

Multiexponenciális kőzetfizikai modell a szeizmikus/akusztikus P- és S-hullám jósági tényező nyomásfüggésének leírására

TURAI VUROM B., DOBRÓKA M.[@]

Miskolci Egyetem, Geofizikai Intézeti Tanszék, Miskolc-Egyetemváros

[@]E-mail: dobroka@uni-miskolc.hu

Annak feltételezésére alapozva, hogy a kőzetanyagokban a P- és S-hullámok minőségi tényezőjének nyomásfüggését befolyásoló különféle belső mechanizmusok egyidejűleg is jelen lehetnek, új kvantitatív kőzetfizikai modelleket mutatunk be. Minden mechanizmust egy extenzív mennyiséggel (például a mikrorepedések száma, a pórustérfogat stb.) jellemzünk, amelynek nyomásfüggése exponenciális alakú. Az egyedi mechanizmusok számától függően kettős, hármas, illetve általánosan multi exponenciális modelleket vezetünk be, és megadtuk a jósági tényező nyomásfüggését leíró direkt modellezési összefüggéseket.

A kőzetfizikai modellek paramétereit inverziós eljárásokkal határozzuk meg laboratóriumban mért P- és S-hullám jósági tényező adatok felhasználásával. Azt találtuk, hogy a hagyományos legkisebb négyzetek módszere (LSQ) nem ad elfogadható eredményt abban az esetben, amikor három vagy több egyedi mechanizmus egyidejű jelenlétével kell számolni. Emiatt egy speciális nyomásspektrum-inverziós módszert dolgoztunk ki, amely pontos és stabil eredményt ad még akkor is, ha több tucat egyedi mechanizmust veszünk figyelembe.

Turai Vurom, B., Dobróka, M.: Multi-exponential petrophysical model for describing the pressure dependence of seismic/acoustic P and S wave quality factors

Based on the assumption that a variety of internal mechanisms influencing the pressure dependence of the P and S wave quality factor can simultaneously exist in the rock materials, new quantitative rock physical models are presented. Each mechanism is described by an extensive quantity (such as the number of microcracks, pore-volume, etc.) that exhibits an exponential form in its pressure dependence. Depending on the number of individual mechanisms, we introduced the Double-, Triple-, or even Multi-Exponential Models and provided the forward modeling formulae governing the pressure dependence of the quality factor.

The model parameters of the rock physical models are determined in inversion procedures using laboratory-measured P and S wave quality factor data. It was found that the common LSQ method can not give acceptable results in the case of three or more individual mechanisms that are simultaneously present. Because of this reason, a special pressure spectrum inversion method was developed, which gives accurate and stable results even in cases where tens of individual mechanisms are taken into account.

Beérkezett: 2025. november 23.; *elfogadva:* 2025. december 27.

1. Bevezetés

A szeizmikus/akusztikus P- és S-hullámok diszperziós jellemzőinek (sebesség és Q tényező) nyomásfüggése évtizedek óta intenzíven kutatott jelenség (Wyllie et al. 1958, Winkler 1985, Lucet, Zinszner 1992, Sengun et al. 2011, Ji et al. 2017, Prasad, Manghnani 1997). Toksöz és munkatársai (1979) száraz, vízzel, sóoldattal, metánnal telített, illetve fagyasztott mintákon vizsgálták a P- és

S-hullámok nyomás alatti terjedését és csillapítását. Megállapították, hogy a csillapítás nagyobb volt vízzel és sóoldattal telített minták esetében, mint metánnal telített vagy száraz mintákban, továbbá a csillapítás a nyomás növekedésével csökkent. E jelenség okát Johnston et al. (1979), Yu et al. (1993) és Best (1997) szerint a mikrorepedések nyomás hatására történő záródása magyarázza. A pórusok záródását is feltételezték a jelenség értelmezésére (Birch 1960).

A diszperziós jellemzők és a nyomás közötti nemlineáris kapcsolat leírására leggyakrabban exponenciális függvényeket alkalmaznak (Yu et al. 1993, Wang et al. 2005, Singh et al. 2006). Saul és Lumley (2013) kettős exponenciális közelítést használtak a porozitás nyomásfüggésének leírására konszolidálatlan homokminták esetében.

