

# Az első öt földmágneses multipólus IGRF-13 koefficiensek értékeiből számolt paramétereinek táblázatai (1900–2020)

MÁRTON P.

ELTE Geofizikai és Űrtudományi Tanszék  
H-1117 Budapest, Pázmány Péter stny. 1/C  
E-mail: archeomag@caesar.elte.hu

A vonatkozó számításokat a harmonikus koefficiensek és a multipólus-paraméterek között fennálló egyenletek megoldásával végeztem el, a lehető legegyszerűbb algebrai eszközök felhasználásával. Ez az  $n$ -edik multipólusra  $(2n + 1)$  ismeretlen meghatározását jelentette ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ). Az eredetileg a James-algoritmus alapján Winch által felírt egyenletekből multipólusonként két ismeretlen paraméter kiküszöbölése után előálló  $(2n - 1)$  ismeretlenes nemlineáris egyenleteket Taylor-sorfejtéssel linearizáltam. Az utóbbiak megoldására közelítő megoldásrendszer feltételezésével iterációs algoritmust és Gauss-eliminációt alkalmaztam.

## Márton, P.: Parameters of the leading geomagnetic multipoles ( $n = 1, \dots, 5$ ) computed from the harmonic coefficients of the IGRF-13 field model (1900–2020)

The problem, as I put it, was to solve the equations between the harmonic coefficients and the  $(2n + 1)$  multipole parameters for the first five geomagnetic multipoles making use of the simplest algebraic means. The equations were basically those given by Winch (1967b) after being shortened by eliminating two unknown parameters for each multipole. The ensuing  $(2n - 1)$  non-linear equations were then linearized by Taylor expansion and solved in an iterative way by Gauss elimination. The results are presented in five tables in the main text and in six diagrams in Appendix 2.

Beérkezett: 2020. július 31.; elfogadva: 2020. augusztus 10.

## Bevezetés

A földmágneses tér standard modelljében (IGRF) a Föld magjához köthető mágneses tér potenciálját a

$$V = a \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \vartheta) \quad (1)$$

gömbi harmonikus sorral írják le, amelyben  $a$  a Föld közepe sugarát ( $a = 6371200$  m),  $(r, \vartheta, \lambda)$  tetszőleges  $r \geq a$  távolságú pont gömbi koordinátáit,  $P_n^m(\cos \vartheta)$  pedig a Schmidt-féle kvázinormált asszociált Legendre-függvényeket jelenti. A  $g_n^m$  és  $h_n^m$  (nT) harmonikus koefficiensek értékeit kombinált földi és – amikor vannak – műholdas mágneses mérések feldolgozásával határozzák meg, és a tér évszázados változásai miatt periodikusan frissítik. Az IGRF (Nemzetközi Földmágneses Referencia Térmodell) jelenleg a  $g_n^m$  és  $h_n^m$  koefficiensek 1900 és 2020 között felvett,

5 évenként kiszámított értékeiből áll (IGRF-13). Az (1) egyenletben az összegzés 1900 és 1945 között  $N = 8$  tagra, 1945 és 2000 között  $N = 10$  tagra, 2000 és 2015 között  $N = 12$  tagra, míg 2020-ra  $N = 13$  tagra terjedt ki. Az együtt hatók 1945 és 2015 között megjelenített értékei véglegesnek tekintendők (DGRF, azaz Definitív Földmágneses Térmodell). Az  $N > 13$  együtt hatók lényegében a litoszféra felső 50 km vastagságú részének járulékáiból adódnak.

A harmonikus függvények Maxwell-féle póluselmélete szerint (Maxwell 1892) a  $g_n^m$  és  $h_n^m$  együtt hatók földmágneses multipólusok paramétereinek függvényei. Az  $n$ -edik multipólusnak  $(2n + 1)$  paramétere van, amelyek a multipóluserőssége és az  $n$  db pozitív tengely irányába mutató egységvektor  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  gömbi koordinátái  $(\vartheta_i, \lambda_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ . Maguk a függvénykapcsolatok a James (1968) által levezetett algoritmus alapján írhatók fel tetszőleges multipólusra. A James-algoritmust Winch (1967b) aktualizálta a Schmidt-féle kvázinormált harmonikusokra,

és az első öt harmonikusra vonatkozólag fel is írta a  $g_n^m$  és  $h_n^m$  együtthatókat a megfelelő multipólus-paraméterek függvényében. Ez a dolgozat szintén az első öt multipólus paramétereinek meghatározásával foglalkozik az IGRF/DGRF által lefedett 120 év hosszúságú periódusban, 24 egyenletesen elosztott időpontban (epocha).

Az IGRF 1968-as bevezetése előtt, eltekintve néhány korábbi kísérlettől, a földmágneses multipólus-paraméterek kiszámításával az elérhető régebbi sorfejtések, illetve azok kombinálásával előállított  $g_n^m$  és  $h_n^m$  együtthatókra alapozva, a következő munkák foglalkoztak.

Winch és Slaucitajs (1966a,b) 1829 és 1960 közötti 14 különböző epochára az első három multipólus paramétereit számították ki, majd Winch (1967a,b) az 1829 és 1965 közötti 15 epochára a negyedik, valamint az 1845 és 1965 közötti 10 epochára az ötödik multipólus paramétereit is meghatározta. James (1969) az általa kifejlesztett, fentiekétől különböző módszerrel (James 1968) számította ki és analizálta az első hat földmágneses multipólus paramétereit és azok 1845 és 1965 közötti évszázados változását 13 különböző időpontra vonatkozó adatokból.

## A számítások módszere

A harmonikus koefficiensek kifejezései a megfelelő multipólus-paraméterek függvényében az első három multipólusra (dipólus, kvadrupólus, oktopólus) az elemekből ismertek (egyetemi tananyag az ELTE geofizikus szakán). A negyedik (szedecimupólus) és ötödik (duotrigintupólus) multipólusra történő levezetésük legkényelmesebben a fentebb hivatkozott, Winch által felírt egyenletekből helyettesítésekkel végezhető el. Ez különösen az ötödik multipólus esetén elég hosszadalmas eljárás, és a kapott egyenletek is meglehetősen terjedelmesek. Figyelemre méltó viszont, hogy a  $g_n^m$  és  $h_n^m$  együtthatókra vonatkozó egyenletek  $m = n$  esetén  $n$ -től függetlenül kétféleképpen is összevonhatók, ui. – ha  $g_n^{m=n}$  és  $h_n^{m=n}$  nem egyszerre zérus – akkor

$$LA_n = \arctg\left(\frac{h_n^{m=n}}{g_n^{m=n}}\right), \quad (2)$$

ahol

$$LA_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (3)$$

továbbá

$$MPE_n = \frac{\mu_0 m_n}{4\pi a^{n+2}} = \frac{M_n}{\prod_{i=1}^n \sin \vartheta_i}, \quad (4)$$

$$\sin \vartheta_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n),$$

ahol  $MPE_n$  az  $n$ -edik multipólus erőssége (nT),  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  Vs/Am, a vákuum permeabilitása, továbbá  $m_n$  az  $n$ -edik multipólus momentuma ( $Am^{(n+2)}$ ),  $a$  a Föld sugara és

$$M_n = \sqrt{(h_n^{m=n})^2 + (g_n^{m=n})^2}, \quad (5)$$

amelyben

$$K_1^2 = 1, K_2^2 = 3, K_3^2 = 22,5, K_4^2 = 315, K_5^2 = 22,5 \times 315. \quad (6)$$

Megjegyzendő, hogy az  $n$ -edik multipólus erősségére az itt megadott  $MPE_n$  mellett az  $n!MPE_n$  is használatos.

Miután  $LA_n$  és  $M_n$  ily módon ismertek, az  $n$  db ismeretlen  $\lambda$ -ból egy, pl.  $\lambda_n$  kiküszöbölhető, és az  $MPE_n$  multipólus erősség helyébe a (4) egyenlet jobb oldalát képező hányados tehető. Ezekkel a helyettesítésekkel az egyenletek és az ismeretlenek száma bármely multipólus esetén 2-vel csökken, azaz az  $n$ -edik multipólus esetén  $(2n - 1)$ -re redukálódik. A fent idézett munkákban a szerzők nem éltek ezzel a lehetőséggel. Ezek után minden egyenlet jobb oldalán szorozóként megjelenik a (4) egyenlet jobb oldalát képező hányados, amely lehetővé teszi a  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) változók megtartása mellett, hogy a  $\vartheta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) változók helyett új változókat vezessünk be a következőképpen:

$$X = 1/\operatorname{tg} \vartheta_1, \quad Y = 1/\operatorname{tg} \vartheta_2, \quad Z = 1/\operatorname{tg} \vartheta_3, \\ KSZI = 1/\operatorname{tg} \vartheta_4, \quad ETA = 1/\operatorname{tg} \vartheta_5. \quad (7)$$

A  $\vartheta_i = Ti$ ,  $\lambda_i = Li$ , ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), (azaz pl.  $\vartheta_2 = T2$  vagy  $\lambda_4 = L4$ ),  $LA_n = LA$ , (azaz pl.  $LA_3 = LA$  és  $M_n = Mn$ ), ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ) jelölések mellett, az egyes multipólusokra vonatkozóan az 1. Függelékben megadott egyenletek érvényesek.

## Az egyenletek megoldása

A multipólus paraméterek kiszámítása az 1. Függelékben félkövér írással feltüntetett egyenletek megoldásával történt.

Eltekintve a dipólustól, vagyis az  $n > 1$  esettől kezdve többváltozós nemlineáris egyenletekkel állunk szemben, amelyek közül csak az  $n = 2$  esetre van bizonyítottan helyes közvetlen analitikai megoldás (Willis 1982), ezért olyan iteratív megoldási eljárást kellett keresnünk, amely egységesen alkalmazható az itt tárgyalt multipólusokra. Az alkalmazás feltétele az egyenletek egy közelítő megoldásrendszerének megadása, amely esetünkben könnyen teljesíthető a Bevezetésben hivatkozott munkák alapján.

