

# A Schumann-rezonanciás mérések inverziójának a megbízhatósága

PRÁCSER E.<sup>@</sup>, BOZÓKI T.

Földfizikai és Űrtudományi Kutatóintézet (ELKH FI),  
H-9400 Sopron, Csatkai E. u. 6–8.  
<sup>@</sup>E-mail: pracser@ggki.hu

A villámlások által keltett elektromágneses teret a Föld számos helyén mérik az extrém alacsony frekvenciatartományban (<100 Hz). Ezeket a méréseket nevezzük Schumann-rezonanciás (SR) méréseknek. Az SR mérésekből a villámlások helyére és intenzitására inverziós algoritmussal adunk egy becslést. Az ebben a cikkben bemutatott inverzió a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásán (SVD) alapul, és bemutatunk néhány, az inverzió megbízhatóságára utaló mennyiséget. Az inverziót szintetikus adatokon teszteljük, és a kapott eredmények minőségét jellemző értékeket is elemezzük. A szintetikus tesztek igazolják, hogy a bemutatott minőségjellemző értékek hasznosak az inverzióval kapott eredmények megbízhatóságának a megítélésében. A tesztek egyik fontos eredménye, hogy az inverzió minőségét nem befolyásolja károsan, ha a villámlások feltételezett helyeit nem megfelelően választjuk meg.

## Prácser, E., Bozóki, T.: The reliability of the inversion of Schumann resonance measurements

The electromagnetic field generated by lightning is measured at extremely low frequencies (<100 Hz) in many places on Earth. These measurements are called Schumann resonance (SR) measurements. From SR measurements the location and intensity of global lightning activity can be estimated by applying an inversion algorithm. In this paper, we present an inversion approach based on singular value decomposition (SVD) for this problem and we describe some quality features of the applied inversion technique. The inversion algorithm is tested on synthetic data and the reliability of the obtained results is examined based on the described quality features. Our synthetic tests confirm that the described quality features are very useful in determining the reliability of inversion results. An important conclusion from the synthetic tests is that the quality of the inversion is not adversely affected by incorrect assumptions about the location of the lightning sources.

*Beérkezett: 2022. szeptember 28.; elfogadva: 2022. november 8.*

## 1. Bevezetés

A villámlások által a Föld felszíne és az ionoszféra közötti hullámvezető térben keltett extrém alacsony frekvenciájú elektromágneses hullámok (ELF) terjedésével a szakirodalomban az 1950-es évek óta foglalkoznak (Madden, Thompson 1965, Nickolaenko 1997, Nickolaenko, Hayakawa 2014, Polk 1982, Schumann 1952). A Föld-ionoszféra hullámvezetőben az ilyen elektromágneses hullámok rezonanciafrekvenciáit Schumann-rezonanciáknak nevezik, amelyek az extrém alacsony frekvenciájú mérések spektru-

mainak a 8, 14, 21 stb. Hz-nél megjelenő csúcsainál figyelhetők meg (Price 2016). A Föld-ionoszféra hullámvezetőben egy villám hatását függőleges elektromos dipóllal modellezzük, a mágnesestérerősség-vektor merőleges a hullám terjedési irányára (Jackson 1975). Mivel az ELF alsó sávjában a villámok által keltett elektromágneses hullámok csillapodása rendkívül alacsony (kb. 0,5 dB/Mm) (Chapman és mtsai 1966), minden villám hatása megjelenik a Schumann-rezonanciás mérések adataiban. Ezen adatok vizsgálata hozzájárul a klimatológiai kutatásokhoz (Williams, Mareev 2014, Williams, Bozóki és mtsai 2021).

A Schumann-rezonanciával foglalkozó kutatásoknak már régóta célja, hogy a mérési adatokból inverzióval meghatározza a zivatarvekenységek helyét és intenzitását (Dyrda és mtsai 2014, Heckman és mtsai 1998, Nickolaenko, Hayakawa 2014, Prácser, Bozóki, Sători, Williams és mtsai 2019, Shvets 2001). Ezen a téren a múltban már számos kísérletet végeztek, de az eddigiek közül egyik sem jutott el a rutinszerű gyakorlati alkalmazásig. A geofizikai inverziós algoritmusok két fő részből állnak, azaz tartalmazzák az előremodellezést és az inverz feladat megoldását. Jelen esetben az előremodellezés megadja, hogy adott villámlások esetén milyen SR-adatokat mérnénk, az inverzió pedig a mért SR-adatok alapján becslést ad a villámlások eloszlására és intenzitására. Az inverziós programunkban alkalmazott előremodellezés alapjait a 2.1. alfejezetben foglaljuk össze, a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásán (SVD) alapuló inverziós módszert a 3. fejezet ismerteti. A 4. fejezetben szintetikus adatokon mutatjuk be az inverzió működését.

## 2. Az inverziós feladat áttekintése

### 2.1. Előremodellezés

A homogén vagy inhomogén Föld–ionoszféra hullámvezetőben terjedő elektromágneses hullámokat leíró képleteket a szakirodalom kimerítően tárgyalja (Nickolaenko, Hayakawa 2014, Prácser, Bozóki 2021), ezért most csak a legfontosabbakat mutatjuk be, ezek levezetése az idézett publikációkban megtalálható. A Madden és Thompson (Madden, Thompson 1965) által javasolt módszert alkalmazzuk, a távvezetékek elméletéből ismert módon számítjuk az elektromágneses tér komponenseit, azaz a Föld felszínét egy kétdimenziós távvezetéknek tekintjük. A képleteket gömbkoordinátákkal adjuk meg. A Föld és az ionoszféra közötti  $V(\theta, \phi)$  feszültség tetszőleges  $(\theta', \phi')$  forráskoordinátákra számítható numerikusan és analitikusan is (Kirillov és mtsai 1997, Prácser, Bozóki 2021). Az elektromágneses tér komponenseit megkapjuk a  $V(\theta, \phi)$  feszültségből,

$$E_r(\theta, \phi) = \frac{V(\theta, \phi)}{h_c}, \quad (1a)$$

$$H_\theta(\theta, \phi) = -\frac{1}{RZ \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V(\theta, \phi), \quad (1b)$$

$$H_\phi(\theta, \phi) = \frac{1}{RZ} \frac{\partial}{\partial \theta} V(\theta, \phi). \quad (1c)$$

ahol  $R$  a Föld sugara ( $R = 6371$  km),  $h_c$  az ionoszféra komplex „elektromos” magassága és  $Z$  a földfelszínnek mint távvezetéknek az impedanciája. Ennek a távvezetéknek a jellemzőivel több cikk is foglalkozik (Kulak, Mlynarczyk 2013, Mushtak, Williams 2002, Pechony, Price 2004), az ezekben ismertetett komplex ionoszféramagasságokból számítható a  $Z$  impedancia. Abban az esetben, ha a forrás az Északi sarkon van ( $\theta' = 0$ ), és az ionoszféra

magassága állandó, azaz a hullámvezető homogén, a  $V$  feszültséget a

$$V(\theta) = \frac{iM\nu(\nu+1)}{4\omega\epsilon R^2 \sin(\nu\pi)} P_\nu(-\cos\theta). \quad (2)$$

képlet adja meg, ahol  $i$  a képzetes egység,  $P_\nu$  a Legendre-függvény,  $\omega$  a körfrekvencia,  $M = Ids$  a forrás – amely időtartományban egy áramimpulzus – momentuma és a dimenziómentes  $\nu$  paraméter a

$$\nu(\nu+1) = R^2 \omega^2 \epsilon \mu \frac{h_l}{h_c} \quad (3)$$

képlettel számítható, ahol  $h_l$  az ionszféra komplex „mágneses” magassága (Polk 1982, Wait 1962). A (2) egyenlet értelmében  $V$  csak a forrás és az észlelés szögtávolságától függ. Ezért a gömbháromszögekre érvényes koszinusz-tétel alkalmazásával  $V$  tetszőleges forráskoordinátákra számítható (Prácser, Bozóki, Sători, Takátsy és mtsai 2020, Prácser, Bozóki 2021).

