

Robusztus Fourier-transzformáció Steiner-súlyok alkalmazásával

SZEGEDI HAJNALKA, DOBRÓKA MIHÁLY

Miskolci Egyetem, Geofizikai Intézeti Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros
E-mail: gfszh@uni-miskolc.hu, dobroka@uni-miskolc.hu

A tanulmányban bemutatunk egy robusztus inverziós módszert a Fourier-transzformáció számítására, amely eljárás egyben a kiugró zajokkal szemben rezisztens viselkedést biztosít. A Fourier-transzformáció lineáris leképezés, mellyel az időtartományban jelentkező zajt is leképezzük a frekvenciatartományba, ezért az eljárás eredeti alakjában rendkívül érzékeny a mérési adatokon hordozott zajokra. A Miskolci Egyetem Geofizika Tanszékén Steiner Ferenc professzor által kidolgozott leggyakoribb érték módszer (MFV) segítségével a geofizikai inverziós eljárások igen hatásosan robusztifikálhatók, ami számos gyakorlati példában bizonyítást nyert. Ebből a tapasztalatból kiindulva, az ugyancsak a Tanszéken kidolgozott – a Fourier-transzformációt inverz feladatként megoldó – eljárás zajérzékenységének hatékony csökkentésére a leggyakoribb érték módszerét alkalmazzuk. Az új algoritmus az iteratív újrasúlyozás (IRLS) módszerén alapul és a Steiner professzor által bevezetett súlyokat (Steiner-súlyok) alkalmazza. A Fourier-spektrum diszkrétizálására sorfejtést alkalmazunk, azaz a folytonos komplex függvényt alkalmasan megválasztott függvényrendszer szerint fejtjük ki. Mivel a sorfejtéses geofizikai inverzióban célszerű teljes, ortogonális, normált függvényrendszereket alkalmaznunk, bázisfüggvénynek a skálázott Hermite-függvényeket választottuk. Az ismeretlen paramétereket (sorfejtési együtthatók) túlhatározott inverz feladat keretében határozzuk meg. Annak érdekében, hogy a Jacobi-mátrix számítására egy gyors és egyszerű formulát kapjunk, a Fourier-transzformáció egy speciális tulajdonságát használtuk fel, miszerint az Hermite-függvények sajátfüggvényei a Fourier-transzformációnak. Ez igaz a skálázott Hermite-függvények esetében is. Az új Steiner-súlyokon alapuló IRLS inverziós eljárást szintetikus adatrendszeren teszteltük, melynek eredményeiből kitűnik, hogy kiugró hibaértékek (*outlier*) fellépésekor is figyelemre méltó a módszer zajelnyomó képessége (rezisztenciája).

Szegedi, H., Dobróka, M.: Robust Fourier transform using Steiner's weights

In the study we present a new robust inversion method for performing one dimensional Fourier transform, which shows robust behaviour against noises. As the Fourier transformation is linear the noise which appears in the time domain is also present in the frequency domain. Therefore the Fourier transformation is really sensitive to the noises of the measured data. The most frequent value method (MFV) was developed by professor Ferenc Steiner at the Department of Geophysics of the University of Miskolc. Using it the geophysical inversion methods show robustness that has been demonstrated in many practical examples. Starting from this experience – in order to reduce the noise sensitivity of the inversion based Fourier-transform procedure (developed also at the Department of Geophysics) – the method of most frequent value is used. The new algorithm is based on the Iteratively Reweighted Least Squares method (IRLS) combined with weights introduced by professor Steiner. We used series expansion for the discretization of the continuous functions of the spectrum where it is expanded by an appropriately chosen function system. In the geophysical inversion it is advised to use complete, orthogonal and normal function systems in order to reduce the number of unknown parameters and to improve the stability of the inverse problem. The modified Hermite function was chosen as basis function. The unknown parameters (series expansion coefficients) are defined in an overdetermined inverse problem. In order to get a fast and simple formula for the computation of the Jacobi's matrix we used a special feature of the Fourier transform, namely the Hermite functions are the eigenfunctions of the Fourier transform. The inversion method using the Steiner's weights was numerically tested on synthetic data set. The results show that this method reduces the noise sensitivity of the inversion procedure even in case of having outlier data.

Beérkezett: 2012. április 24.; *elfogadva:* 2012. május 12.

Bevezetés

A geofizikai adatfeldolgozás területén a Fourier-transzformáció igen fontos szerepet játszik, amelynek segítségével a

mért jel viselkedését tanulmányozhatjuk a frekvenciatartományban. A frekvenciaspektrum meghatározására diszkrét időtartománybeli adatsorok esetén a gyakorlatban alkalmazott eszköz a diszkrét Fourier-transzformáció (DFT), illet-

