradient methods. *Geophysical Journal International* 123, 902–914

Szabó N. P., 2004: Global inversion of well-logging data. *Geophysical Transactions* 44, 313–329

Turai E., 2004: IP Data processing results from using TAU-transformation to determine time-constant spectra. *Geophysical Transactions* 44, 310–312

Vozoff K., Jupp D. L. B., 1975: Joint inversion of geophysical data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 42, 977–991