A Schumann-rezonanciás mérés az egyes villámlások által keltett inkoherens elektromágneses térértékek összege. A villámcsapások (másodpercenként, átlagosan kb. 50–100) egy kváziállandó „háttér” rezonanciateret okoznak, amelyben az egyes impulzusok hatása nem ismerhető fel. Ezért a „háttér” Schumann-rezonancia modellezésekor a Föld felületét elemi forrászónákra osztjuk, amelyik mindegyike egy  $M$  átlagmomentummal jellemezhető. A teljes elektromágneses teret az egyedi források spektrális energiasűrűségeinek az összegzésével kaphatjuk meg (Nickolaenko 1997). A spektrális energiasűrűség (PSD) mértékegysége:

$$[\text{PSD}(Ids)] = \frac{A^2 m^2}{\text{Hz}} = \frac{C^2 m^2}{s}. \quad (4)$$

Ez az érték jellemzi a zivatarvekenység mértékét a „háttér” Schumann-rezonancia-kutatás esetében (Dyrda és mtsai 2014, Heckman és mtsai 1998, Shvets és mtsai 2011). Ebből következik, hogy a modellezett elektromágneses térnek is a spektrális energiasűrűségét kell számítani, összegezve az egyes források hatását.

Az egyes frekvenciákon mért elektromágneses térkomponenseket minden obszervatóriumra együttesen az inverzió bemenő adatainak tekintjük. Ezeket egyetlen PSD-vektorba ( $\mathbf{d}$ ) rendezzük. Egy mérés modellezése a

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |G_{1,1}|^2 & |G_{1,2}|^2 & \cdots & |G_{1,m}|^2 \\ |G_{2,1}|^2 & |G_{2,2}|^2 & \cdots & |G_{2,m}|^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |G_{n,1}|^2 & |G_{n,2}|^2 & \cdots & |G_{n,m}|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |S_1|^2 \\ |S_2|^2 \\ \vdots \\ |S_m|^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

mátrix-vektor szorzást jelenti, ahol  $n$  a bemenő adatok száma,  $m$  a feltételezett forráshelyek száma és  $|S_k|^2 = |M(\omega)|^2 = |Ids(\omega)|^2$ .  $G_{j,k}$  a  $k$ -edik egységnyi intenzitású forráshoz tartozó  $j$ -edik adat, amelyet az (1a)–(1c) képle-

tek határoznak meg a  $j$ -edik adat típusának ( $E_r, B_\theta, B_\phi$ ), a frekvenciának és a mérés helyének megfelelően.

## 2.2. Az inverzió

A geofizikában az inverzió alkalmazásakor általában azt feltételezzük, hogy a forrás ismert, és a cél a modellparaméterek meghatározása. Az SR mérések inverziójánál fordított a helyzet. A modellparamétereket ismertnek tekintjük és a források intenzitásának a becslése a célunk. Ebben az esetben is megmaradunk az inverziós szakirodalom szóhasználatánál és az inverzió ismeretlenjeit paramétereknek nevezzük, de ezalatt a források intenzitását értjük. Az inverziós algoritmussal kétféleképpen adhatunk becslést a forrás paramétereire:

- a) A források koordinátáit és az intenzitásait is ismeretlennek tekintjük.
- b) Csak a források intenzitásait tekintjük ismeretleneknek, feltételezzük, hogy a helyük ismert.

A b) változatot tartjuk előnyösnek. Az inverzió stabilitásának a szempontjából ugyanis kedvező, ha csak egyfajta fizikai mennyiség (intenzitás) meghatározásáról van szó. Az előremodellezés két lépésre bontható. Az első lépés a  $G_{j,k}$  értékek kiszámítása az (5) egyenletben, a második lépés pedig egy mátrix-vektor szorzás. A b) esetben az első lépést – amely nagy számítási idő igényű (homogén Föld-ionoszféra modell esetén kb. négyszerese a második lépésnek) – csak egyszer kell elvégezni. Mivel a második lépés számítási ideje rövid, az inverzió egy iterációs lépése csak minimális időt vesz igénybe. Ezzel szemben az a) esetben a  $G_{j,k}$  értékeket, amelyek számítási időigénye nagy, minden egyes iterációs lépésben újra ki kell számítani. Továbbá ebben az esetben a források helyére egy meglehetősen jó becslést kell megadni kezdeti paraméterként annak érdekében, hogy az inverzió kellően jól határozza meg a keresett paramétereket. A b) esetben szintetikus adatokkal végzett tesztek igazolják, hogy ha sok lehetséges forráshelyet adunk meg, akkor az inverziós algoritmus azokhoz a helyekhez, ahol nincs forrás, 0-hoz közeli intenzitásokat rendel (Prácsér, Bozóki, Satori, Williams és mtsai 2019). Ezért annak ellenére, hogy a b) esetben a források koordinátáit ismertnek tekintjük, a nagyszámú feltételezett forrás alkalmazásával ezzel a módszerrel is becslést tudunk adni a valódi források helyére.

A b) esetben az előremodellezés lineáris (egy mátrix-vektor szorzás), ezért elméletileg egy lépésben is megkaphatnánk a kívánt intenzitásokat. A gyakorlatban viszont az adathibák (kalibráció, zaj) vagy a modellezés pontatlansága miatt előfordulhat, hogy negatív intenzitásértékeket kapunk, ami fizikailag elfogadhatatlan. Ezért célszerű az inverzió ismeretlenjeinek a logaritmusával számolni, ami kizárja, hogy negatív intenzitásokat kapjunk. Ebben az esetben viszont a feladat már nem lesz lineáris, ezért linearizált módszerrel iterációs alapon kell elvégezni az inverziót. Általában 120 iteráció elegendő az

inverzió alkalmazásakor. Mivel a  $G_{j,k}$  értékeket – amelyek számítása időigényes – csak egyszer kell kiszámítani, hiszen azok értéke nem változik az iterációs lépések alkalmával, egy iteráció csak néhány másodpercet vesz igénybe egy közönséges személyi számítógépen. Ezért lehet az iterációk számát nagynak venni. Az inverziót regularizációval úgy lehet szabályozni, hogy egy iterációs lépés során a keresett paraméterek csak kismértékben változzanak. Ez stabil inverziót eredményez. A Schumann-rezonanciás mérések inverziója a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásán (SVD) alapul. A szakirodalomban található példa ennek a módszernek a geofizikai alkalmazására (Jupp, Vozoff 1975). A következő fejezetben áttekintjük az SVD-n alapuló inverzió alapjait, és megmutatjuk, hogy miként jellemezhető az inverzióval kapott paraméterek megbízhatósága.