ve annak speciális számítógépes változata, a gyors Fourier-transzformáció (FFT). Ezek az algoritmusok az időjel spektrumát elegendően nagy pontossággal közelítik abban az esetben, ha a mintavételi közt és a regisztrálási időtartományt megfelelően választjuk meg, illetve a bemenő időadatokat nem terheli zaj. Mérési adataink viszont mindig zajjal terheltek, és erre a Fourier-transzformáció (illetve annak diszkrét implementációja, a DFT vagy az FFT) igencsak érzékenyen reagál. Mivel a Fourier-transzformáció lineáris leképezés, az időtartományban jelentkező zaj közvetlenül leképeződik a frekvenciatartományba. Ennek eredményeképpen a számított frekvenciaspektrum is zajos lesz. A zaj mértékének csökkentésére a digitális jelfeldolgozásban különböző szűrési technikákat alkalmaznak. A Geofizika Tanszéken kifejlesztett inverziós alapú Fourier-transzformációs eljárással a zaj mértéke hatékonyan redukálható annak köszönhetően, hogy az eljárás keretében a Fourier-transzformációt túlhatározott inverz feladat megoldásával állítjuk elő (Vass 2010). Az algoritmust a bázisfüggvényként választott Hermite-függvények egy speciális tulajdonságát felhasználva (miszerint azok a Fourier-transzformációnak a sajátfüggvényei) továbbfejlesztettük (Dobróka et al. 2012). Ezáltal a Jacobi-mátrix elemeinek számítására egy egyszerű explicit formula adható, amelynek használatával az egydimenziós inverziós alapú Fourier-transzformáció egyszerűbben számítható. Az inverziós alapú Fourier-transzformációs módszer zajérzékenységének további csökkentésére korábbi dolgozatainkban (Dobróka et al. 2012, Vass 2012) ún. Cauchy-súlyokat alkalmaztunk (ezek skálaparamétereit tapasztalati úton határoztuk meg). A jelen dolgozatban bemutatjuk, hogy az eljárás kiugró adatokkal szemben mutatott rezisztenciája tovább javítható, ha a Cauchy-súlyokat a Steiner Ferenc professzor által kidolgozott (Steiner 1997) leggyakoribb érték módszerével számított súlyokkal (a továbbiakban Steiner-súlyok) helyettesítjük.

Elméleti áttekintés: az inverziós alapú 1D Fourier-transzformáció

Az 1D Fourier-transzformáció a jel regisztrálásának időtartományát és a jel vizsgálatának frekvenciatartományát kapcsolja össze a következő formula alapján:

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

ahol t jelöli az időt, ω a körfrekvenciát és j a képzetes egységet. Az $U(\omega)$ frekvenciaspektrum az $u(t)$ időjel Fourier-transzformáltja, amely általában komplex értékű folytonos függvény. Az 1D inverz Fourier-transzformáció segítségével biztosítható a frekvenciatartományból az időtartományba történő visszatérés:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

Sorfejtéses diszkrétizáció alkalmazásakor a spektrumot valamelyalkalmasan választott $\Psi_n(\omega)$ bázisfüggvényrendszer szerint fejtjük sorba:

$$U(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n \cdot \Psi_n(\omega), \quad (1)$$

ahol B_n jelöli a komplex sorfejtési együtthatókat és $\Psi_n(\omega)$ az n -edik ismert bázisfüggvényt.

Ha a Fourier-transzformációt túlhatározott inverz problémaként fogjuk fel, először a direkt feladatot kell kijelölnünk, amelynek során azzal a feltételezéssel élünk, hogy az elméleti adatok és a modellparaméterek között összefüggés van. A Fourier-transzformáció esetében a direkt feladat megoldását jelentő formula az inverz Fourier-transzformáció, amely a k -edik mérési adat esetén így definiálható:

$$u^{(\text{elm})}(t_k) = u_k^{(\text{elm})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cdot e^{j\omega t_k} d\omega.$$

Helyettesítsük be az (1) egyenletet a fenti kifejezésbe, így a számított érték felírható az alábbi alakban:

$$\begin{aligned} u^{(\text{elm})}(t_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^M B_n \cdot \Psi_n(\omega) \right) \cdot e^{j\omega t_k} d\omega \\ &= \sum_{n=1}^M B_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(\omega) \cdot e^{j\omega t_k} d\omega. \end{aligned}$$

Bevezetve a Jacobi-mátrixot,

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(\omega) \cdot e^{j\omega t_k} d\omega = \mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_n(\omega) \}, \quad (2)$$

kapunk egy $N \times M$ méretű mátrixot, amelynél N jelöli a mért (vagy számított) adatok számát és M a sorfejtésben figyelembe vett ismeretlenek (sorfejtési együtthatók) számát. Megjegyezzük, hogy a Jacobi-mátrix elemei a bázisfüggvényrendszer inverz Fourier-transzformáltjaiként is felfoghatók. Látjuk, hogy a direkt feladat kapcsolatot teremt a modell paramétereit (sorfejtési együtthatók) és az időtartománybeli (elméleti vagy számított) adatok között. Ezért a fentiek alapján a k -edik mintavételi időre vonatkozóan a számított jelle lineáris kifejezés adódik, amely a következőképpen írható fel:

$$u_k^{(\text{elm})} = \sum_{n=1}^M B_n \cdot G_{kn}. \quad (3)$$

A direkt feladat ezen egyenletében szereplő modellparaméterek a sorfejtési együtthatók, amelyek meghatározása jelenti az inverz feladat megoldását.