A közelítő megoldásrendszer felhasználásával az egyenleteket Taylor-sorfejtés útján linearizáltam, amellyel multipólusonként  $(2n - 1)$  ismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszert kaptam a változók javítására. A lineáris egyenletrendszerek megoldására Gauss-eliminációt alkalmaztam. A változók új értékeivel egy következő iterációt generáltam. Az eljárást addig folytattam, amíg az eredeti egyenletek bal és jobb oldalának különbségei  $\leq 10^{-6}$  nagyságrendben stabilizálódtak, ami általában 5–10 iterációs lépés után bekövetkezett. A számítások 32 bites asztali számítógépen, QBASIC programmal történtek.

Az eredmények ellenőrzésére a fentebb már hivatkozott dolgozatokban (Winch, Slaucitajs 1966a,b, Winch 1967a,b)

közölt adatokat használtam fel. A triviális dipólus esettől eltekintve, saját programjaimmal kiszámoltam az ott tárgyalt epochákra és bemeneti harmonikus koefficiensekkel a kvadrupólus, az oktopólus, a szedecimupólus és a duotrigintupólus paramétereit. Két kivételtől eltekintve a kétféle módszerrel elvégzett számítás azonos eredményekre (paraméterértékekre) vezetett. Az 1922 és 1945 epochák esetében a duotrigintupólus paramétereit különbözőnek adódtak, noha az IGRF-13 adatokra épülő számítások mindkét epochára konzisztens paramétereket szolgáltatottak. Számításaim pontosságára jellemző, hogy a

fordított feladat elvégzésével meghatározott harmonikus koefficiens értékek 1 nT-n belül visszaadják a kiindulási IGRF-13 táblázati értékeket.

A következő táblázatokban a multipólusok  $\hat{E}$ -i mágneszettségű pólusainak két tizedesre kerekített paraméterértékei állnak. A D-i mágneszettségű pólusok antipodálisan helyezkednek el, kivéve az excentrikus dipólust, amelyre ezeket is feltüntettem (l. 1. táblázat). Megjegyzendő, hogy adott multipólusra a pólusok polaritását páronként megváltoztatva a tér potenciálja nem változik meg.

### A multipólus ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ) paraméterek táblázatai

**1. táblázat** A földmágneses dipólus ( $n=1$ ) paramétereit 5 évenként 1900 és 2020 között, kiegészítve a Schmidt-féle excentrikus dipólus excentricitására jellemző adataival és „pólusainak” koordinátaival. *Jelmagyarázat:* Epoch: évek;  $\lambda_1$  a földmágneses dipólus  $\hat{E}$ -i mágneszettségű pólusának geocentrikus hosszúságkoordinátája;  $\varphi_1$  a földmágneses dipólus  $\hat{E}$ -i mágneszettségű pólusának geocentrikus szélességkoordinátája;  $MPE_1$ : a földmágneses dipólus erőssége. *További jelölések:* ( $\lambda_0, \varphi_0, R_0$ ) a mágneses középpont (sensu A. Schmidt) geocentrikus koordinátái; ( $\lambda(N), \varphi(N)$ ), ill. ( $\lambda(S), \varphi(S)$ ) az excentrikus dipólus (sensu A. Schmidt) tengely dőléspontjainak gömbfelszíni koordinátái

**Table 1** Parameters of the geomagnetic dipole ( $n = 1$ ) between 1900 and 2020, supplemented by the relevant values of eccentricities and pole coordinates of the Schmidt eccentric dipole. *Symbols:* Epoch: (years);  $\lambda_1$ : geocentric longitude of the geomagnetic S pole;  $\varphi_1$ : geocentric latitude of the geomagnetic S pole;  $MPE_1$ : strength of the geocentric dipole. *Further symbols:* ( $\lambda_0, \varphi_0, R_0$ ): geocentric coordinates (long., lat., radius) of the magnetic centre (sensu Schmidt);  $\lambda(N), \varphi(N)$ , resp.  $\lambda(S), \varphi(S)$ : geocentric coordinates of the piercing points on the globe of the axis of the eccentric dipole

Epoch	$\lambda_1$	$\varphi_1$	$MPE_1$	$\lambda_0$	$\varphi_0$	$R_0$	$\lambda(N)$	$\varphi(N)$	$\lambda(S)$	$\varphi(S)$
	(°)	(°)	(nT)	(°)	(°)	(km)	(°)	(°)	(°)	(°)
1900	111,21	-78,61	32176,3	162,51	7,21	330,50	121,14	-76,54	283,46	80,22
1905	111,25	-78,61	32096,3	162,50	7,87	337,20	121,32	-76,48	283,52	80,25
1910	111,28	-78,59	31986,6	162,27	8,31	344,43	121,46	-76,40	283,60	80,27
1915	111,43	-78,57	31843,7	161,64	8,56	351,78	121,63	-76,30	283,70	80,33
1920	111,62	-78,56	31689,9	160,76	8,88	359,40	121,80	-76,20	283,80	80,40
1925	111,73	-78,55	31553,6	159,67	9,41	368,47	121,87	-76,09	283,91	80,50
1930	111,74	-78,53	31433,2	158,31	9,93	378,01	121,80	-75,94	284,06	80,58
1935	111,64	-78,49	31344,9	156,79	10,59	386,60	121,56	-75,80	284,20	80,67
1940	111,49	-78,47	31286,0	155,19	11,55	395,10	121,25	-75,65	284,35	80,76
1945	111,47	-78,47	31224,6	153,71	13,12	406,83	121,09	-75,52	284,48	80,90
1950	111,15	-78,47	31183,8	152,03	13,99	418,95	120,67	-75,38	284,62	81,04
1955	110,84	-78,46	31129,2	150,69	14,91	430,30	120,29	-75,25	284,75	81,15
1960	110,53	-78,51	31043,2	149,59	16,09	441,58	119,98	-75,19	284,81	81,30
1965	110,15	-78,53	30951,5	148,75	17,20	451,57	119,62	-75,13	284,87	81,40
1970	109,82	-78,59	30829,1	148,24	18,45	462,60	119,40	-75,10	284,90	81,53
1975	109,53	-78,69	30696,3	147,95	19,69	474,38	119,29	-75,11	284,89	81,68
1980	109,24	-78,81	30573,8	147,29	20,39	488,63	119,17	-75,11	284,89	81,88
1985	109,10	-78,97	30434,7	146,58	20,85	502,26	119,18	-75,15	269,95	82,15
1990	108,87	-79,14	30318,2	145,64	21,11	514,67	119,04	-75,20	268,92	82,40
1995	108,58	-79,32	30275,2	144,59	21,50	526,95	118,83	-75,26	267,77	82,68
2000	108,43	-79,54	30119,6	143,16	21,81	540,14	118,64	-75,34	266,73	83,03
2005	108,19	-79,75	30034,1	141,65	22,18	551,96	118,31	-75,42	265,70	83,36
2010	107,78	-80,01	39946,5	140,22	22,48	563,32	117,91	-75,57	264,15	83,73
2015	107,38	-80,31	29697,1	138,66	22,57	576,78	117,52	-75,72	262,24	84,14
2020	107,32	-80,59	29806,0	136,97	22,66	590,48	117,28	-75,84	260,79	84,56

*Megjegyzés:* A mágneses középpont paramétereit Bartels (1936) képleteinek felhasználásával számítottam ki.

*Remark:* The parameters of the magnetic centre were computed by the formulae given in Bartels (1936).

**2. táblázat** A földmágneses kvadrupólus ( $n = 2$ ) paraméterei 5 évenként 1900 és 2020 között. *Jelmagyarázat:* Epoch: évek;  $(\vartheta_1, \lambda_1), (\vartheta_2, \lambda_2)$  a kvadrupólus tengelyek dőféspontjainak (a „pólusoknak”) geocentrikus pólustávolság és hosszúság-koordinátái a gömbön;  $MPE_2$ : a kvadrupólus erőssége

**Table 2** Parameters of the geomagnetic quadrupole ( $n = 2$ ) between 1900 and 2020. *Symbols:* Epoch: (years);  $(\vartheta_1, \lambda_1), (\vartheta_2, \lambda_2)$ : geocentric co-latitudes and longitudes of the poles of the geomagnetic quadrupole;  $MPE_2$ : strength of the same

Epoch	$\vartheta_1$	$\lambda_1$	$\vartheta_2$	$\lambda_2$	$MPE_2$
	(°)	(°)	(°)	(°)	
1900	81,09	164,12	155,00	246,38	2008,7
1905	81,39	163,70	154,77	241,95	2040,4
1910	81,86	162,96	154,30	237,41	2076,2
1915	82,27	161,76	153,81	233,26	2109,7
1920	82,42	160,56	153,62	229,76	2136,6
1925	82,18	159,47	153,80	226,86	2166,1
1930	81,71	158,28	154,08	224,72	2200,0
1930	81,71	158,28	154,08	224,72	2200,0
1935	80,93	157,16	154,32	223,55	2235,5
1940	79,85	156,15	154,71	222,48	2269,0
1945	78,30	155,54	155,19	221,28	2316,7
1950	77,33	154,29	155,99	219,30	2358,3
1955	76,47	153,31	156,55	217,11	2399,1
1960	75,52	152,62	156,93	214,76	2439,5
1965	74,74	152,07	157,25	212,02	2472,7
1970	74,01	151,83	157,35	209,06	2512,6
1975	73,38	151,74	157,36	205,88	2556,3
1980	73,23	150,98	157,26	202,16	2612,9
1985	73,12	150,21	157,17	199,51	2665,9
1990	72,87	149,34	157,38	198,18	2712,2
1995	72,37	148,54	157,67	197,66	2759,5
2000	71,84	147,36	158,00	197,31	2810,1
2005	71,30	146,10	158,24	196,63	2854,9
2010	70,98	144,88	158,21	196,08	2903,6
2015	70,80	143,47	158,24	195,57	2961,0
2020	70,65	141,86	158,22	194,49	3019,9