## 3. Linearizált inverzió a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásával

Az inverzió célja a paraméterek (forrásintenzitások) számítása a mérési adatokból. Sajnos olyan direkt algoritmus nem létezik, amely megadja ezeket a paramétereket a mérési adatokból. Ezért inverziós módszer alkalmazására van szükség. Adott kezdeti paraméterekből kiindulva az inverziós algoritmus az előremodellezést többször végrehajtva úgy módosítja a paramétereket, hogy az azokhoz tartozó elméleti adatok egyre közelebb kerüljenek a mért adatokhoz. Az előremodellezés tömör formában felírva:

$$\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \mathbf{d}, \quad (6)$$

ahol az  $\mathbf{f}$  vektor-vektor függvény, az  $\mathbf{m}$  vektor tartalmazza a paramétereket, a  $\mathbf{d}$  vektor a számított adatokat. A  $\mathbf{d}$  adatvektor dimenziója  $n$ , az  $\mathbf{m}$  paramétervektoré  $m$ . Ebben a cikkben azt feltételezzük, hogy  $n > m$ . A cél az, hogy találjunk egy olyan  $\mathbf{m}$  vektort, amely minimalizálja az

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_0\| = \min. \quad (7)$$

$L_2$  normát. A  $\mathbf{d}_0$  vektor tartalmazza a mérési adatokat. Ezt a minimalizálási feladatot iterációs algoritmussal oldjuk meg. Azt feltételezzük, hogy már van egy paramétervektor, és ezt egy  $\Delta\mathbf{m}$  vektorral úgy módosítjuk, hogy a módosított  $\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m}$  vektorhoz tartozó számított adatok a lehető legközelebb legyenek a mért adatokhoz. Az iteráció egy lépése a

$$\|\mathcal{J}\Delta\mathbf{m} - \Delta\mathbf{d}\| = \min. \quad (8)$$

minimalizálása, ahol  $\mathcal{J}$  az  $\mathbf{f}$  Jacobi-mátrixa, amelyet érzékenységi mátrixnak is neveznek, és  $\Delta\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 - \mathbf{f}(\mathbf{m})$ .  $\mathcal{J}$  az  $\mathbf{f}$  függvény ismeretében számítható, és az adatok paraméterek szerinti parciális deriváltjait tartalmazza. A Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontása (Lanczos 1961, Jackson 1972):

$$\mathcal{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T,$$

ahol az  $\mathcal{U}$  mátrix az adattérbeli, a  $\mathcal{V}$  mátrix a paraméterterbeli sajátvektorokat tartalmazza. Az átlós  $\Lambda$  mátrix a  $\lambda_k$  sajátértékeket tartalmazza csökkenő sorrendben,  $T$  jelöli a transzponálást. Az  $\mathcal{U}$  és  $\mathcal{V}$  mátrixok  $k$ -adik oszlopát  $\mathbf{u}_k$ -val és  $\mathbf{v}_k$ -val jelöljük. Érvényesek az

$$\mathcal{U}^T \mathcal{U} = \mathcal{I}_n, \quad \mathcal{V}^T \mathcal{V} = \mathcal{I}_m \quad (9)$$

egyenlőségek, ahol  $\mathcal{I}_n$  és  $\mathcal{I}_m$   $n$ -, illetve  $m$ -dimenziós egységmátrixok. A (8) egyenlet megoldása:

$$\Delta \mathbf{m} = \mathcal{V} \Lambda^{-1} \mathcal{U}^T \Delta \mathbf{d}. \quad (10)$$

A (10) egyenletben az  $\mathcal{U}$  és  $\mathcal{V}$  mátrixok nem tartalmazzák a 0 sajátértékű sajátvektorokat. A  $\mathcal{V} \Lambda^{-1} \mathcal{U}^T$  mátrixot a Jacobi-mátrix általánosított vagy Lánczos-inverzének nevezik. Jelöljük  $p$ -vel a nem 0 sajátértékek számát és tegyük fel, hogy  $p < m$ ! Legyen  $\mathbf{s}$  a 0 sajátértékű sajátvektoroknak egy tetszőleges lineáris kombinációja! Ekkor egy  $\Delta \mathbf{m}_g = \Delta \mathbf{m} + \mathbf{s}$  vektor is megoldása a (8) egyenletnek. Ezért minden  $\Delta \mathbf{m}_g$  vektor, amelyre teljesül a

$$\mathcal{V} \mathcal{V}^T \Delta \mathbf{m}_g = \Delta \mathbf{m} \quad (11)$$

egyenlet, megoldása a minimalizációs feladatnak. A  $\Delta \mathbf{m}_g$  előtti  $\mathcal{V} \mathcal{V}^T$  mátrix a felbontóképesség-mátrix, amelyet  $\mathcal{R}$ -rel jelölünk, és amely ideális esetben az egységmátrix. Ha  $\mathcal{R}$  nem az egységmátrix, akkor lesznek olyan paraméterek, amelyek külön-külön még elméletileg sem határozhatók meg, hanem csak azok lineáris kombinációja. Megmutatható, hogy amennyiben a hagyományos legkisebb négyzetek módszerén alapuló minimalizációs feladat megoldható, akkor annak a megoldása ekvivalens a (10) képlettel. Abban az esetben, amikor vannak szélsőségesen kicsi sajátértékek, ez képlet nem ad stabil megoldást. Csillapító tényező alkalmazására van szükség, ami azt jelenti, hogy a  $\Lambda^{-1}$  átlós mátrixban  $1/\lambda_j$ -t a

$$\lambda_j / (\lambda_j^2 + \alpha) \quad (12)$$

képlettel helyettesítjük, ahol  $\alpha$  a csillapító tényező, amelyet a Tyihonov által javasolt módszerrel számítunk (Tikhonov, Arsenin 1977, Prácser, Bozóki, Sátori, Williams és mtsai 2019).

Az  $\mathbf{m}$  paramétervektor kovarianciamátrixa a Jacobi-mátrixból vagy annak az SVD felbontásában levő  $\mathcal{V}$  mátrixból számítható

$$\text{cov}(\mathbf{m}) = \sigma^2 (\mathcal{J}^T \mathcal{J})^{-1} = \sigma^2 \mathcal{V} \Lambda^{-2} \mathcal{V}^T, \quad (13)$$

feltételezve, hogy az egyes adatokat terhelő hibák függetlenek és azonos szórásúak.  $\sigma$  jelöli a  $\Delta d_i$  értékek szórását. Másképpen fogalmazva a  $\Delta \mathbf{m}$  vektor kovarianciamátrixa  $\sigma^2 \mathcal{I}_m$ . Az  $\mathcal{R}$  felbontóképesség-mátrix is kifejezhető a  $\mathcal{V}$  mátrixszal

$$\mathcal{R} = \mathcal{V} \mathcal{V}^T. \quad (14)$$

Mind a (13), mind a (14) egyenlet tartalmazza a  $\mathcal{V}$  mátrixot. Közöttük az a fő különbség, hogy a (14) egyenlet nem tartalmazza a sajátértékeket.

Jelölje  $\sigma_k$  a  $k$ -adik paraméter szórását! Ez jó jellemzője a paraméter megbízhatóságának (Tarantola 2005)

$$\sigma_k = \sqrt{\text{cov}(m[k, k])}. \quad (15)$$

A paraméterek korrelációs mátrixa a kovarianciamátrixból számítható, amelynek egy eleme

$$\text{corr}(m[i, j]) = \frac{\text{cov}(m[i, j])}{\sqrt{\text{cov}(m[i, i]) \text{cov}(m[j, j])}}. \quad (16)$$

A kovariancia- és korrelációs mátrixok hasznos jellemzői az inverzió minőségének (Dobróka és mtsai 1991, Menke 1984). A kovarianciamátrix számítására a szakirodalomban gyakrabban használják a (13) egyenletben a Jacobi-mátrixot tartalmazó képletet. Ez ekvivalens az SVD komponenseit tartalmazó képlettel, amely valamilyen nem 0 sajátértéket tartalmazza. Ha a szélsőségesen kicsi sajátértékeket és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat is figyelembe vesszük, akkor irreálisan nagy szórásértékeket kaphatunk (Jackson 1972), gyakran magának a paraméter értékének a többszörösét. Fontos megjegyezni, hogy a (13) képlet arra az esetre vonatkozik, amikor egy iterációs lépést csillapító tényező nélkül alkalmazunk. Ezért kétely merülhet fel a kovariancia- és korrelációs mátrixok megbízhatóságára vonatkozólag.