A sorfejtéses geofizikai inverzió területén célszerű teljes, ortogonális és normált bázisfüggvényrendszereket alkalmaznunk az inverz feladat stabilitásának javítása érdekében. A frekvenciaspektrum a valós számok $(-\infty, \infty)$ intervallumán értelmezett csakúgy, mint az Hermite-függvényrendszerek. Azért is választottuk bázisfüggvénynek az Hermite-függvényeket, mert a fenti kritériumoknak teljes mértékben eleget tesznek. A $h_n^{(0)}(\omega)$ alapértelmezésű Hermite-

polinomokat a Rodriguez-formula alapján definiálhatjuk (Ney da Silva, de Campos 2006):

$$h_n^{(0)}(\omega) = (-1)^n e^{\omega^2} \left(\frac{d}{d\omega} \right)^n e^{-\omega^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Közöttük fennáll a következő rekurziós formula:

$$h_{n+1}^{(0)}(\omega) = 2\omega h_n^{(0)}(\omega) - 2n h_{n-1}^{(0)}(\omega), \quad (5)$$

ahol $h_0^{(0)}(\omega) = 1$, $h_1^{(0)}(\omega) = 2\omega$. Az Hermite-polinomokra teljesül az alábbi ortogonalitási feltétel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} h_n^{(0)}(\omega) \cdot h_m^{(0)}(\omega) d\omega = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}, \quad (6)$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

ahol δ_{nm} jelöli a Kronecker-szimbólumot. E formula alapján definiálható az alapértelmezésű $H_n^{(0)}(\omega)$ Hermite-függvény:

$$H_n^{(0)}(\omega) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega^2} h_n^{(0)}(\omega)}{[\sqrt{\pi} n! 2^n]^{1/2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

A nevezőben szereplő kifejezés a polinom fokszámától, illetve a skálázó tényezőtől egyaránt függő normáló tényező. A $H_n^{(0)}(\omega)$ függvény nemcsak teljes, ortogonális, hanem már ortonormált rendszert is alkot:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(0)}(\omega) \cdot H_m^{(0)}(\omega) d\omega = \delta_{nm}. \quad (8)$$

Az Hermite-függvények sajátos tulajdonsága, hogy a Fourier-transzformációnak sajátfüggvényei (Duoandikoetxea 1995):

$$\mathcal{F} \{ H_n^{(0)}(t) \} = (-j)^n H_n^{(0)}(\omega), \quad (9)$$

és az inverz Fourier-transzformáció esetében

$$\mathcal{F}^{-1} \{ H_n^{(0)}(\omega) \} = (j)^n H_n^{(0)}(t). \quad (10)$$

Vass (2010) megmutatta, hogy a geofizikai mérésekben szereplő frekvenciák széles tartományt ölelnek fel, emiatt az Hermite-függvényeket skáláznunk kell. A módosított (skálázott) Hermite-polinomok Rodriguez-formulája így a következőképpen változik:

$$h_n(\omega, \alpha) = (-1)^n e^{\alpha\omega^2} \left(\frac{d}{d\omega} \right)^n e^{-\alpha\omega^2}, \quad (11)$$

és módosul a rekurziós formula is:

$$h_{n+1}(\omega, \alpha) = 2\omega\alpha h_n(\omega, \alpha) - 2n\alpha h_{n-1}(\omega, \alpha),$$

ahol α a skálázási tényező és $h_0(\omega, \alpha) = 1$, $h_1(\omega, \alpha) = 2\alpha\omega$ (Gröbner, Hoffreiter 1958). A módosított Hermite-polinomok esetén is felírható az ortogonalitási reláció:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega^2} h_n(\omega, \alpha) \cdot h_m(\omega, \alpha) d\omega = \sqrt{\pi/\alpha} (2\alpha)^n n! \delta_{nm}. \quad (12)$$

A skálázott Hermite-függvény az alábbi kifejezéssel adható meg:

$$H_n(\omega, \alpha) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\omega^2} h_n(\omega, \alpha)}{[\sqrt{\pi/\alpha} n! (2\alpha)^n]^{1/2}}, \quad (13)$$

ahol $h_n(\omega, \alpha)$ a módosított Hermite-polinomot, a nevezőben szereplő kifejezés pedig a normáló tényezőt jelöli. Az így bevezetett Hermite-függvények szintén ortonormáltak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega, \alpha) \cdot H_m(\omega, \alpha) d\omega = \delta_{nm}. \quad (14)$$

A módosított (skálázott) Hermite-függvényeket bázisfüggvényként használva (1) alapján írhatjuk:

$$U(\omega, \alpha) = \sum_{n=0}^{M-1} B_n \cdot H_n(\omega, \alpha), \quad (15)$$

ahol B_n az ismeretlen sorfejtési együtthatókat jelöli. Az alábbi jelölés bevezetésével

$$\omega' = \sqrt{\alpha}\omega \quad (16)$$

a módosított Hermite-polinomok visszavezethetők az alapesetre. Helyettesítsük be a (16) egyenletet a (11) kifejezésbe! Ekkor a (4) egyenlet adódik:

$$h_n(\omega, \alpha) = (\sqrt{\alpha})^n (-1)^n e^{\omega'^2} \left(\frac{d}{d\omega'} \right)^n e^{-\omega'^2} \quad (17)$$

$$= (\sqrt{\alpha})^n h_n^{(0)}(\omega') = (\sqrt{\alpha})^n h_n^{(0)}(\sqrt{\alpha}\omega).$$