**3. táblázat** A földmágneses okkupólus ( $n = 3$ ) paraméterei 5 évenként 1900 és 2020 között. *Jelmagyarázat:* Epoch: évek;  $(\vartheta_1, \lambda_1), (\vartheta_2, \lambda_2), (\vartheta_3, \lambda_3)$  az okkupólus tengelyek dőféspontjainak (a „pólusoknak”) geocentrikus pólustávolság és hosszúság koordinátái a gömbön;  $MPE_3$ : az okkupólus erőssége

**Table 3** Parameters of the geomagnetic octupole ( $n = 3$ ) between 1900 and 2020. *Symbols:* Epoch: (years);  $(\vartheta_1, \lambda_1), (\vartheta_2, \lambda_2), (\vartheta_3, \lambda_3)$ : geocentric co-latitudes and longitudes of the poles of the geomagnetic octupole;  $MPE_3$ : strength of the same

Epoch	$\vartheta_1$	$\lambda_1$	$\vartheta_2$	$\lambda_2$	$\vartheta_3$	$\lambda_3$	$MPE_3$
	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	
1900	57,57	141,28	21,40	29,59	67,68	231,57	573,48
1905	57,82	141,44	21,60	24,28	67,54	231,37	582,83
1910	57,95	141,43	21,91	18,60	67,42	231,05	594,40
1915	58,00	141,21	22,31	13,03	67,33	230,59	608,32
1920	58,02	140,96	22,66	8,25	67,11	230,04	622,42

3. táblázat. (folyt.)

Table 3 (cont'd)

Epoch	$\vartheta_1$	$\lambda_1$	$\vartheta_2$	$\lambda_2$	$\vartheta_3$	$\lambda_3$	MPE <sub>3</sub>
	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(nT)
1925	57,92	140,73	22,82	4,38	66,76	229,46	635,56
1930	57,69	140,45	22,78	1,00	66,38	228,92	648,39
1935	57,42	140,08	22,53	-2,20	65,93	228,40	660,59
1940	57,14	139,66	22,11	-4,81	65,44	227,84	672,12
1945	57,18	139,38	21,71	-7,78	64,71	227,71	684,78
1950	57,27	139,52	21,17	-9,57	63,93	227,11	692,31
1955	57,24	139,66	20,80	-11,37	63,42	226,33	699,27
1960	57,59	139,70	20,79	-13,37	62,63	225,25	703,29
1965	57,48	140,03	20,45	-15,43	62,11	224,49	705,78
1970	57,52	140,56	20,33	-17,03	61,27	223,31	705,84
1975	57,56	141,18	20,41	-18,35	60,55	222,13	706,95
1980	57,37	141,40	20,62	-19,73	60,35	221,50	711,81
1985	57,49	141,25	20,85	-21,79	59,75	220,82	715,93
1990	57,40	140,93	20,83	-24,60	59,04	219,97	718,68
1995	57,14	140,35	20,89	-28,63	58,31	218,92	720,50
2000	57,01	139,69	20,96	-31,87	57,77	217,67	720,06
2005	56,69	139,26	20,86	-33,69	57,45	216,46	717,00
2010	56,39	139,14	20,63	-34,76	56,83	215,34	712,87
2015	56,12	139,19	20,10	-36,35	55,80	214,35	708,32
2020	55,83	139,13	19,47	-38,65	54,90	213,58	706,62

4. táblázat A földmágneses szedecimupólus ( $n = 4$ ) paramétereit 5 évenként 1900 és 2020 között. *Jelmagyarázat:* Epoch: évek; ( $\vartheta_1, \lambda_1$ ), ( $\vartheta_2, \lambda_2$ ), ( $\vartheta_3, \lambda_3$ ), ( $\vartheta_4, \lambda_4$ ) a szedecimupólus tengelyek dőféspontjainak (a „pólusoknak”) geocentrikus pólustávolság és hosszúság koordinátái a gömbön; MPE<sub>*i*</sub>: a szedecimupólus erőssége

Table 4 Parameters of the geomagnetic sedecimupole ( $n = 4$ ) between 1900 and 2020. Symbols: Epoch: (years); ( $\vartheta_1, \lambda_1$ ), ( $\vartheta_2, \lambda_2$ ), ( $\vartheta_3, \lambda_3$ ), ( $\vartheta_4, \lambda_4$ ): geocentric co-latitudes and longitudes of the poles of the geomagnetic sedecimupole; MPE<sub>*i*</sub>: strength of the same.

Epoch	$\vartheta_1$	$\lambda_1$	$\vartheta_2$	$\lambda_2$	$\vartheta_3$	$\lambda_3$	$\vartheta_4$	$\lambda_4$	MPE <sub>4</sub>
	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(nT)
1900	31,55	216,25	59,24	311,19	68,82	57,53	12,35	105,79	96,5
1905	31,26	216,12	59,17	311,51	69,03	56,71	12,80	111,66	97,7
1910	30,99	216,15	59,02	311,77	69,29	55,72	13,50	117,40	98,9
1915	31,02	216,56	58,75	311,89	69,52	54,50	14,62	121,05	100,1
1920	31,48	217,40	58,43	311,75	69,64	53,09	16,04	121,78	101,2
1925	32,06	218,19	58,06	311,31	69,69	51,55	17,33	121,08	102,1
1930	32,97	219,02	57,66	310,66	69,61	50,00	18,58	119,28	102,9
1935	32,94	219,04	57,64	310,74	69,58	49,91	18,57	119,28	103,0
1940	34,81	220,55	56,99	309,59	68,94	46,57	21,03	115,28	105,5
1945	36,24	220,82	57,50	308,94	68,76	45,26	22,86	114,63	109,9
1950	36,53	220,19	57,35	308,63	68,10	44,12	23,77	112,34	110,8
1955	36,52	219,14	57,14	308,33	67,52	43,43	24,15	110,68	110,4
1960	36,23	217,53	57,17	307,44	67,44	42,68	24,38	108,88	110,3
1965	36,28	215,73	56,80	307,51	67,13	42,24	24,52	107,64	109,7

4. táblázat. (folyt.)

Table 4 (cont'd)

Epoch	$\vartheta_1$	$\lambda_1$	$\vartheta_2$	$\lambda_2$	$\vartheta_3$	$\lambda_3$	$\vartheta_4$	$\lambda_4$	MPE <sub>4</sub>
	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(nT)
1970	36,29	213,69	56,58	307,30	67,33	42,12	24,39	106,87	109,0
1975	36,50	211,29	56,31	307,08	67,71	42,14	24,15	106,36	108,2
1980	36,95	208,30	56,03	307,19	67,94	41,92	23,98	106,41	107,3
1985	36,95	205,16	55,41	307,10	67,88	41,62	23,38	105,91	106,0
1990	37,03	202,29	54,75	306,93	67,58	41,15	22,97	104,88	105,0
1995	37,36	200,30	54,08	306,78	67,48	40,56	23,07	104,10	104,4
2000	37,07	198,78	53,23	306,70	67,59	39,39	23,33	105,25	103,1
2005	36,65	197,45	52,34	306,57	67,75	37,92	23,96	106,19	101,9
2010	36,44	196,13	51,48	306,68	67,68	36,34	24,75	106,95	100,9
2015	36,90	194,51	50,97	306,68	67,36	34,54	26,04	106,34	100,4
2020	37,10	192,85	50,72	306,36	66,91	32,98	27,62	105,63	99,9

5. táblázat A földmágneses duotrigintupólus ( $n = 5$ ) paramétereit 5 évenként 1900 és 2020 között. *Jelmagyarázat:* Epoch: évek; ( $\vartheta_1, \lambda_1$ ), ( $\vartheta_2, \lambda_2$ ), ( $\vartheta_3, \lambda_3$ ), ( $\vartheta_4, \lambda_4$ ), ( $\vartheta_5, \lambda_5$ ) a duotrigintupólus tengelyek dőléspontjainak (a „pólusoknak”) geocentrikus pólustávolság és hosszúság koordinátái a gömbön; MPE<sub>5</sub>: a duotrigintupólus erőssége

Table 5 Parameters of the geomagnetic duotrigintupole ( $n = 5$ ) between 1900 and 2020. *Symbols:* Epoch: (years); ( $\vartheta_1, \lambda_1$ ), ( $\vartheta_2, \lambda_2$ ), ( $\vartheta_3, \lambda_3$ ), ( $\vartheta_4, \lambda_4$ ), ( $\vartheta_5, \lambda_5$ ): geocentric co-latitudes and longitudes of the poles of the geomagnetic duotrigintupole; MPE<sub>5</sub>: strength of the same