A póruszáródás mechanizmusára alapozva Dobróka és Somogyi-Molnár (2012) egyszeres exponenciális kőzetfizikai modellt vezettek be a hullámterjedés diszperziós jellemzőinek nyomás által vezérelt változásának magyarázatára. A modellt különböző kőzetmintákban alkalmazták a P- és S-hullámok minőségi tényezőjének nyomásfüggésére. Kézenfekvő feltételezés, hogy a pórusok vagy mikro-repedések záródása mellett további belső mechanizmusok is egyidejűleg jelen lehetnek a kőzetmintákban. Emiatt szükséges a fent említett egyszeres exponenciális modell általánosítása multiexponenciális modellekre.

2. A multiexponenciális kőzetfizikai modell

A Multiexponenciális Modellt (MEM) úgy definiáljuk, hogy feltételezzük: M számú, egymástól különböző belső mechanizmus egyidejűleg befolyásolja a jósági tényező nyomásfüggését. Az egyes mechanizmusokhoz egy-egy extenzív Ψ_i mennyiség tartozik. Feltesszük, hogy egy $d\sigma$ infinitezimális nyomásnövekedés az extenzív $d\Psi_i$ mennyiség változását olyan módon hozza létre, amely arányos az adott Ψ_i extenzív mennyiséggel és a $d\sigma$ nyomásváltozással:

$$d\Psi_i = -\lambda_i \Psi_i d\sigma \quad (i = 1, \dots, M), \quad (1)$$

ahol λ_i anyagállandó. Az egyenlet megoldásából adódik:

$$\Psi_i = \Psi_{0i} \exp(-\lambda_i \sigma), \quad (2)$$

ahol Ψ_{0i} az i -edik extenzív mennyiség értéke feszültségmentes állapotban ($\sigma = 0$). Az extenzív mennyiség megváltozása a jósági tényező megváltozását eredményezi. Ismét linearitást feltételezünk az infinitezimális változások között:

$$dQ_i = -\alpha_i d\Psi_i, \quad (3)$$

illetve (1) és (2) felhasználásával:

$$dQ_i = \alpha_i \lambda_i \Psi_{0i} \exp(-\lambda_i \sigma) d\sigma. \quad (4)$$

Minden $i = 1, \dots, M$ mechanizmus hozzájárul a jósági tényező változásához, ezért a (4) szerinti infinitezimális változások összege:

$$dQ = \sum_{i=1}^M dQ_i = \sum_{i=1}^M \alpha_i \lambda_i \Psi_{0i} e^{-\lambda_i \sigma} d\sigma. \quad (5)$$

Integrálás után:

$$Q(\sigma) = K - \sum_{i=1}^M \alpha_i \Psi_{0i} e^{-\lambda_i \sigma}, \quad (6)$$

ahol K integrálási konstans. Feszültségmentes állapotban a hullám jósági tényezője Q_0 , ezért

$$K = Q_0 + \sum_{i=1}^M \alpha_i \Psi_{0i}$$

alapján adódik:

$$Q = Q_0 + \sum_{i=1}^M \Delta Q_i [1 - \exp(-\lambda_i \sigma)], \quad (7)$$

ahol a $\Delta Q_i = \alpha_i \Psi_{0i}$ jelölést használtuk. Növekvő nyomás mellett a jósági tényező a Q_0 értékről

$$Q_m = Q_0 + \sum_{i=1}^M \Delta Q_i$$

a határérték felé tart. Ezzel a kapcsolattal (7) így is felírható:

$$Q = Q_m - \sum_{i=1}^M \Delta Q_i \exp(-\lambda_i \sigma), \quad (8)$$

vagy a $\sigma_{ci} = 1/\lambda_i$ karakterisztikus nyomások bevezetésével:

$$Q(\sigma) = Q_m - \sum_{i=1}^M \Delta Q_i \exp(-\sigma/\sigma_{ci}). \quad (9)$$