Hasonlóan az előzőekhez, a módosított Hermite-függvények is visszavezethetők az alapértelmezésű $H_n^{(0)}$ függvényekre. A (13) egyenlet szerint a következő formulát kapjuk:

$$H_n(\omega, \alpha) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega'^2} (\sqrt{\alpha})^n h_n^{(0)}(\omega')}{[\sqrt{\pi/\alpha} n! 2^n \alpha^n]^{1/2}} \quad (18)$$

$$= \sqrt[4]{\alpha} \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega'^2} h_n^{(0)}(\omega')}{[\sqrt{\pi} n! 2^n]^{1/2}} = \sqrt[4]{\alpha} H_n^{(0)}(\omega')$$

$$= \sqrt[4]{\alpha} H_n^{(0)}(\sqrt{\alpha}\omega).$$

A (2) Jacobi-mátrix a $H_n(\omega, \alpha)$ bázisfüggvényekkel írva a következő alakot veszi fel:

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega, \alpha) \cdot e^{j\omega t_k} d\omega, \quad (19)$$

amelyet a (18) egyenlet felhasználásával így is írhatunk:

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[4]{\alpha} H_n^{(0)}(\omega') \cdot e^{j\omega t_k} d\omega. \quad (20)$$

Az $\omega t = \omega' t'$, $\omega' = \sqrt{\alpha}\omega$ és $t' = t/\sqrt{\alpha}$ bevezetésével a Jacobi-mátrix könnyen számítható:

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(0)}(\omega') \cdot e^{j\omega' t'_k} d\omega' \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} \mathcal{F}^{-1} \{ H_n^{(0)}(\omega') \}.$$

Az Hermite-függvények (10) tulajdonságát felhasználva a (21) kifejezés újra felírható a következő formában:

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} (j)^n H_n^{(0)}(t') = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} (j)^n H_n^{(0)}\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right). \quad (22)$$

Ez az eredmény igen előnyös, mert így a G_{kn} Jacobi-mátrix gyorsan előállítható és integrálás nélkül számítható. (Különösen fontos ez a két- vagy többdimenziós Fourier-transzformáció esetében.) A módosított Hermite-függvényrendszer felhasználásával a spektrum diszkrétizált kifejezése a (15) alakban írható fel, ahol a sorfejtési együtthatókat a (3) egyenletben, a G_{kn} (22) szerinti kifejezését felhasználva, túlhatározott inverz feladat keretében határozzuk meg. Ez esetben az adatok száma nagyobb, mint a meghatározandó paraméterek száma ($N > M$). A mért adatok vektora és a számított adatok vektora közötti eltérés így írható:

$$\begin{aligned} e_k &= u_k^{(\text{mért})} - u_k^{(\text{számított})} \\ &= u_k^{(\text{mért})} - \sum_{n=0}^{M-1} B_n \cdot G_{kn}. \end{aligned} \quad (23)$$

L_2 norma választása mellett a célfüggvény a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{k=1}^N e_k^2 = \sum_{k=1}^N (u_k^{(\text{mért})} - u_k^{(\text{számított})})^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \left(u_k^{(\text{mért})} - \sum_{n=0}^{M-1} B_n \cdot G_{kn} \right)^2 = \min., \end{aligned} \quad (24)$$

melynek minimumánál kapjuk a túlhatározott inverz feladat megoldását. Ekkor a Gauss-féle legkisebb négyzetek (LSQ) módszerének normálegyenlet-rendszeréhez jutunk:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{B} = \mathbf{G}^T \mathbf{u}^{(\text{mért})}. \quad (25)$$

Az egyenletrendszer megoldásával a sorfejtési együtthatók előállíthatók:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{u}^{(\text{mért})}. \quad (26)$$

Ezek után pedig a spektrum már meghatározható tetszőleges frekvencián:

$$U^{(\text{becsült})}(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n^{(\text{becsült})} \Psi_n(\omega). \quad (27)$$

A fenti inverziós eljárás akkor ad optimális eredményt, ha a mérési adatokat terhelő zaj eloszlása Gauss-eloszlású. Abban az esetben, ha adatrendszerünk Gauss-tól eltérő statisztikát követ, vagy kiugró hibákkal terhelt, az L_1 norma minimalizálásával (Scales et al. 1988), illetve a Cauchy-súlyokkal iteratív módon újrásúlyozott legkisebb négyzetek (IRLS) módszerének alkalmazása (Amundsen 1991) vezet megbízható eredményre. Ez utóbbi esetben a minimalizálandó függvény az eltérések súlyozott normája:

$$E_w = \sum_{k=1}^N W_{kk} e_k^2, \quad (28)$$

ahol a W_{kk} diagonális mátrix elemei az ún. Cauchy-súlyok, amelyek skálaparaméterét a priori ismernünk kell. Ebből a