Epoch	$\vartheta_1$	$\lambda_1$	$\vartheta_2$	$\lambda_2$	$\vartheta_3$	$\lambda_3$	$\vartheta_4$	$\lambda_4$	$\vartheta_5$	$\lambda_5$	MPE <sub>5</sub>
	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(nT)
1900	127,79	242,37	94,43	-28,55	143,66	29,15	176,06	113,71	136,44	172,70	8,8
1905	127,48	242,05	94,69	-27,16	142,64	26,20	173,45	102,96	135,31	173,02	8,7
1910	127,15	241,37	95,00	-25,56	140,90	23,26	170,52	98,86	133,92	173,15	8,7
1915	126,90	240,73	95,55	-23,42	138,75	20,54	167,65	97,44	132,52	172,60	8,6
1920	126,69	239,75	96,42	-21,02	136,40	18,77	165,30	96,12	131,45	171,63	8,6
1925	126,63	238,60	97,67	-18,37	134,25	17,79	163,71	95,40	131,20	170,12	8,5
1930	126,34	237,19	99,15	-15,94	132,21	17,12	162,41	94,71	131,70	168,83	8,4
1935	125,71	235,94	100,51	-13,78	130,62	16,81	161,52	93,36	132,67	167,57	8,4
1940	124,78	234,83	101,25	-11,69	129,47	16,16	161,02	91,83	133,72	166,63	8,3
1945	123,67	236,95	105,50	-6,78	127,43	11,76	159,58	89,03	134,00	164,04	8,6
1950	121,90	234,76	101,59	-4,96	128,82	11,93	160,55	87,27	134,60	164,54	8,5
1955	120,74	232,92	97,66	-3,39	130,33	10,95	161,64	86,15	134,98	164,87	8,5
1960	118,22	231,57	95,62	-4,36	131,24	10,45	161,63	83,67	137,13	166,53	8,6
1965	116,78	229,40	94,21	-4,71	131,80	8,68	160,84	85,50	139,30	168,55	8,5
1970	114,64	228,12	93,18	-4,77	131,53	7,82	161,16	82,96	140,81	169,87	8,6
1975	112,65	226,67	93,47	-4,91	130,60	6,91	160,96	78,51	142,24	171,93	8,6
1980	111,88	225,05	92,94	-2,23	128,81	4,09	160,82	77,75	141,96	172,89	8,4
1985	111,15	224,25	93,78	-2,02	126,22	3,18	160,93	76,02	142,10	174,11	8,3
1990	110,48	223,80	95,26	-1,15	124,28	1,21	161,47	72,36	142,52	174,15	8,2
1995	109,96	224,46	95,61	1,64	124,56	-4,75	160,87	66,16	142,26	171,52	8,3
2000	110,15	224,06	96,74	5,20	123,15	-10,44	161,00	67,52	143,44	170,58	8,4
2005	110,79	223,62	96,95	8,58	123,29	-15,76	160,76	71,34	145,47	169,66	8,6

5. táblázat. (folyt.)  
Table 5 (cont'd)

Epoch	$\vartheta_1$	$\lambda_1$	$\vartheta_2$	$\lambda_2$	$\vartheta_3$	$\lambda_3$	$\vartheta_4$	$\lambda_4$	$\vartheta_5$	$\lambda_5$	MPE <sub>5</sub>
	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(°)	(nT)
2010	110,57	223,25	96,12	9,98	124,43	-19,30	160,47	72,26	147,54	168,36	8,7
2015	110,06	223,48	95,83	10,55	125,67	-21,66	160,01	69,59	148,91	165,58	8,9
2020	109,40	224,03	95,50	10,39	126,81	-23,90	159,38	68,29	150,47	163,42	9,1

## Értékelés

A földmágneses tér IGRF-13 modelljének felhasználásával meghatároztam a modellel lefedett teljes 1900–2020 periódusra az első öt földmágneses multipólus tengelyeit és erősségeit. Ezzel az IGRF-13 megfelelő részével ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ) azonos értékű adathalmazt nyertünk, amely szintén tükrözi a Föld magjából eredő mágneses tér legnagyobb részének változásait és komponenseinek arányát. Mind a multipólus tengelyek, mind az erősségek konzisztens adatsort képeznek és további vizsgálatokra alkalmasak.

A 2. Függelékben elhelyezett *F1–F5. ábrák* az egyes multipólusok ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ) szögkoordinátáinak időbeli változásait mutatják, az *F6. ábra* pedig az erősségek idődiagramjait tartalmazza. Az ábrák léptékeit úgy választottam, hogy egy-egy multipólus összes szögparamétere egyetlen diagramra kerüljön. Ezzel elegendően sima pontsorokat kaptunk, amelyek az évszázados változás trendjeit jól tükrözik. Adott multipólus meridionális (É-i vagy D-i) irányú trendje a pólustávolság-paraméterből, azimutális (K-i vagy Ny-i) irányú trendje a hosszúságparaméterből olvasható ki. A multipólusok pólusainak lassú mozgását a gömbi Föld felszínén m/év-ben szokás kifejezni (drift). A meridionális drift az  $a(d\vartheta/dt)$ , az azimutális drift az  $a \sin \vartheta (d\lambda/dt)$  képletekkel számítható ki, ahol  $a$  a gömbi Föld sugara ( $a = 6371200$  m),  $\vartheta$  és  $\lambda$  az adott multipólus kiszemelt pólusának szögparaméterei és  $t$  (év) az idő. A konkrét számításokkal, amelyek a 3. Függelékben táblázatosan megadott egyenletek felhasználásával történhetnek, az érdeklődő olvasóra hagyatkozunk.

A fenténél nagyobb felbontásban ábrázolva, a multipólus-paraméterek az idő függvényében kisebb-nagyobb

„hullámzást” mutatnak és az  $n > 2$  rendű multipólusok esetében kiugró értékek is megjelennek (l. 3–5. táblázat). A legfeltűnőbbek az IGRF/DGRF-váltás környékiek. Miután a kiugró értékek nem számítási hibából adódnak, valószínű, hogy a számításukra használt koefficiensek „zajosságából” erednek. A rátevődött hullámok analízise viszont külön tanulmányt érdemel.

## A tanulmány szerzője

Márton Péter

## Hivatkozások

- Bartels J. (1936): The eccentric dipole approximating the Earth's magnetic field. *Terr. Mag.*, 41, 225–250.
- IGRF-13, 2019, I. URL <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>
- James R. W. (1968): Multipole analysis: I. Theory, and geomagnetic multipoles 1965.0. *Aust. J. Phys.*, 21, 455–464.
- James R. W. (1969): Multipole analysis: II. Geomagnetic secular variation. *Aust. J. Phys.*, 22, 481–495.
- Maxwell J. C. (1892): *Treatise on Electricity and Magnetism*. 3rd ed., Vol. 1, Ch. 9. Oxford Univ. Press
- Willis D. M. (1982): A direct analytical method of calculating the quadrupole parameters of a planetary magnetic field. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 68, 751–784.
- Winch D. E., Slaucajts L. (1966a): Geomagnetic multipoles, 1829 to 1960. *Pure Appl. Geophys.*, 63, 121–132.
- Winch D. E., Slaucajts L. (1966b): Geomagnetic multipoles, 1965. *Pure Appl. Geophys.*, 65, 95–101.
- Winch D. E. (1967a): The fourth order geomagnetic multipole: the sedecimupole. *Pure Appl. Geophys.*, 67, 112–122.
- Winch D. E. (1967b): The fifth order geomagnetic multipole: the duotrigintupole. *Pure Appl. Geophys.*, 68, 90–102.

## 1. FÜGGELÉK

QBASIC program részletek a multipólus paraméterek meghatározásához szükséges egyenletek (vastagon szedve) felállításáról (jelölések mint „A számítások módszere című részben”)

### APPENDIX 1

Segments of QBASIC programs, eventually showing the equations (printed in bold) to be solved for the determination of the multipole parameters for the first five multipoles (for undefined notations see text)

A földmágneses dipólusra ( $n = 1$ ):

$$\begin{aligned} G_{10} &= g_1^0 : G_{11} = g_1^1 : H_{11} = h_1^1 \\ LA &= \text{ATN}(H_{11} / G_{11}) : M1 = \text{SQR}(G_{11}^2 + H_{11}^2) \\ G_{10} &= G_{10} / M1 \\ X &= 1 / \text{TAN}(T1) \\ L1 &= LA \\ \mathbf{G10} &= \mathbf{X} \end{aligned}$$

A földmágneses kvadrupólusra ( $n = 2$ ):

$$\begin{aligned} G_{20} &= g_2^0 : G_{21} = g_2^1 : H_{21} = h_2^1 : G_{22} = g_2^2 : H_{22} = h_2^2 \\ LA &= \text{ATN}(H_{22} / G_{22}) : M2 = \text{SQR}((G_{22}^2 + H_{22}^2) / 3) \\ G_{20} &= G_{20} / (2 * M2) : G_{21} = G_{21} / (\text{SQR}(3) * M2) : H_{21} = H_{21} / (\text{SQR}(3) * M2) \\ X &= 1 / \text{TAN}(T1) : Y = 1 / \text{TAN}(T2) \\ L2 &= LA - L1 \\ \mathbf{G20} &= \mathbf{X * Y - .5 * \text{COS}(2 * L1 - LA)} \\ \mathbf{G21} &= \mathbf{X * \text{COS}(LA - L1) + Y * \text{COS}(L1)} \\ \mathbf{H21} &= \mathbf{X * \text{SIN}(LA - L1) + Y * \text{SIN}(L1)} \end{aligned}$$

