

# Pontszerű (kicsiny) oktupólus mágnes spinner magnetométeres mérésének numerikus szimulációja

MÁRTON P.

ELTE Geofizikai és Űrtudományi Tanszék, Budapest  
E-mail: archeomag@caesar.elte.hu

A jelen közlemény a címben szereplő kicsiny multipólus mágnes mérésre alkalmas spinner magnetométer működési elvének és a mérés kiértékelésének példával illusztrált tömör leírását tartalmazza.

## Márton, P.: Numerical simulation of the measurement of a small octupole magnet on a spinner magnetometer

It is shown in this note that the true parameters of small octupole magnets of standardized production might be determined by measurements on a spinner magnetometer designed for such magnets. However, the chief purpose of the paper is the development and short communication of the underlying theory.

### Bevezetés

Az alábbi gondolat kísérletben pontszerű oktupólus mágneset forgatunk állandó  $\omega = 500$  1/s szögsebességgel egy rögzített Helmholtz-konfigurációjú tekercs belsejében. A forgó mágnes a tekercsekben váltakozó elektromos feszültséget indukál, amelynek jellemzői a mágnes és a kísérleti elrendezés paramétereitől függenek. Ez az ún. spinner magnetométeres módszer általánosan elterjedt dipólus mágnesek mérésére, és alkalmazható kvadrupólus mágnesekre is (l. Melléklet).

Az oktupólus mágnes mágneses potenciálja,  $W_3$ :

$$W_3 = -\frac{\mu_0}{4\pi} m_3 \left( \mathbf{u}_3 \nabla \left( \mathbf{u}_2 \nabla \left( \mathbf{u}_1 \nabla \frac{1}{R} \right) \right) \right), \quad (1)$$
$$R = [X^2 + Y^2 + Z^2]^{1/2},$$

ahol  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (Vs/Am) a vákuum permeabilitása,  $m_3$  ( $\text{Am}^4$ ) a mágnes momentuma,  $R$  (m) a potenciálpont távolsága,  $\mathbf{u}_i$  ( $\sin\vartheta_i \cos\lambda_i, \sin\vartheta_i \sin\lambda_i, \cos\vartheta_i$ ) a mágnes tengelyirányú egységvektorai,  $(\vartheta_i, \lambda_i)$  pedig a pólusok polárkoordinátái ( $\vartheta_i$  a pólustávolság,  $\lambda_i$  az azimut,  $i = 1, 2, 3$ ). A tengelyek sorrendje közömbös.

A rögzített Helmholtz-tekercs tengelye a vízszintes  $X$  tengely, egyik tekercse  $X = +2$  cm-en, másik tengelye  $X = -2$  cm-en van, a tekercsek síkja az  $YZ$  síkkal párhuzamos, átmérője 8 cm, menetszáma 2000. A tekercsek általában sorba vannak kapcsolva (NH-kapcsolás), de szembe is kapcsolhatók (anti-Helmholtz- (AH-) kapcsolat) (l. Melléklet, 1. ábra). A forgó mágnes az origóban van.

Három „mérést” végzünk a mágnes három egymásra merőleges pozíciójában úgy, hogy az első méréskor ( $j = 1$ ) a mágneshez rögzített koordináta rendszer  $z'$  tengelye, második méréskor ( $j = 2$ )  $x'$  tengelye, míg harmadik méréskor ( $j = 3$ )  $y'$  tengelye a Helmholtz-tekercs  $Z$  tengelyével egybeeső forgástengely.

Az egyik Helmholtz-tekercs kimenetén mérhető feszültség,  $V$

$$V = d\Phi/dt, \quad (2)$$

ahol  $\Phi$  a forgó mágneses tér  $X$  irányú komponensének ( $B_X$ ) fluxusa a tekercs felületén át, vagyis

$$\Phi = \int_S B_X dS = \bar{B}_X S, \quad (3)$$

ahol  $B_X = -\partial W/\partial X$ ,  $\bar{B}_X$  pedig a  $X$  irányú tér átlaga az egyik Helmholtz-tekercs  $S = 2000 \cdot 0,04^2\pi$  (m<sup>2</sup>) nagyságú felületén.

A kísérlethez az 1. táblázatban megadott szögparaméterű,  $m_3 = 1E-03$  momentumú oktopólus mágneset választottuk.