szempontból igen előnyös a Steiner-súlyok alkalmazása, mivel ezek kifejezésében

$$W_{kk} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + e_k^2} \quad (29)$$

az ε^2 dihéziók az adatrendszerből (az e_k eltérésvektor-elemekből) egy belső iterációs eljárásban határozhatók meg (Steiner 1997). A Steiner-súlyok azonban (23) szerint tartalmazzák az ismeretlen sorfejtési együtthatókat is, ezért a (28)-ban adott kifejezés nem kvadratikussá válik. Az IRLS módszer a nevét onnan kapta, hogy a megoldást iteratív úton állítja elő, és az egyes iterációs lépésekben, az előző lépés eredménye alapján meghatározott eltérésvektor elemeivel számítja újra a W_{kk} súlyokat, amelyek az adott iterációban szereplő ismeretlenektől függetlenek.

A 0. iterációs lépésben a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszerével oldjuk meg a problémát:

$$\mathbf{B}^{(0)} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{u}^{(\text{mért})}. \quad (30)$$

Ezekkel a sorfejtési együtthatókkal előállíthatjuk a számított adatok egy (3) szerinti közelítését

$$u_k^{(0)} = \sum_{n=1}^M B_n^{(0)} \cdot G_{kn}, \quad (31)$$

és felírhatjuk az eltérésvektor elemeit

$$e_k^{(0)} = u_k^{(\text{mért})} - \sum_{n=0}^{M-1} B_n^{(0)} \cdot G_{kn}, \quad (32)$$

amelyben a súlyokat a

$$W_{kk}^{(0)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(0)})^2} \quad (33)$$

formula szerint számíthatjuk. Az első iterációban a (28) hibafüggvényt így közelítjük:

$$E_w^{(1)} = \sum_{k=1}^N W_{kk}^{(0)} e_k^2, \quad (34)$$

amely kifejezés kvadratikussá válik (a súlyok az előző iterációból származók, a jelen iteráció ismeretlenjeit nem tartalmazó konstansok), és minimalizálása a súlyozott legkisebb négyzetek módszerének megfelelő inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet, melynek megoldását

$$\mathbf{B}^{(1)} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{(0)} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^{(0)} \mathbf{u}^{(\text{mért})} \quad (35)$$

ismét csak az

$$e_k^{(1)} = u_k^{(\text{mért})} - \sum_{n=0}^{M-1} B_n^{(1)} \cdot G_{kn} \quad (36)$$

eltérések, illetve a súlymátrix

$$W_{kk}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(1)})^2} \quad (37)$$

újabb közelítésének számítására használjuk. Az IRLS eljárás q -ik lépésében kapott normálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\mathbf{B}^{(q)} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{(q-1)} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^{(q-1)} \mathbf{u}^{(\text{mért})}, \quad (38)$$

amellyel számított eltérések

$$e_k^{(q)} = u_k^{(mért)} - \sum_{n=0}^{M-1} B_n^{(q)} \cdot G_{kn}, \quad (39)$$

illetve a Steiner-súlyok

$$W_{kk}^{(q)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(q)})^2}. \quad (40)$$

Az így definiált IRLS iterációs eljárás valamely alkalmazásan választott stop kritérium teljesüléséig folytatható, megoldásként az utoljára kapott sorfejtési együtthatókat fogadjuk el.

Numerikus eredmények

Az új Fourier-transzformációs eljárás hatékonyságát és pontosságát szintetikus példán keresztül mutatjuk be, melyet (Dobróka et al. 2012) a Cauchy-IRLS-eljárás tesztelésére alkalmazott. A választott időfüggvény általános alakja:

$$u(t) = \begin{cases} \kappa t^\eta e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad (41)$$

ahol a görög betűk jelölik az időjel paramétereit, melyek értékeit a következők szerint rögzítettük: $\kappa \approx 738,91$, $\eta = 2$, $\lambda = 20$, $\omega = 40\pi$, $\varphi = \pi/4$. Az eljárás pontosságának jellemzése érdekében a mért adatok és az inverziós eredmény ismeretében számított adatok távolságát számoltuk:

$$d_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u^{(mért)}(t_k) - u^{(számított)}(t_k))^2}, \quad (42)$$

ahol N az adatok számát jelöli. A frekvenciatartománybeli eltérés jellemzésére az átlagnégyzetes hiba a következőképpen írható fel:

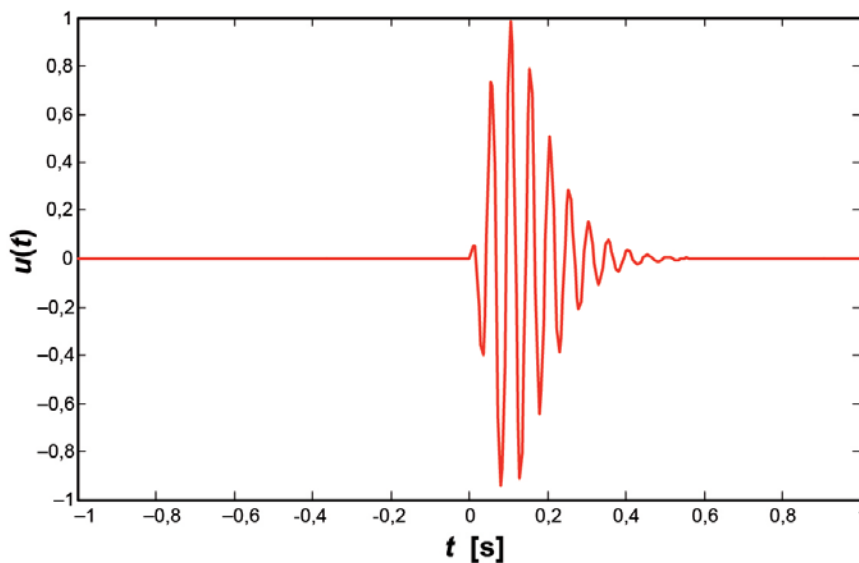
$$D_{\text{RMS}} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\text{Re} \left[U^{(számított)}(f_i) - U^{(mért)}(f_i) \right] \right)^2 + \left(\text{Im} \left[U^{(számított)}(f_i) - U^{(mért)}(f_i) \right] \right)^2 \right\} \right]^{1/2}. \quad (43)$$

Az 1. ábrán a zajmentes jel időtartománybeli képe látható, a 2. ábra ennek a jelnek a DFT-vel előállított frekvenciaspektrumát mutatja be.

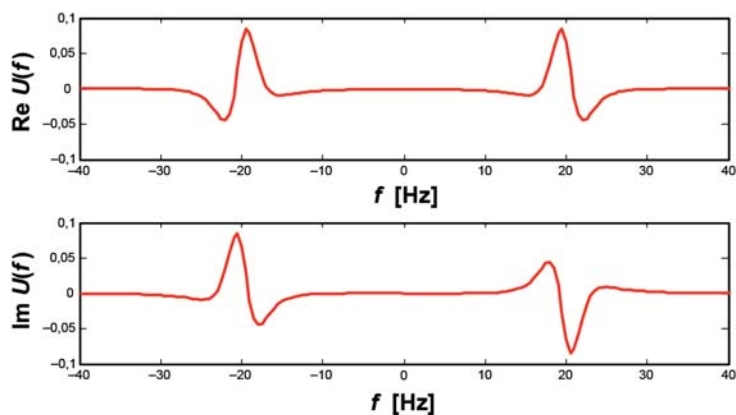
Egy mérési hibáktól és egyéb környezeti zajoktól mentes esetben a DFT-vel számított frekvenciaspektrum jól közelíti a frekvenciaspektrumot, amint azt a 2. ábra is szemlélteti.

A zajérzékenység vizsgálatára az 1. ábrán látható jelet Cauchy-eloszlást követő zajjal terheltük. Az így előállított jelet a 3. ábra mutatja be. Kiindulásul lássuk ennek DFT-vel számított frekvenciaspektrumát, amelyet a 4. ábra szemléltet! Az ábra alapján igen nehéz felismerni a 2. ábrán bemutatott spektrumot (segítségül piros színnel a zajmentes spektrumot is felrajzoltuk), ami igazolja, hogy a Fourier-transzformáció hagyományos diszkrét implementációi rendkívül zajérzékenyek.

Ezzel szemben, ha a 3. ábrán bemutatott erősen zajos időjelet a Steiner-súlyokkal definiált IRLS inverziós eljárással dolgozzuk fel, az 5. ábrán bemutatott (kék vonallal rajzolt) spektrumot kapjuk (összehasonlításképpen itt is feltüntettük a zajmentes spektrumot), amely a DFT-eljárással összehasonlítva (4. ábra) rendkívül jó zajelnyomó tulajdonságot mutat. Az $\alpha = 0,0025$, $M = 150$ beállítások mellett az 50. iterációban eredményül kapott spektrum alapján inverz Fourier-transzformációval előállított időfüggvényt (számított adatrendszer) a 6. ábra reprezentálja, amely jól szemlélteti, hogy milyen mértékben „tisztult meg” a zajtól az inverzióval kapott spektrumon számított

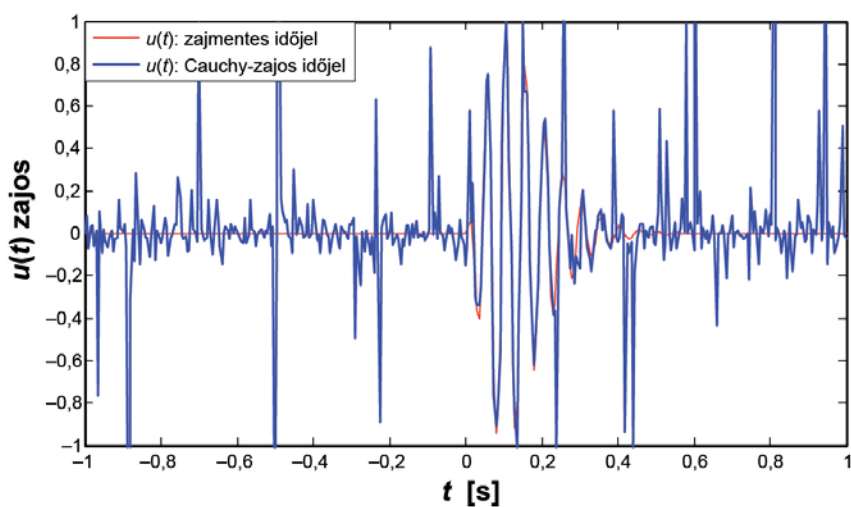


1. ábra | A zajmentes jel az időtartományban
Figure 1 | The noiseless signal in the time domain