A földmágneses oktopólusra ( $n = 3$ ):

$$\begin{aligned} G_{30} &= g_3^0 : G_{31} = g_3^1 : H_{31} = h_3^1 : G_{32} = g_3^2 : H_{32} = h_3^2 : G_{33} = g_3^3 : H_{33} = h_3^3 \\ LA &= \text{ATN}(H_{33} / G_{33}) : M3 = \text{SQR}(10 * (G_{33}^2 + H_{33}^2)) / 15 \\ G_{30} &= G_{30} / (6 * M3) : G_{31} = G_{31} / (2 * \text{SQR}(6) * M3) : H_{31} = H_{31} / (2 * \text{SQR}(6) * M3) : G_{32} = G_{32} / (\text{SQR}(15) * M3) : \\ &H_{32} = H_{32} / (\text{SQR}(15) * M3) \\ X &= 1 / \text{TAN}(T1) : Y = 1 / \text{TAN}(T2) : Z = 1 / \text{TAN}(T3) \\ L3 &= LA - L1 - L2 \\ \mathbf{G30} &= \mathbf{X * Y * Z - .5 * X * \text{COS}(2 * L2 + L1 - LA) - .5 * Y * \text{COS}(2 * L1 + L2 - LA) - .5 * Z * \text{COS}(L1 - L2)} \\ \mathbf{G31} &= \mathbf{X * Y * \text{COS}(LA - L1 - L2) + X * Z * \text{COS}(L2) + Y * Z * \text{COS}(L1) - \text{COS}(L1) * \text{COS}(L2) * \text{COS}(LA - L1 - L2) + .25 * \text{COS}(LA)} \\ \mathbf{H31} &= \mathbf{X * Y * \text{SIN}(LA - L1 - L2) + X * Z * \text{SIN}(L2) + Y * Z * \text{SIN}(L1) - \text{SIN}(L1) * \text{SIN}(L2) * \text{SIN}(LA - L1 - L2) - .25 * \text{SIN}(LA)} \\ \mathbf{G32} &= \mathbf{X * \text{COS}(LA - L1) + Y * \text{COS}(LA - L2) + Z * \text{COS}(L1 + L2)} \\ \mathbf{H32} &= \mathbf{X * \text{SIN}(LA - L1) + Y * \text{SIN}(LA - L2) + Z * \text{SIN}(L1 + L2)} \end{aligned}$$

A földmágneses szedecimupólusra ( $n = 4$ ):

$$\begin{aligned} G_{40} &= g_4^0 : G_{41} = g_4^1 : H_{41} = h_4^1 : G_{42} = g_4^2 : H_{42} = h_4^2 : G_{43} = g_4^3 : H_{43} = h_4^3 \\ G_{44} &= g_4^4 : H_{44} = h_4^4 \\ LA &= \text{ATN}(H_{44} / G_{44}) : M4 = \text{SQR}((G_{44}^2 + H_{44}^2) / 315) \\ G_{40} &= G_{40} / (12 * M4) : G_{41} = G_{41} / (\text{SQR}(90) * M4) : H_{41} = H_{41} / (\text{SQR}(90) * M4) \\ G_{42} &= G_{42} / (\text{SQR}(180) * M4) : H_{42} = H_{42} / (\text{SQR}(180) * M4) : G_{43} = G_{43} / (M4 * \text{SQR}(315 / 2)) : H_{43} = H_{43} / (M4 * \text{SQR}(315 / 2)) : \\ X &= 1 / \text{TAN}(T1) : Y = 1 / \text{TAN}(T2) : Z = 1 / \text{TAN}(T3) : \text{KSZI} = 1 / \text{TAN}(T4) \\ L4 &= LA - L1 - L2 - L3 \\ \mathbf{G40} &= \mathbf{2 * X * Y * Z * \text{KSZI} - X * \text{KSZI} * \text{COS}(L2 - L3) - Y * \text{KSZI} * \text{COS}(L1 - L3) - Z * \text{KSZI} * \text{COS}(L1 - L2) - X * Y * \text{COS}(L3 - L4) - X * Z * \text{COS}(L2 - L4) - Y * Z * \text{COS}(L1 - L4) + \text{COS}(L1) * \text{COS}(L2) * \text{COS}(L3) * \text{COS}(L4) + \text{SIN}(L1) * \text{SIN}(L2) * \text{SIN}(L3) * \text{SIN}(L4) - .25 * \text{COS}(LA)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G41 &= 2 * X * Y * Z - X * \cos(L2 - L3) - Y * \cos(L1 - L3) - Z * \cos(L1 - L2)) * \cos(L4) - .5 * X * \cos(L2 + L3 - L4) \\
 &- .5 * Y * \cos(L1 + L3 - L4) - .5 * Z * \cos(L1 + L2 - L4) + 2 * X * Y * KSZI * \cos(L3) + 2 * X * Z * KSZI * \cos(L2) + \\
 &2 * Y * Z * KSZI * \cos(L1) - 2 * KSZI * \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) + .5 * KSZI * \cos(L1 + L2 + L3) \\
 H41 &= 2 * X * Y * Z - X * \cos(L2 - L3) - Y * \cos(L1 - L3) - Z * \cos(L1 - L2)) * \sin(L4) - .5 * X * \sin(L2 + L3 - L4) - .5 \\
 &* Y * \sin(L1 + L3 - L4) - .5 * Z * \sin(L1 + L2 - L4) + 2 * X * Y * KSZI * \sin(L3) + 2 * X * Z * KSZI * \sin(L2) + 2 * Y * \\
 &Z * KSZI * \sin(L1) - 2 * KSZI * \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) - .5 * KSZI * \sin(L1 + L2 + L3) \\
 G42 &= X * Y * \cos(L3 + L4) + X * Z * \cos(L2 + L4) + Y * Z * \cos(L1 + L4) - \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \\
 &\cos(L4) + \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \sin(L4) + X * KSZI * \cos(L2 + L3) + Y * KSZI * \cos(L1 + L3) + Z * KSZI \\
 &* \cos(L1 + L2) \\
 H42 &= X * Y * \sin(L3 + L4) + X * Z * \sin(L2 + L4) + Y * Z * \sin(L1 + L4) - \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \cos(L4) \\
 &- \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \sin(L4) - .5 * \sin(L1 + L2 + L3 - L4) + X * KSZI * \sin(L2 + L3) + Y * KSZI * \\
 &\sin(L1 + L3) + Z * KSZI * \sin(L1 + L2) \\
 G43 &= X * \cos(LA - L1) + Y * \cos(LA - L2) + Z * \cos(LA - L3) + KSZI * \cos(L1 + L2 + L3) \\
 H43 &= X * \sin(LA - L1) + Y * \sin(LA - L2) + Z * \sin(LA - L3) + KSZI * \sin(L1 + L2 + L3)
 \end{aligned}$$

A földmágneses duotrigintupólusra ( $n = 5$ ):

$$\begin{aligned}
 G50 &= g_5^0 : G51 = g_5^1 : H51 = h_5^1 : G52 = g_5^2 : H52 = h_5^2 : G53 = g_5^3 : H53 = h_5^3 \\
 G54 &= g_5^4 : H54 = h_5^4 : G55 = g_5^5 : H55 = h_5^5 \\
 LA &= \text{ATN}(H55 / G55) : M5 = \text{SQR}(G55^2 + H55^2) / (.5 * \text{SQR}(315 * 90)) \\
 G50 &= G50 / (30 * M5) : G51 = G51 / (2 * M5 * \text{SQR}(540)) : H51 = H51 / (2 * M5 * \text{SQR}(540)) \\
 G52 &= G52 / (\text{SQR}(945) * M5) : H52 = H52 / (\text{SQR}(945) * M5) : G53 = G53 / (2 * M5 * \text{SQR}(630)) : H53 = H53 / (2 * M5 \\
 &* \text{SQR}(630)) : G54 = G54 / (3 * M5 * \text{SQR}(315)) : H54 = H54 / (3 * M5 * \text{SQR}(315)) \\
 X &= 1 / \text{TAN}(T1) : Y = 1 / \text{TAN}(T2) : Z = 1 / \text{TAN}(T3) : KSZI = 1 / \text{TAN}(T4) : ETA = 1 / \text{TAN}(T5) \\
 L5 &= LA - L1 - L2 - L3 - L4 \\
 A501 &= -2 * X * Y * Z * \cos(L4 - L5) + X * Y * \cos(L2 - L3) * \cos(L4 - L5) + Y * \cos(L1 - L3) * \cos(L4 - L5) + Z * \\
 &\cos(L1 - L2) * \cos(L4 - L5) + .5 * X * \cos(L2 + L3 - L4 - L5) + .5 * Y * \cos(L1 + L3 - L4 - L5) + .5 * Z * \cos(L1 + \\
 &L2 - L4 - L5) - 2 * X * Y * KSZI * \cos(L3 - L5) - 2 * X * Z * KSZI * \cos(L2 - L5) - 2 * Y * Z * KSZI * \cos(L1 - L5) \\
 A502 &= 2 * KSZI * (\cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \cos(L5) + \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \sin(L5)) - .5 * KSZI * \\
 &\cos(L1 + L2 + L3 + L5) + 4 * X * Y * Z * KSZI * ETA - 2 * X * KSZI * ETA * \cos(L2 - L3) - 2 * Y * KSZI * ETA * \cos(L1 \\
 &- L3) - 2 * Z * KSZI * ETA * \cos(L1 - L2) \\
 A503 &= -2 * X * Y * ETA * \cos(L3 - L4) - 2 * X * Z * ETA * \cos(L2 - L4) - 2 * Y * Z * ETA * \cos(L1 - L4) + 2 * ETA * \\
 &(\sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \sin(L4) + \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \cos(L4)) - .5 * ETA * \cos(L1 + L2 + L3 \\
 &+ L4) \\
 G50 &= A501 + A502 + A503 \\
 A511 &= -.5 * X * Y * \cos(L3 + L4 - L5) - .5 * X * Z * \cos(L2 + L4 - L5) - .5 * Y * Z * \cos(L1 + L4 - L5) - .5 * X * KSZI * \\
 &\cos(L2 + L3 - L5) - .5 * Y * KSZI * \cos(L1 + L3 - L5) - .5 * Z * KSZI * \cos(L1 + L2 - L5) + .5 * (\cos(L1) * \cos(L2) \\
 &* \cos(L3) * \cos(L4 - L5) - \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \sin(L4 - L5)) \\
 A512 &= .25 * \sin(L1 + L2 + L3 - L4) * \sin(L5) + \cos(L5) * (2 * X * Y * Z * KSZI - X * KSZI * \cos(L2 - L3) - Y * KSZI \\
 &* \cos(L1 - L3) - Z * KSZI * \cos(L1 - L2) - X * Y * \cos(L3 - L4) - X * Z * \cos(L2 - L4) - Y * Z * \cos(L1 - L4) + \sin(L1) \\
 &* \sin(L2) * \sin(L3) * \sin(L4) + \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \cos(L4)) \\
 A513 &= -.25 * \cos(L1 + L2 + L3 + L4) * \cos(L5) + \cos(L4) * (2 * X * Y * Z * ETA - X * ETA * \cos(L2 - L3) - Y * ETA \\
 &* \cos(L1 - L3) - Z * ETA * \cos(L1 - L2)) - .5 * X * ETA * \cos(L2 + L3 - L4) - .5 * Y * ETA * \cos(L1 + L3 - L4) - .5 * Z \\
 &* ETA * \cos(L1 + L2 - L4) \\
 A514 &= 2 * X * Y * KSZI * ETA * \cos(L3) + 2 * X * Z * KSZI * ETA * \cos(L2) + 2 * Y * Z * KSZI * ETA * \cos(L1) - 2 * \\
 &KSZI * ETA * \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) + .5 * KSZI * ETA * \cos(L1 + L2 + L3) \\
 G51 &= A511 + A512 + A513 + A514 \\
 B511 &= -.5 * X * Y * \sin(L3 + L4 - L5) - .5 * X * Z * \sin(L2 + L4 - L5) - .5 * Y * Z * \sin(L1 + L4 - L5) - .5 * X * KSZI * \\
 &\sin(L2 + L3 - L5) - .5 * Y * KSZI * \sin(L1 + L3 - L5) - .5 * Z * KSZI * \sin(L1 + L2 - L5) + .5 * (\cos(L1) * \cos(L2) * \\
 &\cos(L3) * \sin(L4 - L5) + \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \cos(L4 - L5)) + .25 * \sin(L1 + L2 + L3 - L4) * \cos(L5) \\
 B512 &= \sin(L5) * (2 * X * Y * Z * KSZI - X * KSZI * \cos(L2 - L3) - Y * KSZI * \cos(L1 - L3) - Z * KSZI * \cos(L1 - L2) \\
 &- X * Y * \cos(L3 - L4) - X * Z * \cos(L2 - L4) - Y * Z * \cos(L1 - L4) + \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \sin(L4) + \\
 &\cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \cos(L4) - .25 * \cos(L1 + L2 + L3 + L4)) \\
 B513 &= \sin(L4) * (2 * X * Y * Z * ETA - X * ETA * \cos(L2 - L3) - Y * ETA * \cos(L1 - L3) - Z * ETA * \cos(L1 - L2)) - .5 \\
 &* X * ETA * \sin(L2 + L3 - L4) - .5 * Y * ETA * \sin(L1 + L3 - L4) - .5 * Z * ETA * \sin(L1 + L2 - L4) \\
 B514 &= 2 * X * Y * KSZI * ETA * \sin(L3) + 2 * X * Z * KSZI * ETA * \sin(L2) + 2 * Y * Z * KSZI * ETA * \sin(L1) - 2 * \\
 &KSZI * ETA * \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) - .5 * KSZI * ETA * \sin(L1 + L2 + L3)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{H51 = B511 + B512 + B513 + B514}$$