Egy paraméter szórását számíthatjuk a teljes kovarianciamátrix kiszámítása nélkül is,

$$\sigma_k = \sigma \sqrt{\sum_{i=1}^p \left( \frac{v_{k,i}}{\lambda_i} \right)^2}, \quad (17)$$

ahol  $v_{k,i}$  a paraméterterbeli  $i$ -edik sajátvektor  $k$ -adik komponense és  $p$  a nem 0 sajátértékek száma. Ha a mért adatok száma lényegesen meghaladja az ismeretlen paraméterek számát ( $n \gg m$ ), akkor általában  $p = m$ . A szélsőségesen kicsi sajátértékek esetére, amikor  $\sigma_k$  szélsőségesen nagy. Jackson (Jackson 1972) azt javasolja, hogy a sajátvektorok számát úgy kell korlátozni, hogy a szórásnégyzet ne legyen nagyobb egy  $t_k$  küszöbértéknél,

$$\sigma_k^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{q_k} \left( \frac{v_{k,i}}{\lambda_i} \right)^2 < t_k, \quad (18)$$

ahol  $q_k$  a  $\mathcal{V}$  mátrixbeli  $\mathbf{v}_i$  sajátvektorok csökkentett száma.  $t_k$  értéke függ az inverziós modell tulajdonságaitól, értékét érdemes kisebbnek választani a paraméter várható abszolút értékénél. Egy másik lehetőség a szórás stabilizálása a csillapító tényező alkalmazása ((12), (17) képlet). Szintetikus adatokon végzett tesztszámítások azt mutatják, hogy ez az utóbbi módszer kedvezőbb, bár ennek az a hátránya, hogy az így számított szórás függ a csillapító tényezőtől.

A sajátértékek elemzése hasznos információt ad az inverzió minőségéről. A legfontosabb mennyiség a legnagyobb és a legkisebb sajátérték hányadosa, amely utal a paraméterek meghatározhatóságára. Három esetet különböztethetünk meg:

- a)  $p < m$  azt jelenti, hogy lehetetlen valamennyi paramétert meghatározni. Ekkor az  $\mathcal{R}$  felbontóképeség-mátrix biztosan különbözik az egység-mátrixtól.
- b)  $p = m$  és  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$  azt jelenti, hogy elméletileg valamennyi paraméter meghatározható lenne, de az ekvivalencia miatt egyes paraméterek külön-külön nem határozhatók meg, csak a közöttük levő kapcsolatról kapunk információt.
- c)  $p = m$  és a  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  hányados nem túl nagy. Ebben az esetben valamennyi paraméter meghatározható, csupán az adatok hibája okozhatja a kapott paraméterek pontatlanságát.

Sajnos a gyakorlatban a kedvező c) eset ritkán fordul elő, különösen akkor, amikor az ismeretlen paraméterek száma nagy. A geofizikai inverziók alapján az a tapasztalat, hogy ha a

$$\lambda_{\max}/\lambda_{\min} < 10^4 \tag{19}$$

feltétel teljesül, akkor a valamennyi paraméter elfogadható pontossággal meghatározható. Természetesen ez a felső határ nem egy pontosan definiált érték, az ismeretlen paraméterek száma, azok eloszlása és a modell befolyásolhatják ezt az értéket.

A szórás számításával kapcsolatos – korábban már említett – problémák miatt érdemes egy másik, stabilabb minőségjellemzőt is keresni. Ebből a célból vegyük a felbontóképeség-mátrix megfelelő átlós elemét, amelynek az értéke minden esetben egy 0 és 1 közötti szám, és a szóráshoz hasonlóan egy egyszerű képlettel számítható,

$$r_k = \sum_{i=1}^p v_{k,i}^2. \tag{20}$$

Ha  $p < m$ , akkor biztosan lesznek olyan  $r_k$  értékek, amelyek 1-nél kisebbek, és ezzel egyértelműen jelzik a kevésbé megbízható paramétereket (a) eset). A c) esetben minden  $k$ -ra  $r_k = 1$ , ami azt jelenti, hogy mindegyik paraméterérték megbízható. A b) esetben is valamennyi paraméterre  $r_k = 1$ , de mivel ekkor szélsőségesen kis értékű sajátértékek is előfordulnak, ez nem fogadható el mint minőségi jellemző. Ezért a felbontóképeség-mátrix számításakor érdemes a sajátértékekkel súlyozni a sajátvektorokat. A módosított felbontóképeség-mátrix

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\lambda_1} \mathcal{V} \Lambda \mathcal{V}^T, \tag{21}$$

ahol  $\lambda_1$  a legnagyobb sajátérték. Ennek a mátrixnak az átlós elemei is a  $[0, 1]$  intervallumba esnek, és jól jellemzik az inverzióval kapott paraméterek megbízhatóságát. Ezek az átlós elemek egy összeg formájában is számíthatók,

$$r_k = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_{k,i}^2. \tag{22}$$

Az  $r_k$  megbízhatósági értékek az SVD-n alapulnak és az előremodellezésnek mint vektor-vektor függvénynek a

tulajdonságaiból, valamint a mérés geometriájából adódnak. Lényegében csak a Jacobi-mátrixot használtuk fel a számítások során. A mért adatok és az azokat terhelő hibák csak közvetetten vannak hatással az  $r_k$  értékekre.

Hasonlítsuk össze a (17) és a (22) képleteket! Mindkét esetben a  $v_{k,i}$  értékeket összegezzük, de különböző súlyokkal. A sajátérték negatív kitevővel szerepel a szórás és pozitívvá a megbízhatóságot jellemző  $r_k$  számításánál. A (22) képlettel definiált megbízhatósági jellemző hasonlóan minősít egy paramétert, mint a szórás reciproka. Az alkalmazása mellett az szól, hogy nem függ az adatokat terhelő hibáktól, továbbá a szórás számításakor feltételeztük, hogy az adatokat terhelő hibák függetlenek és megegyező szórásúak. Ez a gyakorlatban viszont általában nem teljesül, és a hibák szórását is gyakran csak becsülni tudjuk. Ezért célszerűbb az  $r_k$  értékek használata a szórások helyett.

#### 4. Tesztek szintetikus adatokkal

A szintetikus adatokkal való tesztelést és az ismertett minőségvizsgálatokat 6 mérési hellyel végeztük, a koordináták megfelelnek a HearthMath intézet (<https://www.hearthmath.org/research/global-coherence>) mérési koordinátáinak. A földrajzi koordinátákat az 1. táblázat tartalmazza. A két mágneses komponens számítását a frekvenciáknak egy adott sorozatára.