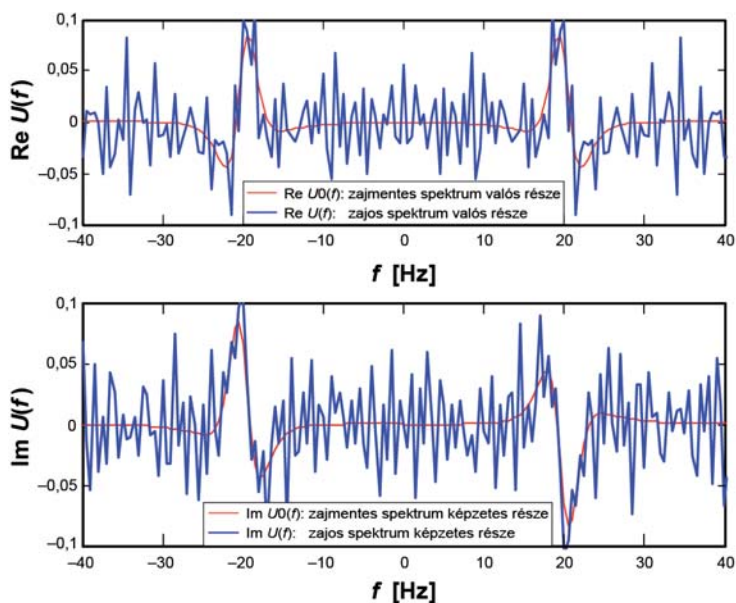
2. ábra | A zajmentes jel a frekvenciatartományban

Figure 2 | The noiseless signal in the frequency domain



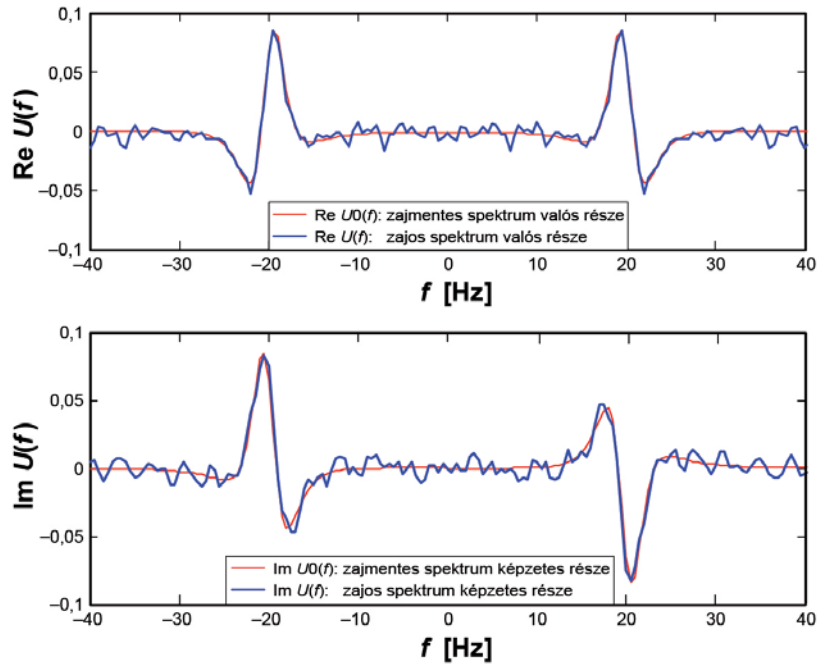
3. ábra | A Cauchy-zajjal terhelt jel időtartománybeli képe