$$A521 = (2 * X * Y * Z - X * \cos(L2 - L3) - Y * \cos(L1 - L3) - Z * \cos(L1 - L2)) * \cos(L4 + L5) - .5 * X * \cos(L2 + L3 - L4 + L5) - .5 * Y * \cos(L1 + L3 - L4 + L5) - .5 * Z * \cos(L1 + L2 - L4 + L5) - .5 * X * \cos(L2 + L3 + L4 + L5) - .5 * Y * \cos(L1 + L3 + L4 + L5) - .5 * Z * \cos(L1 + L2 + L4 + L5)$$

$$A522 = 2 * X * Y * \text{KSZI} * \cos(L3 + L5) + 2 * X * Z * \text{KSZI} * \cos(L2 + L5) + 2 * Y * Z * \text{KSZI} * \cos(L1 + L5) + 2 * \text{KSZI} * (\sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \sin(L5) - \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \cos(L5))$$

$$A523 = 2 * X * Y * \text{ETA} * \cos(L3 + L4) + 2 * X * Z * \text{ETA} * \cos(L2 + L4) + 2 * Y * Z * \text{ETA} * \cos(L1 + L4) + 2 * X * \text{KSZI} * \text{ETA} * \cos(L2 + L3)$$

$$A524 = 2 * Y * \text{KSZI} * \text{ETA} * \cos(L1 + L3) + 2 * Z * \text{KSZI} * \text{ETA} * \cos(L1 + L2) - 2 * \text{ETA} * (\cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \cos(L4) - \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \sin(L4))$$

$$\mathbf{G52 = A521 + A522 + A523 + A524}$$

$$B521 = (2 * X * Y * Z - X * \cos(L2 - L3) - Y * \cos(L1 - L3) - Z * \cos(L1 - L2)) * \sin(L4 + L5) - .5 * X * \sin(L2 + L3 - L4 + L5) - .5 * Y * \sin(L1 + L3 - L4 + L5) - .5 * Z * \sin(L1 + L2 - L4 + L5) - .5 * X * \sin(L2 + L3 + L4 - L5) - .5 * Y * \sin(L1 + L3 + L4 - L5) - .5 * Z * \sin(L1 + L2 + L4 - L5) - \text{KSZI} * \sin(L1 + L2 + L3 - L5)$$

$$B522 = 2 * X * Y * \text{KSZI} * \sin(L3 + L5) + 2 * X * Z * \text{KSZI} * \sin(L2 + L5) + 2 * Y * Z * \text{KSZI} * \sin(L1 + L5) - 2 * \text{KSZI} * (\sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \cos(L5) + \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \sin(L5))$$

$$B523 = 2 * X * Y * \text{ETA} * \sin(L3 + L4) + 2 * X * Z * \text{ETA} * \sin(L2 + L4) + 2 * Y * Z * \text{ETA} * \sin(L1 + L4) + 2 * X * \text{KSZI} * \text{ETA} * \sin(L2 + L3) + 2 * Y * \text{KSZI} * \text{ETA} * \sin(L1 + L3) + 2 * Z * \text{KSZI} * \text{ETA} * \sin(L1 + L2) - 2 * \text{ETA} * (\cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \sin(L4) + \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \cos(L4)) - \text{ETA} * \sin(L1 + L2 + L3 - L4)$$

$$\mathbf{H52 = B521 + B522 + B523}$$

$$A531 = X * Y * \cos(L3 + L4 + L5) + X * Z * \cos(L2 + L4 + L5) + Y * Z * \cos(L1 + L4 + L5) + X * \text{KSZI} * \cos(L2 + L3 + L5) + Y * \text{KSZI} * \cos(L1 + L3 + L5) + Z * \text{KSZI} * \cos(L1 + L2 + L5) - \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \cos(L4 + L5) + \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \sin(L4 + L5)$$

$$A532 = .5 * \sin(L5) * \sin(L1 + L2 + L3 - L4) - .25 * \cos(L1 + L2 + L3 + L4 - L5) + X * \text{ETA} * \cos(L2 + L3 + L4) + Y * \text{ETA} * \cos(L1 + L3 + L4) + Z * \text{ETA} * \cos(L1 + L2 + L4) + \text{KSZI} * \text{ETA} * \cos(L1 + L2 + L3)$$

$$\mathbf{G53 = A531 + A532}$$

$$B531 = X * Y * \sin(L3 + L4 + L5) + X * Z * \sin(L2 + L4 + L5) + Y * Z * \sin(L1 + L4 + L5) + X * \text{KSZI} * \sin(L2 + L3 + L5) + Y * \text{KSZI} * \sin(L1 + L3 + L5) + Z * \text{KSZI} * \sin(L1 + L2 + L5) - \cos(L1) * \cos(L2) * \cos(L3) * \sin(L4 + L5) - \sin(L1) * \sin(L2) * \sin(L3) * \cos(L4 + L5)$$

$$B532 = -.5 * \cos(L5) * \sin(L1 + L2 + L3 - L4) - .25 * \sin(L1 + L2 + L3 + L4 - L5) + X * \text{ETA} * \sin(L2 + L3 + L4) + Y * \text{ETA} * \sin(L1 + L3 + L4) + Z * \text{ETA} * \sin(L1 + L2 + L4) + \text{KSZI} * \text{ETA} * \sin(L1 + L2 + L3)$$

$$\mathbf{H53 = B531 + B532}$$

$$\mathbf{G54 = X * \cos(LA - L1) + Y * \cos(LA - L2) + Z * \cos(LA - L3) + \text{KSZI} * \cos(LA - L4) + \text{ETA} * \cos(L1 + L2 + L3 + L4)}$$