1. táblázat | A HearthMath állomások földrajzi koordinátái a szintetikus adatok számításához  
 Table 1 | Geographical coordinates of the HearthMath stations used for synthetic testing

Azonosítók	Koordináták	
ALB	53,00° É	110,00° NY
BAI	55,50° É	23,70° K
BOU	37,20° É	122,10° NY
HLU	28,80° D	32,30° K
HOF	26,00° É	49,00° K
NOR	35,10° D	173,50° K

Öt szintetikus tesztet mutatunk be, a szintetikus adatok számítására érvényesek a következők:

- Három forrást alkalmazunk, állandó magasságú ionoszférával végezzük a modellezést, amint azt a 2.1. alfejezetben ismertettük. A három forrás megfelel a Föld azon részeinek, ahol a zivatartevékenység maximális (2. táblázat). Ezekre a forrásokra a továbbiakban mint „eredeti forrásokra” fogunk hivatkozni.
- A számított adatokhoz Gauss-eloszlású zajt adunk – 4% relatív hibával –, kivéve a 5. tesztet, ahol a zaj nagyságának a hatását vizsgáljuk. Ezeket az adatokat „mért spektrumnak” nevezzük.
- Az inverzió kezdeti paramétereinek minden feltételezett forráshelyhez egy kis intenzitásértéket rendelünk.

2. táblázat | Forrásintenzitások ( $C^2 \text{ km}^2/\text{s}$ ) a szintetikus spektrum generálásához és az inverziós algoritmussal kapott forrásintenzitások

Table 2 | The source intensities (in  $C^2 \text{ km}^2/\text{s}$ ) used to generated synthetic spectra and the source intensities reconstructed by the inversion algorithm

Koordináták	Eredeti	1. teszt	2. teszt	3. teszt	4. teszt
$0^\circ, 70^\circ \text{ NY}$	$3 \times 10^4$	$3,068 \times 10^4$	$3,045 \times 10^4$	$2,984 \times 10^4$	$2,783 \times 10^4$
$0^\circ, 20^\circ \text{ K}$	$6 \times 10^4$	$5,982 \times 10^4$	$5,984 \times 10^4$	$6,023 \times 10^4$	$5,967 \times 10^4$
$0^\circ, 110^\circ \text{ K}$	$3 \times 10^4$	$2,896 \times 10^4$	$2,949 \times 10^4$	$3,020 \times 10^4$	$3,225 \times 10^4$

Az első két tesztnél a paraméterek száma csak három, így a korrelációs mátrix alkalmas az inverzió megbízhatóságának a jellemzésére.

A 3., 4. és az 5. teszteknél a paraméterek száma lényegesen nagyobb (27), emiatt a korrelációs mátrix nehezen áttekinthető. Ezért ezeknél csak a sajátértékeket, a szórást és a megbízhatósági értékeket ((22) képlet) mutatjuk be és elemezzük. Az inverzió minőségének egy egyszerű jellemzője a mért és az invertált spektrumok illeszkedése. Ez valamennyi teszt estében jó minőségű inverzióra utal, ezért csak az első teszt esetén mutatjuk be.

#### 4.1. 1. teszt

A Schumann-rezonanciás mérőállomásokon általában a mágneses térkomponenseket mérik. Ezért szintetikus mágnesspektrum-adatokat generálunk minden mérési helyre, és ezekre alkalmazzuk az inverziót. Ennél a teszt-nél feltételezzük, hogy a forrás helye ismert, és az inverziós algoritmus csak az intenzitásokat határozza meg. Az ezekhez az intenzitásokhoz tartozó spektrum jól illeszkedik a mért spektrumokhoz (1. ábra). Figyeljük meg, hogy az 1c ábrán a második rezonanciafrekvenciánál a mért

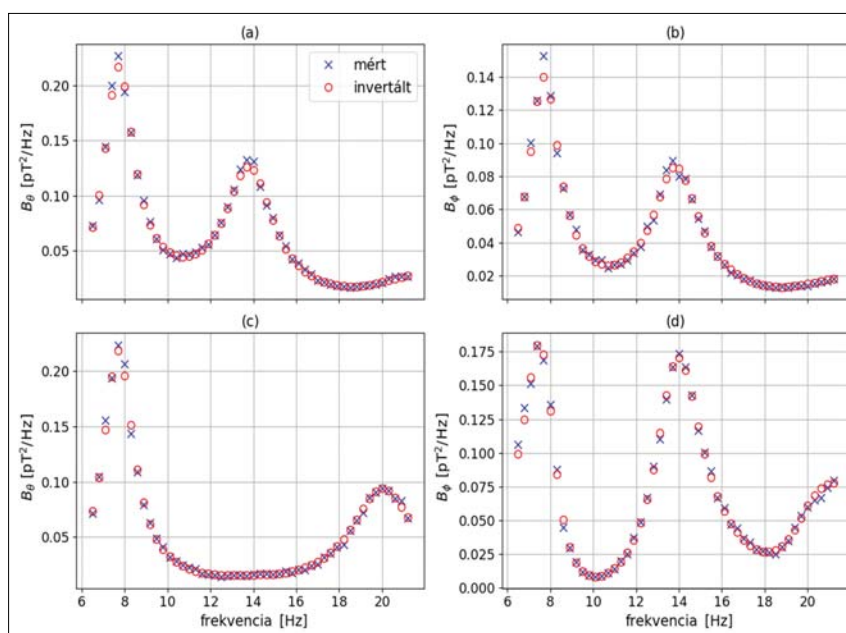
érték 0-hoz közeli, aminek az az oka, hogy a mérés  $90^\circ$  szögtávolságra van a forrásoktól. A legnagyobb és a legkisebb sajátérték hányadosa, amely az inverzió stabilitásának egy fontos jellemzője,  $\lambda_1/\lambda_3 = 5,4876$ . A 3 forrásintenzitás korrelációs mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1,00 & -0,11 & -0,73 \\ -0,11 & 1,00 & -0,21 \\ -0,73 & -0,21 & 1,00 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Az első és a harmadik forrás közötti viszonylag magas korrelációnak az az oka, hogy a Föld ellentétes oldalára esnek. Ezzel a jelenséggel a szakirodalomban már foglalkoztak (Nelson 1967). Az inverzióval meghatározott intenzitások közel esnek az eredetiekhez, amelyekkel a szintetikus adatokat generáltuk (2. táblázat). A legnagyobb és a legkisebb sajátérték hányadosa alapján az inverzióval kapott intenzitások megbízhatóak.

#### 4.2. 2. teszt

A második teszt csak abban különbözik az elsőtől, hogy az inverzió az elektromos térkomponensekkel is számolt. Azt teszteltük, hogy ez javítja-e az inverzió minő-



1. ábra | A mért és az invertált spektrumok illeszkedése az ALB (a, b) és a BAI (c, d) mérőállomásoknál

Figure 1 | Fitting of measured and inverted spectra at ALB (a, b) and BAI (c, d) stations

ségét. Ennek a tesztnek az eredményét is a 2. táblázat tartalmazza. A legnagyobb és a legkisebb sajátérték hányadosa most  $\lambda_1/\lambda_3 = 5,7287$ , a három intenzitás korrelációs mátrixa:

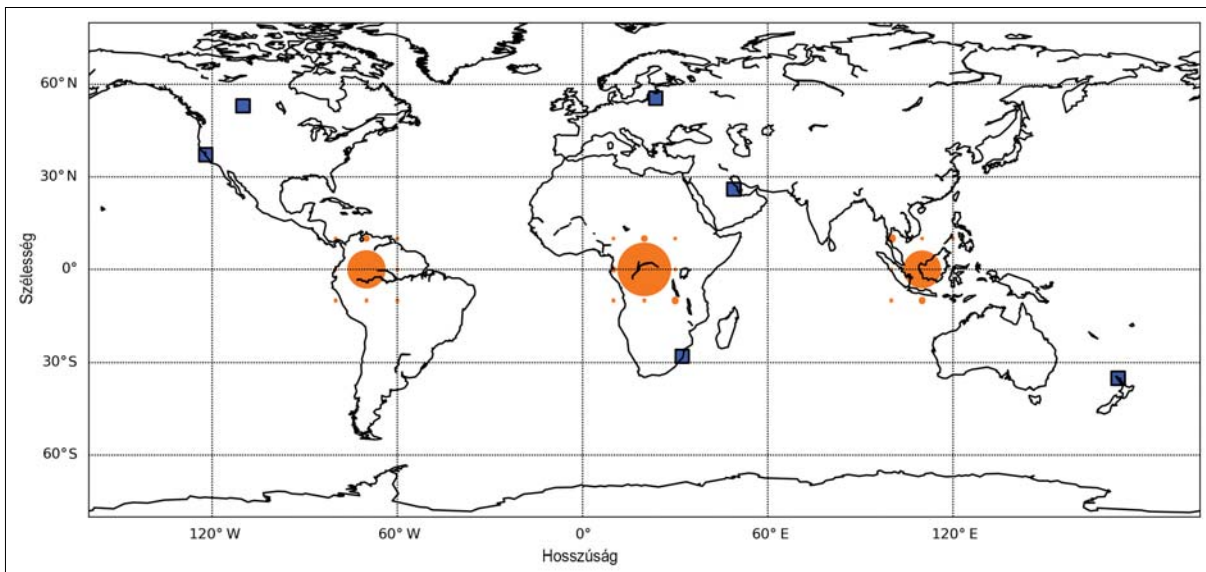
$$\begin{bmatrix} 1,00 & -0,12 & -0,73 \\ -0,12 & 1,00 & -0,23 \\ -0,73 & -0,23 & 1,00 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Megállapíthatjuk, hogy az első két teszt eredménye és statisztikai jellemzői között nincs szignifikáns eltérés. Ez azzal magyarázható, hogy a mágneses és az elektromos térkomponensek nem függetlenek egymástól, ezért az

elektromos méréseknek a mágneses mérésekkel való együttes alkalmazása nem növeli érdemben az adatrendszer információtartalmát.

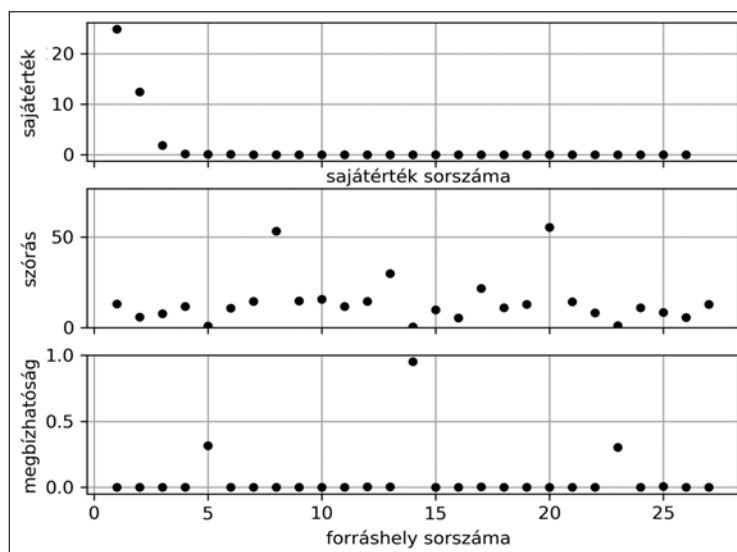
4.3. 3. teszt

Az inverzió gyakorlati alkalmazása során nem ismerjük a források pontos helyét. Ezért érdemes lényegesen több lehetséges forráshelyet feltételezni, mint amennyire számítottunk. Ennél a tesztnél az eredeti források környezetében 9 forráshellyel végezzük a számításokat. A  $3 \times 9$  forrás úgy van elhelyezve, hogy mindegyik eredeti forrás környezetében egy  $3 \times 3$  méretű rácsot veszünk fel 10 fokos rácsmé-



2. ábra | A 3. tesztrel meghatározott forrásintenzitások. A kék négyzetek jelölik az SR mérőállomásokat, a narancssárga körök a forrásokat. A körök méretei arányosak az intenzitásokkal

Figure 2 | Source intensities determined in Test 3. Blue squares represent the SR stations and orange circles the sources. The size of the sources are proportional to their intensities



3. ábra | A 3. teszthez tartozó SVD sajátértékek, az intenzitások szórásai és megbízhatóságai  
 Figure 3 | Eigenvalues of the SVD, the standard deviation of the intensities and their reliability in Test 3

rettel úgy, hogy a középső az eredeti forráspozícióval eszen egybe. Az inverziós algoritmus így 27 helyhez rendel intenzitásértékeket. A 2. ábrán feltüntetett intenzitásokból látszik, hogy elsősorban az eredeti forráshelyekhez tartozik magas intenzitásérték, a többi elhanyagolható. Ezek közel esnek az eredeti intenzitásértékekhez (2. táblázat).

A 27 forráshelyet sorba rendeztük, ezek közül az 5., 14. és a 23. sorszámú felel meg az eredeti forráshelynek. Az SVD sajátértékei, az inverzióval kapott intenzitások szórásai és megbízhatóságai láthatók a 3. ábrán. Az 5., 14. és 23. intenzitásadat megbízhatósága jónak tekinthető. Ezek éppen azok a pontok, amelyek megfelelnek az eredeti forráshelyeknek, a többi pont megbízhatósága 0-hoz közeli. Annak a két forrásintenzitásnak a megbízhatósága, amelyek a Föld ellentétes oldalára esnek, viszonylag kisebb. Ez összhangban van azzal, hogy ezek között az értékek között nagy a korreláció, amiről az 1. teszténél már volt szó. Tekintettel arra, hogy csak 3 sajátérték különbözik szignifikánsan 0-tól, a három legnagyobb intenzitás megbízhatóságát a  $\lambda_1/\lambda_3 = 5,537$  is jól jellemzi. Ez az érték közel esik az előző két teszt megfelelő értékéhez. Levonhatjuk a következtetést, hogy amennyiben azokon a helyeken is feltételezünk forrásokat, ahol valójában nincs forrás, annak nincs zavaró hatása az inverzióra. Az algoritmus ezekhez a helyekhez elhanyagolhatóan kis intenzitásértékeket rendel.