Figure 3 | The signal contaminated by Cauchy noise in the time domain

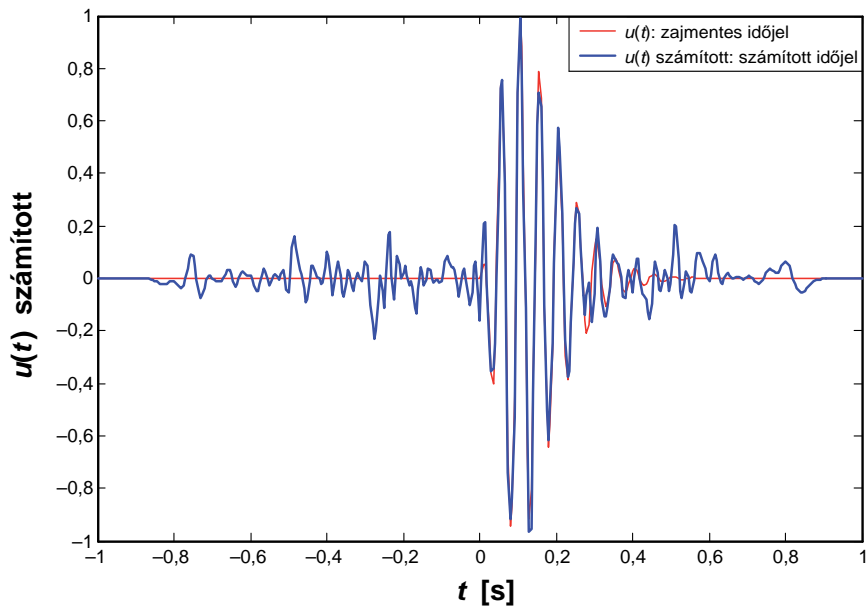


4. ábra | A Cauchy-zajjal terhelt jel frekvenciatartománybeli képe

Figure 4 | The signal contaminated by Cauchy noise in the frequency domain (given by standard DFT)



5. ábra | Az új eljárással (H-IRLS-FT) számított frekvenciaspektrum képe
Figure 5 | The result of the new version of the H-IRLS-FT in the frequency domain



6. ábra | Az új eljárással (H-IRLS-FT) számított jel az időtartományban

Figure 6 | The result of the new version of the H-IRLS-FT in the time domain

1. táblázat. | Az RMS értékek a zajmentes és a Cauchy-zajjal terhelt adatok, illetve a számított és a zajmentes adatok esetében

	A Cauchy-zajos és a zajmentes adatok közötti eltérés	A számított és a zajmentes adatok közötti eltérés
d_{RMS} (időtartomány)	0,103	0,0461
D_{RMS} (frekvenciatartomány)	0,0457	0,00283

időtartománybeli adatsor. Ez ugyancsak jó zajelnyomó tulajdonságot szemléltet az adattérben is.

Az ábrák alapján megállapíthatjuk, hogy a Steiner-súlyokkal definiált IRLS inverziós Fourier-transzformációs algoritmus jelentős zajelnyomási kapacitással rendelkezik. Az 1. táblázat összefoglalja mind a két tartományra vonatkozóan az átlagnégyzetes hibát (RMS). Ha összehasonlítjuk a két oszlop értékeit, jelentős különbséget figyelhetünk meg. Az első oszlopban levő RMS értékek azt mutatják, hogy a zajmentes jel és a Cauchy-zajjal terhelt jel között milyen mértékű az eltérés. Az új inverziós Fourier-transzformáció használatával mindkét tartományban észrevehető a zaj hatásának nagymértékű csökkenése, ahogy azt a második oszlopban látható alacsony (egy nagyságrenddel kisebb) értékek is szemléltetik.

Következtetés

E tanulmányban a Steiner-féle leggyakoribb érték módszerre alapozva egy új inverziós alapú Fourier-transzformációs algoritmust mutattunk be. Az eljárás keretében felhasználtuk a skálázott Hermite-függvények azon tulajdonságát, miszerint ezek a Fourier-transzformáció sajátfüggvényei (Dobróka et al. 2012), így a Jacobi-mátrix elemeinek gyors (integrálás nélküli) és pontosabb számítását értük el. Ez igen fontos az inverziós Fourier-transzformációs eljárások kidolgozása során. Az új Steiner-súlyokkal definiált IRLS inverziós Fourier-transzformációs módszert szintetikus adatrendszeren teszteltük. Az elvégzett vizsgálatok meggyőzően bizonyították, hogy az új eljárás használatával nagymértékű zajelnyomás, illetve a kiugróan zajos adatokkal szemben számottevő rezisztencia érhető el.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az 1. Kiválósági Központ 3. sz. Tudományos műhelyében folyó kutatómunka eredményeit mutatja be, amelyek az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósultak meg.

Hivatkozások

- Amundsen L., 1991: Comparison of the least-squares criterion and the Cauchy criterion in frequency-wavenumber inversion. *Geophysics* 56, 2027–2038
- Dobróka M., Szegedi H., Vass P., Turai E., 2012: Fourier transformation as inverse problem – an improved algorithm. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* 47(2), 185–196, DOI: 10.1556/AGeod.47.2012.2.7
- Duoandikoetxea J., 1995: *Fourier Analysis*. Graduate studies in Mathematics, Vol. 29. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island
- Gröbner W., Hoffreiter N., 1958: *Integraltafel*. Zweiter Teil. Bestimmte Integrale. Springer-Verlag, Wien und Innsbruck
- Ney da Silva J. A., de Campos M. L. R., 2006: Method for obtaining spectrally efficient orthogonal UWB pulse shapes. *Telecommunications symposium, 2006 International*, Fortaleza, Ceara, 3–6 Sept. 2006, pp. 46–51, ISBN: 978-85-89748-04-9, DOI: 10.1109/ITS.2006.4433240
- Scales J. A., Gersztenkorn A., Treitel S., 1988: Fast Lp solution of large, sparse, linear systems: Application to seismic travel time tomography. *Journal of Comp. Phys.* 75, 314–333
- Steiner F., 1997: *Optimum methods in statistics*. Akadémiai Kiadó, Budapest
- Vass P., 2010: *A Fourier-transzformáció mint inverz feladat*. PhD-értekezés. Miskolci Egyetem