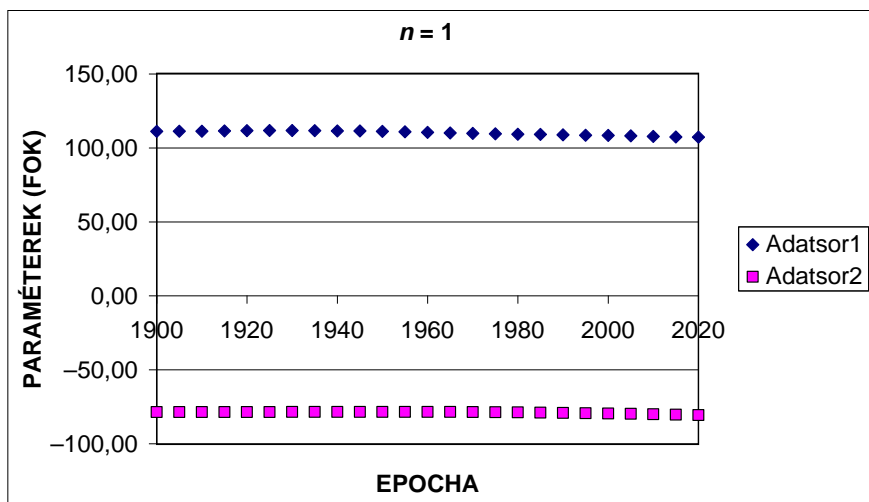
$$\mathbf{H54 = X * \sin(LA - L1) + Y * \sin(LA - L2) + Z * \sin(LA - L3) + \text{KSZI} * \sin(LA - L4) + \text{ETA} * \sin(L1 + L2 + L3 + L4)}$$

2. FÜGGELÉK

Szemléltető diagramok az első öt földmágneses multipólus ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ) paramétereinek időbeli változásáról 1900 és 2020 között

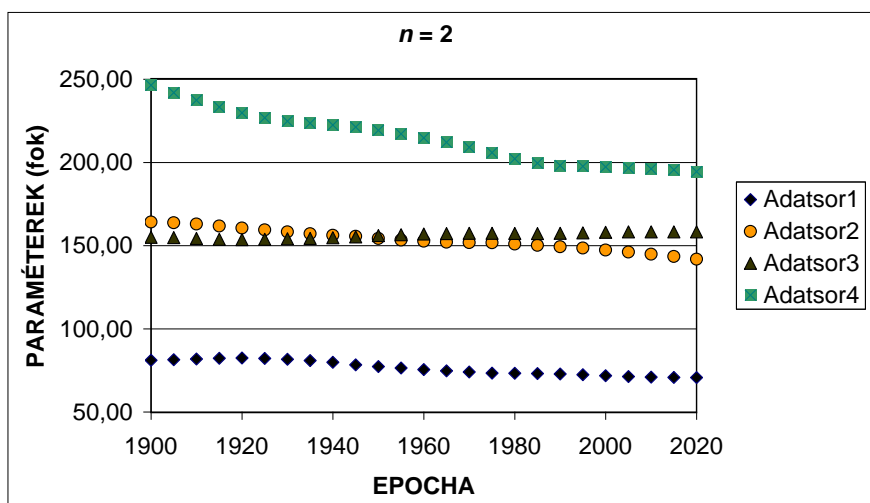
APPENDIX 2

Six diagrams illustrating the evolution (time variation) of the parameters of the first five geomagnetic multipoles between the epochs 1900 and 2020



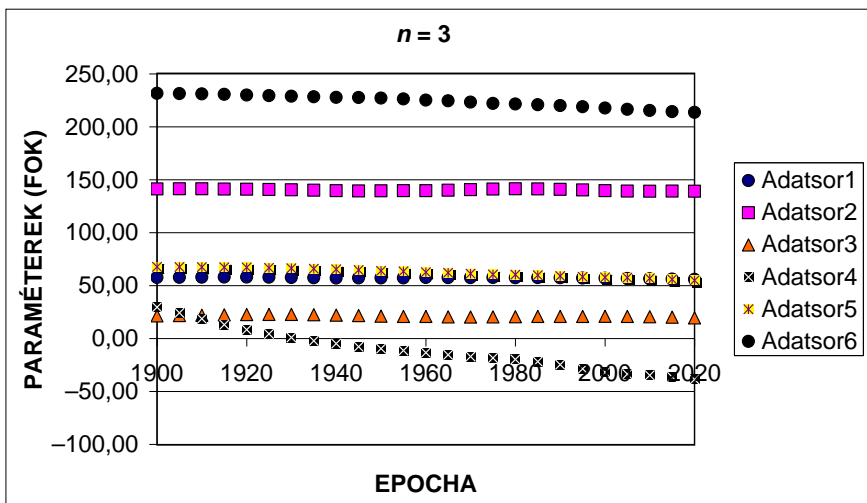
F1. ábra | A földmágneses déli pólus ( $\lambda_1 = \text{Adatsor1}$  és  $\varphi_1 = \text{Adatsor2}$ ) koordinátáinak idődiagramja

Figure F1 | Longitude and latitude ( $\lambda_1 = \text{Adatsor1}$ ,  $\varphi_1 = \text{Adatsor2}$ ) coordinates of the geomagnetic S pole



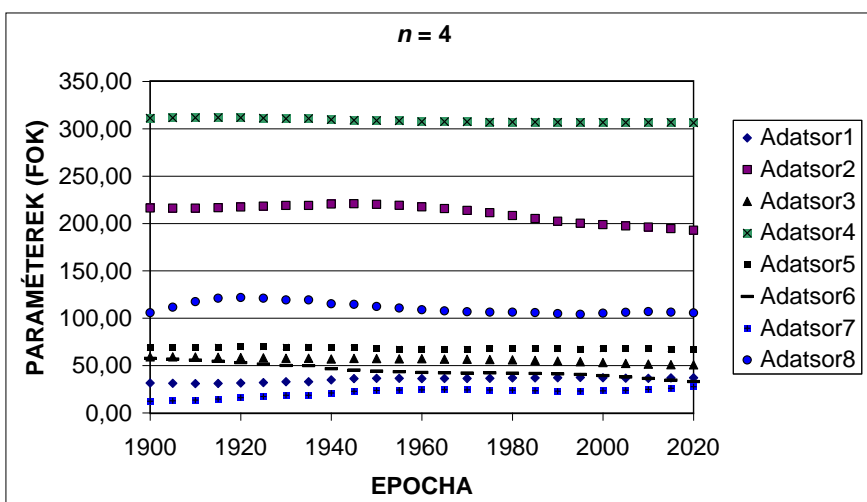
F2. ábra | A földmágneses kvadrupólus ( $\vartheta_1 = \text{Adatsor1}$ ,  $\lambda_1 = \text{Adatsor2}$ ,  $\vartheta_2 = \text{Adatsor3}$ ,  $\lambda_2 = \text{Adatsor4}$ ) koordinátáinak idődiagramja

Figure F2 | Co-latitude and longitude ( $\vartheta_1 = \text{Adatsor1}$ ,  $\lambda_1 = \text{Adatsor2}$ ,  $\vartheta_2 = \text{Adatsor3}$ ,  $\lambda_2 = \text{Adatsor4}$ ) coordinates of the geomagnetic quadrupole



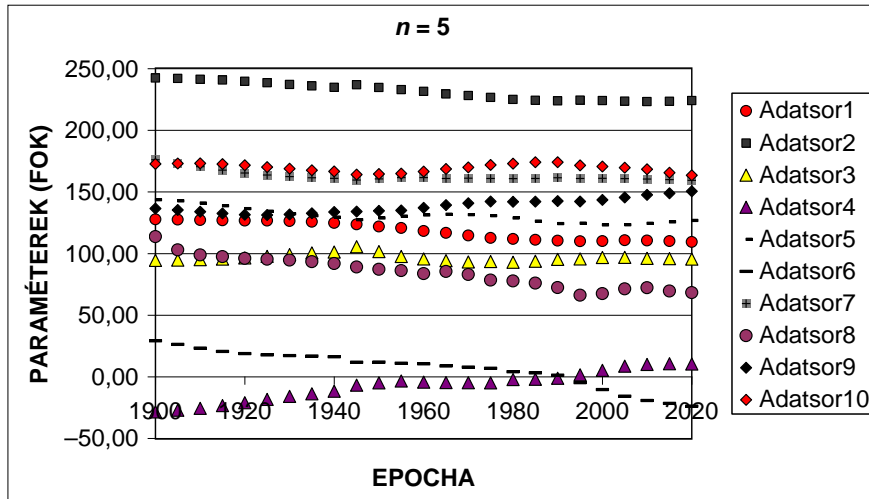
**F3. ábra** A földmágneses okkupólus ( $\vartheta_1 = \text{Adatsor1}$ ,  $\lambda_1 = \text{Adatsor2}$ ,  $\vartheta_2 = \text{Adatsor3}$ ,  $\lambda_2 = \text{Adatsor4}$ ,  $\vartheta_3 = \text{Adatsor5}$ ,  $\lambda_3 = \text{Adatsor6}$ ) koordinátáinak idődiagramja

**Figure F3** Co-latitude and longitude ( $\vartheta_1 = \text{Adatsor1}$ ,  $\lambda_1 = \text{Adatsor2}$ ,  $\vartheta_2 = \text{Adatsor3}$ ,  $\lambda_2 = \text{Adatsor4}$ ,  $\vartheta_3 = \text{Adatsor5}$ ,  $\lambda_3 = \text{Adatsor6}$ ) coordinates of the geomagnetic octupole