#### 4.4. 4. teszt

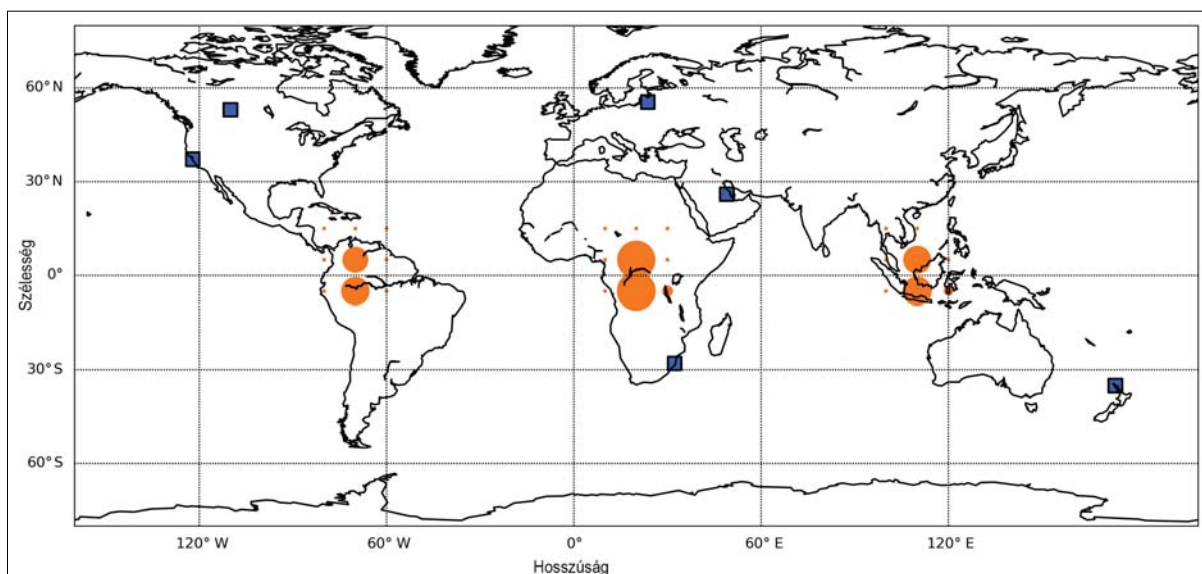
Ez a teszt csak abban különbözik a 3. tesztől, hogy a feltételezett forráshelyek 5 fokkal északabbra vannak. Ez azt jelenti, hogy a 3 eredeti forráshely két feltételezett forráshely közé esik. A valódi mérések esetén is ez a helyzet, mi-

vel valószínűtlen, hogy a források pont azon helyek valamelyikére esnek, amelyeket az inverzióval feltételezünk. A 4. ábrán látható, hogy az inverzió az intenzitásokat az eredeti forráshelyhez eső két közeli feltételezett forráshelyhez megosztva rendel hozzá, a távolabbi forráshelyekhez lényegesen kisebb intenzitás tartozik. A forrásintenzitások összege azon a három helyen, ahol a földi zivatarvevényesség koncentrálódik, közel esik az eredeti intenzitásokhoz (2. táblázat).

Ennél a teszténél 6 intenzitásérték megbízhatósága lényegesen jobb, mint a többi (5. ábra). A megfelelő forráshelyek sorszámai: 2., 5., 11., 14., 20. és 23. A 6 intenzitásértéknek az együttes megbízhatósága egy számmal is jellemezhető, mégpedig a  $\lambda_1/\lambda_6 = 52,684$  hányadosal. Ez természetesen rosszabb érték, mint amelyet a 3. teszténél láttunk, de egy elfogadható inverzióra utal.

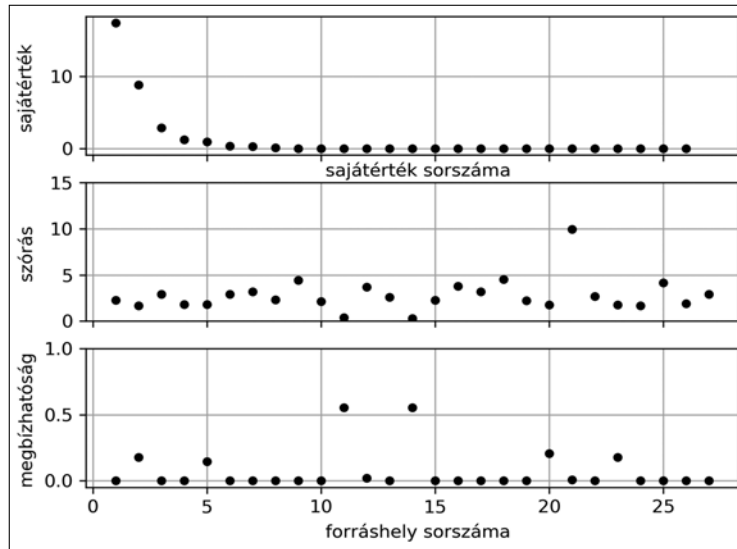
#### 4.5. 5. teszt

Ez a teszt a 4. teszt további elemzése ugyanazokkal a feltételezett forrásokkal. A szintetikus adatokat különböző mértékű zajokkal terheltük (4%, 6%, 8% és 10% relatív zajokkal), ezeknek az inverzióra való hatását vizsgáltuk. A 3. táblázatból látszik, hogy az inverzióval számított intenzitások értékére a nagyobb zajoknak nincs számottevő hatása. A három fő zivatarvevényesség környezetében a feltételezett forráshelyekhez tartozó intenzitásokat a 3. táblázatban összegeztük. A 6. ábrán láthatók a sajátértékek, az intenzitások szórásai és megbízhatósági értékei különböző relatív zajok esetén. A különböző zajoknak nincs nagy hatásuk ezekre a minőségjellemzőkre, csak azoknál a szórásértékeknél jelennek meg nagyobb különbségek, amelyek elenyészően kis intenzitásokhoz tartoznak. A megbízhatósági értékek mind a 4 különböző



4. ábra | A 4. tesztel meghatározott forrásintenzitások. A kék négyzetek jelölik az SR mérőállomásokat, a narancssárga körök a forrásokat. A körök méretei arányosak az intenzitásokkal

Figure 4 | Source intensities determined in Test 4. Blue squares represent the SR stations and orange circles the sources. The size of the sources are proportional to their intensities



5. ábra A 4. teszthez tartozó SVD sajátértékek, az intenzitások szórásai és megbízhatóságai

Figure 5 Eigenvalues of the SVD, the standard deviation of the intensities and their reliability in Test 4.

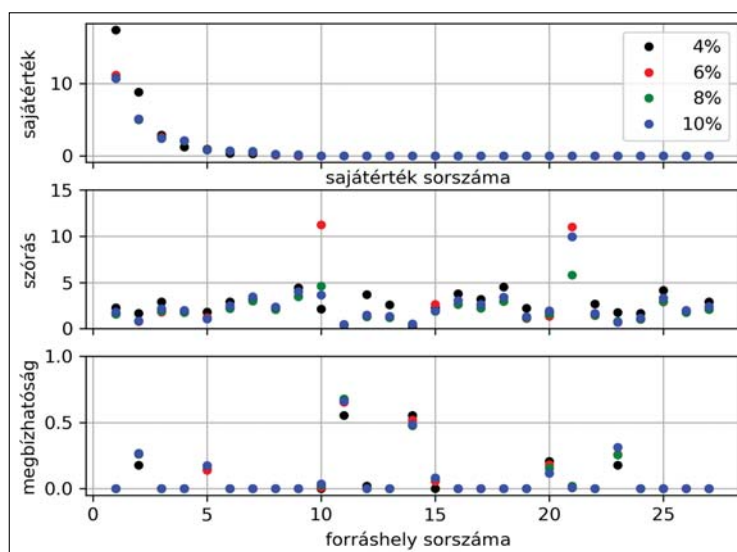
zajjal terhelt adatokkal elvégzett inverziónál ugyanazokat az intenzitásértékeket mutatják megbízhatónak. Ez a bemutatott minőségjellemzők stabilitását és az inverzió zajra való kis érzékenységét mutatja. Megjegyzendő, hogy en-

nek az is az oka, hogy az inverzió esetünkben túlhatározott, azaz az adatok száma lényegesen meghaladja a meghatározandó paraméterek számát.