$i/j$	(°)	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$	$\lambda$	139,3659	322,1682	213,5794
	$\vartheta$	55,8201	19,4255	54,6715
$j = 2$	$\lambda$	46,1998	102,2051	127,9662
	$\vartheta$	128,8886	74,7710	132,8203
$j = 3$	$\lambda$	-48,1763	15,5643	-49,6101
	$\vartheta$	57,4018	101,7702	116,8233

*Jelmagyarázat:*

A  $j = 2$  és  $j = 3$  esetekre vonatkozó értékek a  $\text{tg } \lambda_i^{(2)} = \cos \vartheta_i / (\sin \vartheta_i \sin \lambda_i)$ ,  $\cos \vartheta_i^{(2)} = \sin \vartheta_i \cos \lambda_i$ , illetve a  $\text{tg } \lambda_i^{(3)} = (\sin \vartheta_i \cos \lambda_i) / \cos \vartheta_i$  számíthatók ki a mágnes  $j = 1$  helyzetére megadottakból, ui.  $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i$ ,  $\vartheta_i^{(1)} = \vartheta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

## A feszültségjel

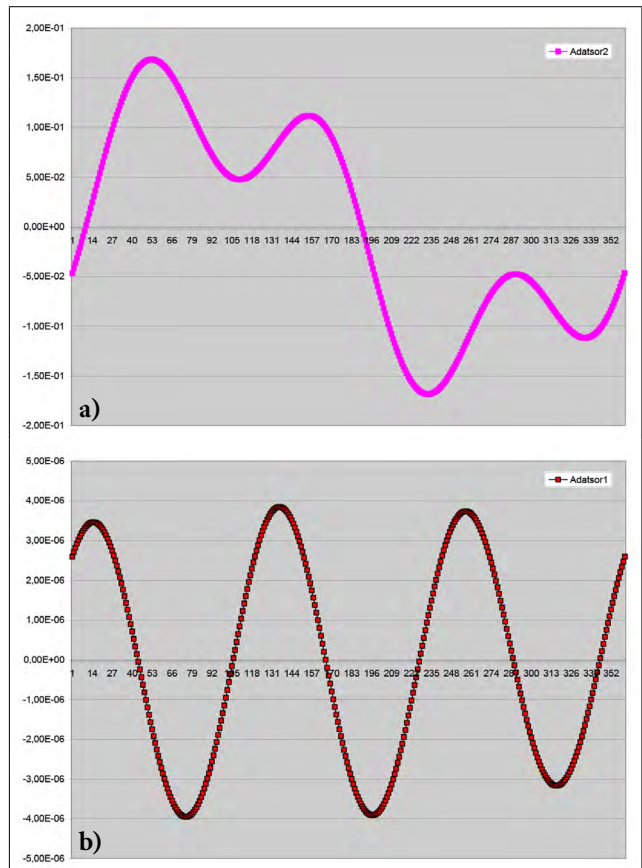
A Bevezetésben felvázolt egyenletek alapján ki lehet számítani egy forgó oktopólus mágnes által indukált feszültségjel időbeli változását, adott kísérleti elrendezés mellett. Ennek illusztrálására szolgál az 1. ábra, amely a ( $j = 1$ ) helyzetben forgó mágnes (1. táblázat) által keltett, periódikusan változó feszültségjel egy periódusának reprodukciója, (a) sorba-, illetve (b) szembekapcsolt felvevő tekercsek mellett.

Az 1. ábrán a  $j = 1$  helyzetben forgó minta (1. táblázat) által generált feszültségjel egy teljes periódusának képe látható sorbakapcsolt Helmholtz-tekercs (NH) (a), illetve szembekapcsolt Helmholtz-tekercs (AH) (b) kimenetén.

Az alaperiódus jelenléte triviális és ezen kívül a jel monokromatikusnak látszik a megfelelő  $2\pi/3\omega$  periódussal, amelynek amplitúdója nagyságrendekkel nagyobb az a) mint a b) ábrán.

A jelek harmonikus analízise szerint a feszültségjel 3 komponens szuperpozíciója, amelyek értékeit a 2. táblázatban mutatjuk.