A (9) egyenlet adja a Multiexponenciális Modellt (MEM) nyomásfüggő minőségi tényezőjét, és egyben a direkt modellezési képlet az inverziós eljárásokban. A modell paraméterei az

$$\mathbf{m} = (Q_m, \Delta Q_1, \dots, \Delta Q_M, \sigma_{c1}, \dots, \sigma_{cM})$$

vektorban gyűjthetők össze; ezek az inverzió ismeretlenjei. A modell speciális esetei:

– *Egyszeres Exponenciális Modell* (SEM):

$$Q_{SEM} = Q_m - \Delta Q \exp(-\sigma/\sigma_c), \quad (10)$$

– *Kettős Exponenciális Modell* (DEM):

$$Q_{DEM} = Q_m - \Delta Q_1 \exp(-\sigma/\sigma_{c1}) - \Delta Q_2 \exp(-\sigma/\sigma_{c2}), \quad (11)$$

– *Hármas Exponenciális Modell* (TEM):

$$Q_{TEM} = Q_{DEM} - \Delta Q_3 \exp(-\sigma/\sigma_{c3}) \quad (12)$$

és így tovább.

A (9) egyenlet a Multiexponenciális kőzetfizikai Modell (MEM) keresett összefüggése, amely a nyomásfüggő szeizmikus/akusztikus Q faktort adja. A $Q_m, \Delta Q_i, \sigma_{ci}$ ($i = 1, \dots, M$) mennyiségek a modell paraméterei, melyek laboratóriumban mért jósági tényező adatok ismeretében inverziós eljárással meghatározhatók. Az inverziós elmélet terminológiájával élve: a (9) egyenlet a direkt probléma megoldását adja. Látható, hogy a (9) használata az inverz problémát jelentősen nemlineárisá teszi. Ez a belső mechanizmusok számának növekedésével egyre súlyosabb instabilitási problémákhoz vezet. Ezért szükségessé vált egy speciális algoritmus a *Nyomásspektrum Inverziós Módszer* (PSIM) kifejlesztése a MEM inverz problémájának megoldására. A nyomással exponenciálisan változó modellek (SRM, DEM, TEM és MEM) lehetséges inverziós módszereit a *Függelék* tárgyalja.

3. Laboratóriumi adatok

A minőségi tényező modelljét az irodalomban közölt mérési adatokon teszteltük. Közzétettek adatsorokat Berea homokkőre (Toksöz et al., 1979), Rotbach homokkőre

(Lucet és Zinszner, 1992) és szénmintákra (Yu et al., 1979). A jósági tényezők meghatározásához a spektrális arányok technikáját (Toksöz et al., 1979) alkalmazták. A méréseket változó nyomás mellett végezték. Jelen vizsgálatainkban a Yu et al. (1993) által felső-permi fekete szénmintákon nedves és száraz állapotban mért jósági tényező adatokat használjuk a kifejlesztett közetfizikai modellek tesztelésére.

4. Inverziós eredmények

Inverziós példáinkban a speciális *Nyomásspektrum Inverziós Módszert* (PSIM) alkalmazzuk a *Multiexponenciális Modell* (MEM) paramétereinek becslésére. A *csillapított legkisebb négyzetek módszerét* (DLSQ) az *Egyszeres Exponenciális Modell* (SRM) paramétereinek meghatározására használjuk. Ennél a modellenél a direkt probléma a (10) egyenletben szerepel, a modellparaméter-vektor $\mathbf{m} = (\Delta Q, \sigma_c, Q_m)$. Definiáltuk a *Kettős Exponenciális Modellt* (DEM), ahol az ismeretlen paraméterek $\mathbf{m} = (\Delta Q_1, \Delta Q_2, \sigma_{c1}, \sigma_{c2}, Q_m)$, valamint a *Hármas Exponenciális Modellt* (TEM), ahol $\mathbf{m} = (\Delta Q_1, \Delta Q_2, \Delta Q_3, \sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \sigma_{c3}, Q_m)$. A DEM vagy TEM direkt egyenleteivel megfogalmazott DLSQ inverziók erősen nemlineárisak; a belső mechanizmusok számának (M) növekedésével súlyos egyértelműségi és stabilitási (pontossági) problémák jelentkeznek. Emiatt összehasonlítjuk az eredményeket a PSIM módszerrel (lásd *Függelék*), ahol az ismeretlen modellparaméter-vektor $\mathbf{m} = (\Delta Q_1, \dots, \Delta Q_M, Q_m)$.