3. táblázat Különböző generált zajjal terhelt szintetikus spektrumadatokból inverzióval számított forrásintenzitások ( $C^2 km^2/s$ ) az 5. teszténél

Table 3 The source intensities (in  $C^2 km^2/s$ ) used to generated synthetic data and the source intensities reconstructed by the inversion algorithm in Test 5 for different relative errors

Koordináták	Eredeti	4%	6%	8%	10%
0°, 70° NY	$3 \times 10^4$	$2,783 \times 10^4$	$2,655 \times 10^4$	$2,742 \times 10^4$	$2,748 \times 10^4$
0°, 20° K	$6 \times 10^4$	$5,967 \times 10^4$	$5,893 \times 10^4$	$5,792 \times 10^4$	$5,793 \times 10^4$
0°, 110° K	$3 \times 10^4$	$3,225 \times 10^4$	$3,106 \times 10^4$	$2,998 \times 10^4$	$2,909 \times 10^4$



6. ábra Az SVD sajátértékei, az intenzitások szórásai és megbízhatóságai az 5. teszténél különböző relatív hibákkal

Figure 6 Eigenvalues of the SVD, the standard deviation of intensities and their reliability in Test 5 for different relative errors

## 5. Összefoglalás

Ebben a tanulmányban a Schumann-rezonanciás mérések inverziójának egy lehetséges módját mutattuk be. Az inverzió egy iterációs lépése a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásán alapul, amely lehetővé teszi a kapott értékek megbízhatóságának a becslését. Ezért részletesen ismertettük az SVD módszeren alapuló fontosabb minőségjellemzőket. Ezeket szintetikus adatokon elvégzett inverziókon mutattuk be. Láthattuk, hogy az inverzió minőségére nincs káros hatással, ha olyan helyeken is feltételezünk forrást, ahol valójában nincsen. Ezekhez a helyekhez az inverzió egy elhanyagolhatóan kis intenzitásértéket rendel. Megmutattuk, hogy ha a mágneses adatokhoz hozzávesszük az elektromos adatokat, ez nem javítja érdemben az inverzió minőségét. Az inverziós algoritmus ismertett minőségjellemzői (a mért és a számított adatok illeszkedése, a legnagyobb és a legkisebb sajátértékek hányadosa, a paraméterek szórása, a korrelációs mátrix és a megbízhatósági paraméter) a jövőben hasznosak lehetnek a valódi mérések inverziójának az értelmezésekor.

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH K138824 sz. projektje támogatta.

### A tanulmány szerzői

Prácser Ernő, Bozóki Tamás

### Hivatkozások

- Chapman F. W., Jones D. L., Todd J. D. W., Chaliner R. A. (1966): Observations on the propagation constants of the Earth-ionosphere waveguide in the frequency band 8 c/s to 16c/s. *Radio Sci.*, 1/11, 1273–12872.
- Dobróka M., Gyulai Á., Ormos T., Csókás J., Dresen L. (1991): Joint inversion of seismic and geoelectric data recorded in an underground coal mine. *Geophysical Prospecting*, 39, 643–665.
- Dyrda M., Kulak A., Mlynarczyk J., Ostrowski M., Kubisz J., Michalec A., Nieckarz Z. (2014): Application of the Schumann resonance spectral decomposition in characterizing the main African thunderstorm center. *J. Geophys. Res. Atmos.*, 119/23, 13.338–13.349.
- Heckman S. J., Williams E., Boldi B. (1998): Total global lightning inferred for Schumann resonance measurements. *J. Geophys. Res. Atmos.*, 103/D24, 31775–31779.
- Jackson D. D. (1972): Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 28/2, 97–109. <https://doi.org/10.1111/j.1365/246X.1972.tb06115.x>.
- Jackson J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*. Second ed., Wiley, New York.
- Jupp D. L. B., Vozoff K. (1975): Stable iterative methods for the inversion of geophysical data. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 42, 957–976.
- Kirilov V. V., Kopeikin V. N., Mushtak V. K. (1997): ELF electromagnetic waves in the Earth-ionosphere waveguide channel. *Geomagnetism and Aeronomy*, 37/3, 341–345.
- Kulak A., Mlynarczyk J. (2013): ELF electromagnetic waves in the Earth-Ionosphere waveguide. *IEEE Trans. Antennas and Propagations*, 61/4.
- Lanczos C. (1961): *Linear Differential Operators*. D. Van Nostrand Company, Limited.

- Madden T., Thompson W (1965): Low-frequency electromagnetic oscillation of the earth-ionosphere cavity. *Rewievs of Geophysics*, 3/2, 211–254.
- Menke W. (1984): *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Academic Press, Inc.
- Mushtak V. C., Williams E. R (2002): ELF propagation parameters for uniform models of the Earth-ionosphere waveguide. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 64, 1989–2001.
- Nelson P. H. (1967): *Ionospheric Perturbations and Schumann Resonance Data*. Dissz. Massachusetts Institute of Technology.
- Nickolaenko A., Hayakawa M. (2014): *Schumann Resonance for Tyros*. Springer, Japan.
- Nickolaenko A. P. (1997): Modern aspects of Schumann resonance studies. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 59/7, 805–816.
- Pechony O., Price C. (2004): Schumann resonance parameters calculated with a partially uniform knee model on Earth, Venus, Mars, and Titan. *Radio Sci.*, 39. DOI: 10.1029/2004RS003056.
- Polk C. (1982): *Handbook of Atmospheric*. CRC Press, Boca Ration.
- Prácser E., Bozóki T. (2021): Schumann-rezonancia-mérések modellezése inhomogén hullámvezetőre. *Magyar Geofizika*, 62/2, 95–104.
- Prácser E., Bozóki T., Sători G., Takátsy J., Williams E., Guha A. (2020): Two approaches for modeling ELF wave propagation in the Earth-ionosphere cavity with day-night asymmetry. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1–1. ISSN: 1558-2221. DOI: 10.1109/TAP.2020.3044669.
- Prácser E., Bozóki T., Sători G., Williams E., Guha A., Yu H. (2019): Reconstruction of global lightning activity based on Schumann resonance measurements: Model description and synthetic tests. *Radio Sci.*, 54/3, 254–267.
- Price C. (2016): ELF electromagnetic waves from lightning: The Schumann resonances. *Atmosphere*, 7/9.
- Schumann W. O. (1952): Über die Dämpfung der elektromagnetischen Eigenschwingungen des Systems Erde-Luft-Ionosphäre. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 7/3–4, 250–252.
- Shvets A. (2001): A technique for reconstruction of global lightning distance profile from background Schumann resonance signal. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.*, 63/10, 1061–1074.
- Shvets A., Hayakawa M., Sekiguchi M., Ando Y. (2011): Reconstruction of the global lightning distribution from ELF electromagnetic background signals. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.*, 71/12, 1405–1412.
- Tarantola A. (2005): *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial és Applied Mathematics, Philadelphia.
- Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. (1977): *Solution of Ill-posed Problems*. Washington: Winston & Sons.
- Wait J. R. (1962): *Electromagnetic Waves in Stratified Media*. Pergamon Press, Ltd.
- Williams E., Bozóki T., Sători G., Price C., Steinbach P., Guha A., Liu Y., Beggan C. D., Neska M., Boldi R., Atkinson M. (2021): Evolution of global lightning in the transition from cold to warm phase preceding two super El Niño events. *J. Geophys. Res. Atmos.*, 126/3, e2020JD033526. <https://doi.org/10.1029/2020JD033526>.
- Williams E., Mareev E. (2014): Recent progress on the global electrical circuit. *Atmos. Res.*, 135–136, 208–227.