Feltűnő, hogy az NH spektrumban az amplitúdó 5(!) nagyságrenddel kisebb  $k = 2$ -nél, mint  $k = 3$ -nál, viszont az AH spektrumban ez a különbség csak egy nagyságrend. Maguk az amplitúdók  $k = 2$ -nél mindkét spektrumban azonos rendűek és a fáziszögek tangensei közel azonosak.



**1. ábra** A Helmholtz-tekercs kimeneti feszültségjele ( $V$  volt) az elfordulás szögének ( $\lambda^\circ$ ) függvényében a mintamágnes első mérési helyzetében

**Figure 1** Output voltage signal ( $V$  volts) of the Helmholtz coil as a function of the rotation angle ( $\lambda^\circ$ ) in the first measurement position of the sample magnet

## A mérési eredmények (2. táblázat) a mágnes paramétereinek függvényében.

Előzetes megfontolás alapján, a legfontosabb adatok az NH spektrumból a  $k = 3$ , illetve  $k = 2$  sorokban vannak, de pontossági okból az AH spektrum  $k = 2$  sorának adatai sem nélkülözhetők.

Több-kevesebb fáradsággal megmutatható, hogy a Bevezetésben vázolt kísérleti elrendezés és sorbakapcsolt Helmholtz-tekercs esetén a feszültségjel  $k = 3$ , azaz  $3(\omega/2\pi)$  frekvenciájú komponensének amplitúdója ( $A_3$ ) és fáziszöge ( $La_3$ ) az első mérési helyzetben ( $j = 1$ ) az

$$A_3^{(1)} = Km_3 317553,925 \sin \vartheta_1^{(1)} \sin \vartheta_2^{(1)} \sin \vartheta_3^{(1)},$$

$$(\sin \vartheta_i \neq 0, i = 1, 2, 3), \quad (4a)$$

$$\text{tg } La_3^{(1)} = \text{tg}(\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)} + \lambda_3^{(1)}) \quad (4b)$$

egyenleteknek tesz eleget, azaz általában

$$A_3^{(j)} = Km_3 317553,925 \sin \vartheta_1^{(j)} \sin \vartheta_2^{(j)} \sin \vartheta_3^{(j)},$$

$$(\sin \vartheta_i \neq 0, i = 1, 2, 3), \quad (5a)$$

$$\text{tg } La_3^{(j)} = \text{tg}(\lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)} + \lambda_3^{(j)}), \quad (j = 1, 2, 3), \quad (5b)$$

ahol  $K = 1.00531E-03$  és  $m_3 = 1E-03$ .

$$\begin{array}{l} \text{2. táblázat} \\ \text{Table 2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } V_{NH}^{(1)}(\lambda) = A_{NHk}^{(1)} \sum_{k=1}^3 \sin(k\omega\lambda + La_{NHk}^{(1)}), \\ \text{b) } V_{AH}^{(1)}(\lambda) = A_{AHk}^{(1)} \sum_{k=1}^3 \sin(k\omega\lambda + La_{AHk}^{(1)}) \end{array} \right.$$

k	NH spektrum		AH spektrum	
	Amplitúdó (volt)	Fázis (°)	Amplitúdó (volt)	Fázis (°)
	1a. ábra		1b. ábra	
1	0,125837	1,78815	1,9155116E-07	163,1225
2	6,96779E-07	-78,64011	3,448091E-07	-78,7585 (+90)
3	0,0716647	-44,8865	3,6759456E-06	-44,8865 (+90)

Jelmagyarázat:

$A_{NHk}$  és  $A_{AHk}$ , illetve  $La_{NHk}$  és  $La_{AHk}$  a  $k(\omega/2\pi)$  frekvenciájú kimeneti feszültségkomponens amplitúdója, illetve fázisa ( $k = 1, 2, 3$ ).