A közetfizikai modellek érvényességének vizsgálatához egytengelyű terhelés alatt mért P- és S-hullám minőségi tényező adatokat használtunk (Toksöz et al. 1979, Yu et al. 1979). A modellparamétereket a PSIM módszerrel becsültük a MEM direkt képletét alkalmazva.

Első vizsgálatunkban száraz szénmintán mért S-hullám jósági tényező (Q) adatokat használtunk (Yu et al. 1979). Az adatok $N = 15$ nyomásponton készültek a $[0, 40]$ MPa

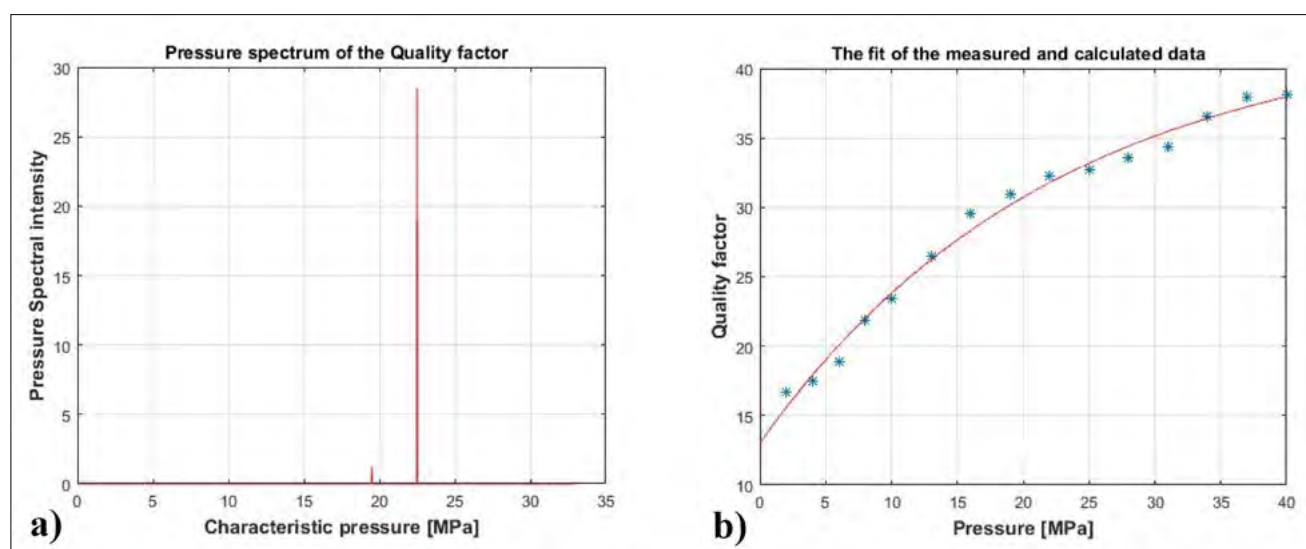
tartományban. Kiindulásként a DLSQ eljárást alkalmaztuk a SEM direkt modellel. A becsült paraméterek és becslési hibáik az *1. táblázatban* láthatók. Az átlagos relatív becslési hiba 7,38%, a korrelációs mátrix offdiagonális elemeinek RMS értéke $S = 0,901$ (Menke 1981).

1. táblázat | A DLSQ inverzió eredménye a SEM modell alkalmazásával
Table 1 | The result of DLSQ inversion using SEM model

	Paraméter	Becslési hiba	Relatív becslési hiba (%)
ΔQ	29,91	1,37	4,56
σ_c	22,35	2,95	13,19
Q_m	42,95	1,74	4,04

A kettős exponenciális modell (DEM) alkalmazásakor a DLSQ inverzió erősen korrelált paramétereket, és elfogadhatatlan becslési hibákat ad, ezért a DEM és a bonyolultabb modellek nem alkalmazhatók megbízhatóan hagyományos DLSQ inverzióban.