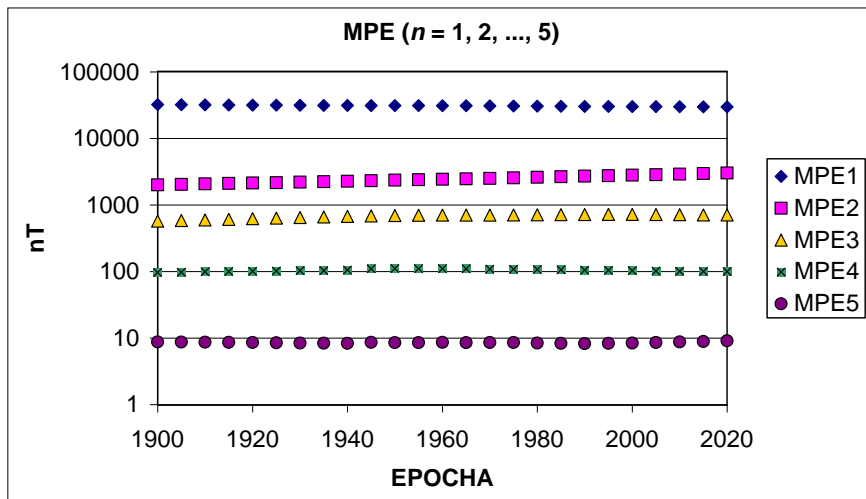
**F4. ábra** A földmágneses szemidecemupólus ( $\vartheta_1 = \text{Adatsor1}$ ,  $\lambda_1 = \text{Adatsor2}$ ,  $\vartheta_2 = \text{Adatsor3}$ ,  $\lambda_2 = \text{Adatsor4}$ ,  $\vartheta_3 = \text{Adatsor5}$ ,  $\lambda_3 = \text{Adatsor6}$ ,  $\vartheta_4 = \text{Adatsor7}$ ,  $\lambda_4 = \text{Adatsor8}$ ) koordinátáinak idődiagramja

**Figure F4** Co-latitude and longitude ( $\vartheta_1 = \text{Adatsor1}$ ,  $\lambda_1 = \text{Adatsor2}$ ,  $\vartheta_2 = \text{Adatsor3}$ ,  $\lambda_2 = \text{Adatsor4}$ ,  $\vartheta_3 = \text{Adatsor5}$ ,  $\lambda_3 = \text{Adatsor6}$ ,  $\vartheta_4 = \text{Adatsor7}$ ,  $\lambda_4 = \text{Adatsor8}$ ) coordinates of the geomagnetic octupole



**F5. ábra** | A földmágneses trigintupólus ( $\vartheta_1 = \text{Adatsor1}$ ,  $\lambda_1 = \text{Adatsor2}$ ,  $\vartheta_2 = \text{Adatsor3}$ ,  $\lambda_2 = \text{Adatsor4}$ ,  $\vartheta_3 = \text{Adatsor5}$ ,  $\lambda_3 = \text{Adatsor6}$ ,  $\vartheta_4 = \text{Adatsor7}$ ,  $\lambda_4 = \text{Adatsor8}$ ,  $\vartheta_5 = \text{Adatsor9}$ ,  $\lambda_5 = \text{Adatsor10}$ ) koordinátáinak idődiagramja

**Figure F5** | Co-latitude and longitude ( $\vartheta_1 = \text{Adatsor1}$ ,  $\lambda_1 = \text{Adatsor2}$ ,  $\vartheta_2 = \text{Adatsor3}$ ,  $\lambda_2 = \text{Adatsor4}$ ,  $\vartheta_3 = \text{Adatsor5}$ ,  $\lambda_3 = \text{Adatsor6}$ ,  $\vartheta_4 = \text{Adatsor7}$ ,  $\lambda_4 = \text{Adatsor8}$ ,  $\vartheta_5 = \text{Adatsor9}$ ,  $\lambda_5 = \text{Adatsor10}$ ) coordinates of the geomagnetic duotrigintupole



**F6. ábra** | Az első öt földmágneses multipólus erősségei (MPE).  $\text{MPE}_1 = \text{MPE1}$ , ...,  $\text{MPE}_5 = \text{MPE5}$

**Figure F6** | Multipole strengths (MPE) for each multipole ( $\text{MPE}_1 = \text{MPE1}$ , ...,  $\text{MPE}_5 = \text{MPE5}$ ), ( $n = 1, 2, \dots, 5$ )

## 3. FÜGGELÉK

## A multipólus paraméterek trendvonalainak egyenletei, a változók jelölései és dimenzióik

## APPENDIX 3

## Equations of the trendlines of the multipole parameters, notations and dimensions of variables

A multipólus-paramétereket az  $x$  változó (legfeljebb) hatodfokú polinomjaival közelítjük.  $x = (1/5)(t - 1895)$ , ahol  $t = \text{EPOCH}$  (év);  $y$  ( $^\circ$ ): a pólusok ( $\vartheta_i, \lambda_i$ ) gömbi koordinátái;  $\text{MPE}_i$ : a póluserősségek (nT), ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ). A polinomok MS Excel által kiszámított együtthatóit (és a közelítés szorosságára jellemző  $R^2$  ún. determinációs együtthatókat) az alábbi táblázatok tartalmazzák.

*Explanation to panels below:*

The multipole parameters are approximated by (maximum) degree sixth polynomials of the  $x$  variable, where:  $x = (1/5)(t - 1895)$ ,  $t = \text{EPOCH}$  (years);  $y$  ( $^\circ$ ): ( $\vartheta_i, \lambda_i$ ) spherical coordinates of the multipole poles;  $\text{MPE}_i$ : multipole strengths (nT), ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ).  $R^2$ : coefficient of determination. All tabulated values were computed by MS Excel.

Dipólus ( $n = 1$ ):

$y$	$x^6$	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	$x^0$	$R^2$
$\vartheta_1$	7E-07	-7E-05	0,0023	-0,0368	0,2573	-0,6204	111,65	0,9982
$\lambda_1$	-9E-08	8E-06	-0,0002	0,0032	-0,0183	0,0562	-78,659	0,9997
$\text{MPE}_1$	-0,0004	0,0351	-1,0816	15,439	-100,26	143,51	32116	0,9994

Kvadrupólus ( $n = 2$ ):

$y$	$x^6$	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	$x^0$	$R^2$
$\vartheta_1$	4E-06	-0,0003	0,01	-0,13	0,6611	-0,9104	81,448	0,9993
$\lambda_1$	1E-06	-6E-05	0,0009	0,0036	-0,1626	-0,111	164,46	0,9993
$\vartheta_2$	-3E-06	0,0002	-0,0071	0,0912	-0,4659	0,567	154,83	0,9945
$\lambda_2$	-1E-05	0,0009	-0,0225	0,2514	-0,9792	-3,2311	250,53	0,9993
$\text{MPE}_2$			-0,0005	0,0229	0,2012	29,327	1981,8	0,9997

Oktupólus ( $n = 3$ ):

$y$	$x^6$	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	$x^0$	$R^2$
$\vartheta_1$	4E-08	1E-05	-0,0008	0,0211	-0,2312	0,9543	56,758	0,9706
$\lambda_1$	2E-06	-0,0002	0,0032	-0,022	-0,0231	0,3766	140,91	0,9456
$\vartheta_2$	2E-06	-0,0002	0,0059	-0,0815	0,4669	-0,7402	21,744	0,9935
$\lambda_2$	3E-07	3E-05	-0,0023	0,0433	-0,0914	-5,731	35,502	0,9992
$\vartheta_3$			-9E-05	0,0055	-0,1199	0,4961	67,066	0,9987
$\lambda_3$	-3E-07	2E-05	-0,0007	0,0076	-0,052	-0,2414	231,95	0,9986
$\text{MPE}_3$	4E-06	-0,0005	0,0243	-0,5006	4,4086	-2,4034	572,86	0,9982

Szedecimupólus ( $n = 4$ ):

$y$	$x^6$	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	$x^0$	$R^2$
$\vartheta_1$	2E-07	-3E-05	0,002	-0,0517	0,5993	-2,3501	33,629	0,9693
$\lambda_1$	-6E-06	0,0004	-0,0109	0,105	-0,3311	0,3683	216,07	0,9993
$\vartheta_2$	3E-08	2E-05	-0,0012	0,0261	-0,224	0,4971	58,928	0,9980
$\lambda_2$	1E-06	-8E-05	0,0018	-0,0143	-0,0619	0,7163	310,49	0,9940
$\vartheta_3$	2E-06	-0,0002	0,0054	-0,0716	0,3885	-0,5945	69,102	0,9536
$\lambda_3$	5E-06	-0,0003	0,0087	-0,0959	0,4106	-1,689	58,965	0,9980
$\vartheta_4$	-3E-06	0,0002	-0,0064	0,0682	-0,2425	1,0352	11,391	0,9949
$\lambda_4$	-1E-06	0,0001	-0,0065	0,1695	-2,3219	13,626	93,652	0,9887
MPE <sub>4</sub>	-8E-06	0,0006	-0,0169	0,2155	-1,2264	3,9309	93,548	0,9682

Duotrigintupólus ( $n = 5$ ):

$y$	$x^6$	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	$x^0$	$R^2$
$\vartheta_1$	-2E-06	7E-05	0,0004	-0,0397	0,4139	-1,6239	129,18	0,9991
$\lambda_1$	-5E-06	0,0003	-0,0089	0,1099	-0,6624	0,9633	242,06	0,9909
$\vartheta_2$	4E-06	-0,0005	0,019	-0,3488	2,8586	-8,522	101,55	0,7887
$\lambda_2$	-1E-05	0,0008	-0,0188	0,1838	-0,6298	2,2386	-30,258	0,9953
$\vartheta_3$	-1E-05	0,0009	-0,03	0,4712	-3,3713	7,8968	137,91	0,9781
$\lambda_3$	1E-05	-0,0009	0,0251	-0,339	2,37	-9,4781	37,126	0,9967
$\vartheta_4$	-4E-06Y	0,0003	-0,0096	0,1325	-0,657	-1,564	178,21	0,9933
$\lambda_4$	8E-07	-0,0001	0,008	-0,1981	2,2816	-12,907	123,05	0,9783
$\vartheta_5$	-3E-06	0,0003	-0,0096	0,1368	-0,7173	0,2002	136,78	0,9870
$\lambda_5$	7E-06	-0,0005	0,0091	-0,0468	-0,3313	2,1264	170,64	0,9584
MPE <sub>5</sub>	-9E-07	8E-05	-0,0023	0,0319	-0,2069	0,5009	8,385	0,9211