A  $j = 2$  és  $j = 3$  mérési helyzetekre vonatkozó egyenletek felírása az 1. táblázat jelmagyarázatában megadott formulák alapján történik. Az így előálló egyenleteket,  $m_3$  kiküszöbölése végett  $A_3^{(1)}$ -gyel elosztjuk, és új változókat vezetünk be az

$$x = \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1}, \quad y = \frac{\cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_2}, \quad z = \frac{\cos \vartheta_3}{\sin \vartheta_3} \quad (6)$$

definíciókkal. Így a második mérési helyzetre ( $j = 2$ )

$$\left( \frac{A_3^{(2)}}{A_3^{(1)}} \right)^2 = (x^2 + \sin^2 \lambda_1)(y^2 + \sin^2 \lambda_2)(z^2 + \sin^2 \lambda_3), \quad (7a)$$

$$\operatorname{tg} La_3^{(2)} = \frac{x \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 + y \sin \lambda_1 \sin \lambda_3 + z \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xyz}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 - x y \sin \lambda_3 - x z \sin \lambda_2 - y z \sin \lambda_1}. \quad (7b)$$

míg a harmadik mérési helyzetre ( $j = 3$ ) a

$$\left( \frac{A_3^{(3)}}{A_3^{(1)}} \right)^2 = (x^2 + \cos^2 \lambda_1)(y^2 + \cos^2 \lambda_2)(z^2 + \cos^2 \lambda_3), \quad (8a)$$

$$\operatorname{tg} La_3^{(3)} = \frac{y z \cos \lambda_1 + x z \cos \lambda_2 + x y \cos \lambda_3 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos \lambda_3}{x y z - z \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 - y \cos \lambda_1 \cos \lambda_3 - x \cos \lambda_2 \cos \lambda_3} \quad (8b)$$

egyenleteket kapjuk.

A  $k = 2$ , azaz a  $2(\omega/2\pi)$  frekvenciájú komponensre vonatkozó egyenletek az első mérési helyzetre ( $j = 1$ )

$$\begin{aligned} A_2^{(1)} = K m_3 (-2 \cdot 0,75792) [ & \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos(\lambda_2 + \lambda_3) \\ & + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos(\lambda_1 + \lambda_3) \\ & + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \cos(\lambda_1 + \lambda_2)], \end{aligned} \quad (9)$$

illetve az új változókkal

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_3^{(1)}} = -4,7735E-06 \cdot [x \cos(\lambda_2 + \lambda_3) + y \cos(\lambda_1 + \lambda_3) + z \cos(\lambda_1 + \lambda_2)], \quad (10a)$$

$$\operatorname{tg} La_2^{(1)} = \frac{x \cos(\lambda_2 + \lambda_3) + y \cos(\lambda_1 + \lambda_3) + z \cos(\lambda_1 + \lambda_2)}{-x \sin(\lambda_2 + \lambda_3) + y \sin(\lambda_1 + \lambda_3) + z \sin(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (10b)$$

lesznek.

Szembekapcsolt tekercsek (AH) mellett a  $k = 3$ , azaz a  $3(\omega/2\pi)$  frekvenciájú komponens egyenletei az első mérési helyzetre ( $j = 1$ )

$$AH_3^{(1)} = K m_3 16,28952 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3, \quad (11a)$$

$$\operatorname{tg} La_{3AH}^{(1)} = \operatorname{tg}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \pi/4), \quad (11b)$$

és láthatóan

$$La_{3AH}^{(1)} = La_3^{(1)} + \pi/4, \quad (12)$$

míg a  $k = 2$ , azaz a  $2(\omega/2\pi)$  frekvenciájú komponens egyenletei szintén az első mérési helyzetre ( $j = 1$ )

$$\operatorname{tg} La_{2AH}^{(1)} = \frac{x \sin(\lambda_2 + \lambda_3) + y \sin(\lambda_1 + \lambda_3) + z \sin(\lambda_1 + \lambda_2)}{x \cos(\lambda_2 + \lambda_3) + y \cos(\lambda_1 + \lambda_3) + z \cos(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (13)$$

és

$$La_{2AH}^{(1)} = La_2^{(1)} + \pi/4. \quad (14)$$

A fenti felsorolás csak azokat az egyenleteket tartalmazza, amelyek a további tárgyalásban felhasználásra kerülnek.

## Az oktapólus mágnes paramétereinek kiszámítása

A mérések nyomán, mind az NH mind az AH kapcsolás mellett, mérési helyzetenként egy-egy „regisztrátum” keletkezik, amelyek harmónikus analízisével a felvevő Helmholtz tekercs kimenő feszültségjele három különböző frekvenciájú komponensre bontható. Utóbbiak amplitúdói ( $A$ ) és fázisainak ( $La$ ) tangensei képezik a közvetlen mérési eredményeket. A feladat elvégzéséhez minimálisan az NH

kapcsolás mellett mért  $(A_3^{(j)}, \text{tg}La_3^{(j)})$ ,  $(j = 1, 2, 3)$  és  $(A_2^{(1)}, \text{tg}La_2^{(1)})$  értékekre van szükség, de nem nélkülözhető az AH kapcsolás mellett mért sem.