A PSIM alkalmazásakor túlhatározott problémát definiálunk $M = 11$ spektrális vonallal, amelyek 3 MPa-os intervallumok közepén helyezkednek el a teljes karakterisztikus nyomástartományon belül: $[0, 33]$ MPa. Kezdő modellként minden spektrális amplitúdó 10 volt. 50 PSIM iteráció után az *1a. ábrán* látható S-hullám karakterisztikus nyomásspektrumot kaptunk. Látható, hogy csak 2 spektrális vonal maradt (a 0,1-nél kisebb amplitúdókat elhanyagoltuk). A mért adatok és a becsült modellel számított értékek illeszkedését az *1b. ábra* mutatja. (A nagy nyomásokon vett határérték, amelyhez a minőségi tényező tart, $Q_m = 42,9$.) A karakterisztikus nyomások és a spektrális amplitúdók (becslési hibáikkal) a *2. táblázatban* szerepelnek. Az adattérben elfogadható eredményt kaptunk: $D = 3,10\%$. A modelltérben a relatív becslési hiba nagyságrenddel eltér a két spektrális vonal



1. ábra | a) Karakterisztikus nyomásspektrum ($0 \leq \sigma_c \leq 33$). b) A mért és számított adatok egyezése

Figure 1 | a) The characteristic pressure spectrum ($0 \leq \sigma_c \leq 33$). b) The fit of measurements and predictions

esetén. A modellkorrelációs mátrix átlagos szórása $S = 0,867$.

2. táblázat | Transzverzális hullám adatokon kapott PSIM inverziós eredmény ($M = 14$, száraz minta)

Table 2 | The PSIM inversion result of S wave quality factor data ($M = 14$, dry sample)

Karakterisztikus nyomás	Spektrális amplitúdó	Becslési hiba	Rel. becslési hiba (%)
19,5	1,24	5,26	424,2
22,5	28,54	5,61	19,6

A stabilitás bemutatására az inverziót eltérő parametrikációval megismételtük: a karakterisztikus nyomásokat a $[0, 39]$ MPa tartományba tettük, és a spektrális vonalak száma $M = 13$ (ismét 3 MPa-os intervallumok középeiben). A kezdő modell azonos volt. A részletek a 3. táblázatban láthatók; az amplitúdók és hibáik gyakorlatilag megegyeznek a korábbi eredménnyel.

3. táblázat | Transzverzális hullám adatokon kapott PSIM inverziós eredmény ($M = 13$, száraz minta)

Table 3 | The PSIM inversion result of S wave quality factor data ($M = 13$, dry sample)

Karakterisztikus nyomás	Spektrális amplitúdó	Becslési hiba	Rel. becslési hiba (%)
19,5	1,37	6,19	451,
22,5	28,36	6,69	21,8

A PSIM és DLSQ eredmények összevetése jelentős konzisztenciát mutat. A DLSQ által adott egyetlen „spektrális vonal” a PSIM megközelítésben két komponensre bomlik. A $\sigma_c = 22,35$ (MPa) a 2. táblázatban közel esik a 3. táblázatban szereplő két karakterisztikus nyomás súlyozott átlagához (a súlyok a relatív becslési hiba reciprocai), amely

(22,37 MPa). A két spektrális amplitúdó hasonló súlyozással számított átlaga 27,14; ez (a becslési hibaintervallumokat figyelembe véve) összhangban van a 2. táblázatbeli értékkel.

A következő vizsgálatunkban Yu et al. (1979) nedves szénmintán a $[0, 40]$ (MPa) nyomástartományban $N = 15$ ponton mért P-hullám Q adatait használtuk. A DLSQ inverzióval (előremodellezésre a SEM-et használva) kapott becslült paramétereket és azok hibáit a 4. táblázat mutatja. Az átlagos relatív becslési hiba 3,73%, a relatív adattávolság $D = 2,074\%$. A korrelációs mátrix elfogadható: $S = 0,549$.