Vesszük a (4b), (7a), (7b), (8a), (8b) és (10b) egyenleteket, kiszámítjuk és beírjuk a bal oldalon álló mennyiségek értékeit. Hat ismeretes transzcendentális egyenletrendszer kapunk, amelynek változói az  $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  paraméterek (az  $m_3$  momentum a szögparaméterek után a (4a) egyenlet alapján számítható ki). A legegyszerűbb esetben, ha a mérési eredmények hibátlanok, akkor az egyenletrendszert egy kezdeti megoldásrendszer feltételezésével linearizáljuk, és fokozatos közelítéssel megoldjuk. Ekkor a lineáris egyenletrendszer néhány iterációs lépés utáni stabil megoldása előállítja a keresett szögparaméterek pontos értékeit (1. táblázat,  $j = 1$  alatti két sora). A mintamágnes NH kapcsolás mellett mért  $A_2^{(1)}$  extrém kis értéke miatt az  $La_2^{(1)}$  szög néhány tized fokkal eltér az előre kiszámítható értéktől, ezért a fenti iterációban helyette az AH kapcsolás mellett mért  $(La_{2AH}^{(1)} - \pi/4)$  pontos értékkel számoltunk.

Ez az egyszerű megoldás ideálisan alkalmazható volna például adott paraméterű sorozatgyártott kis mágnesek paramétereinek mérésel történő meghatározására, amikor is a közelítő megoldást a névleges paraméterek szolgáltatnák.

A szögparaméterek meghatározása általában egy szélsőérték-feladat megoldására, az összes  $k = 2$  és  $k = 3$  elméleti és a mért érték (12 adat) különbsége négyzetének minimalizálására redukálható, amelynek tárgyalása azonban meghaladja ennek az írásnak a kereteit.

## Hivatkozás

Melléklet – Supplement

## A tanulmány szerzője

Márton Péter

## MELLÉKLET – SUPPLEMENT

### Case of the dipole

Under the experimental conditions described in the main article and with the Helmholtz coil in normal (serial) connection, a rotating small dipole magnet of moment  $m_1 = 1E-03$  (Am<sup>2</sup>),  $\lambda_1 = 139.3659^\circ$  and  $\vartheta_1 = 55.82^\circ$  would produce a monochromatic ( $\omega = 500$  1/s) output signal, in each of the three measurement positions, of voltage ( $V_1$ ) (volt):

$$V_1^{(j)} = 0.709875 m_1 \sin\vartheta_1^{(j)} \sin(\omega t + \Lambda_1^{(j)}), \quad (j = 1, 2, 3),$$

where

$$\Lambda_1^{(j)} = \lambda_1^{(j)} - 51.0308 (^\circ), \quad \lambda_1^{(1)} = \lambda_1 \text{ and } \vartheta_1^{(1)} = \vartheta_1.$$

At the completion of measurement, we have the values of  $V_1^{(j)}$  and  $\Lambda_1^{(j)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) by approximate harmonic analysis of the output signals (see the *Table* below).

$j$	$V_1^{(j)}$ (volts)	$\Lambda_1^{(j)}$ ( $^\circ$ )
1	5,872634E-04	88,3351
2	5,525438E-04	-4,8310
3	5,980475E-04	260,7929

Right after the first measurement we obtain  $\lambda_1$  and  $\lambda_1^{(2)}$  after the second. Then  $\vartheta_1$  can be computed because  $\text{tg}\lambda_1^{(2)} = \cos\vartheta_1 / (\sin\vartheta_1 \sin\lambda_1)$  and also  $m_1$  using  $V_1^{(1)}$  and  $\vartheta_1$ . The measurement in the third position ( $j = 3$ ) is not necessary but usually taken for greater precision.

### Case of the quadrupole

[Complete result measurement of an elementary quadrupole magnet on a spinner magnetometer – by P. Márton](#)