4. táblázat | Nedves kőzetminta adatainak DLSQ inverziója SEM modell egyenlettel

Table 4 | DLSQ inversion using SEM (wet sample)

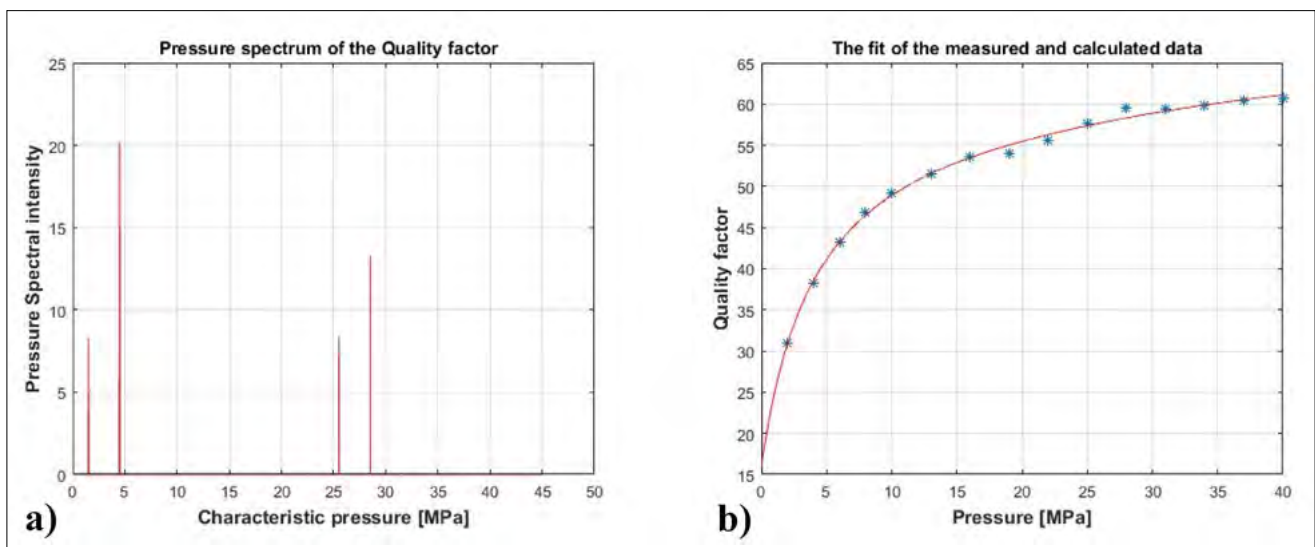
Paraméter	Becslési hiba	Rel. becslési hiba (%)
ΔQ	34,90	1,17
σ_c	9,31	0,73

DEM-et feltételezve a DLSQ inverzió a 5. táblázatban szereplő paramétereket és hibákat adja. A relatív adattávolság $D = 0,860\%$, az átlagos relatív becslési hiba 16,7%. A korreláció $S = 0,807$.

5. táblázat | Nedves kőzetminta adatainak DLSQ inverziója DEM modell egyenlettel

Table 5 | DLSQ inversion using DEM (wet sample)

Paraméter	Becslési hiba	Rel. becslési hiba (%)
ΔQ_1	23,03	3,15
ΔQ_2	23,66	2,41
σ_{c1}	3,17	0,90
σ_{c2}	20,94	7,62
Q_m	64,57	2,42



2. ábra | a) Karakterisztikus nyomásspektrum ($0 \leq \sigma_c \leq 45$). b) A mért és számított adatok egyezése
Figure 2 | a) The characteristic pressure spectrum ($0 \leq \sigma_c \leq 45$). b) The fit of measurements and predictions

A SEM-hez viszonyítva a DEM jobb illeszkedést ad az adattérben, de nagyobb hibákat és korrelációt a modellterében. Ez a tendencia TEM esetén tovább romlik: az átlagos becslési hiba 7712%, a paraméterek erősen korreláltak ($S = 0,974$). Ezek az eredmények azt mutatják, hogy a három vagy több mechanizmust tartalmazó modellek paraméterei nem határozhatók meg megbízhatóan a hagyományos DLSQ módszerrel. Ennek megoldására alkalmaztuk a MEM-hez kidolgozott PSIM eljárást.

A PSIM alkalmazásakor először marginálisan túlhatározott problémát definiálunk $M = 14$ spektrális vonallal, 3 MPa-os intervallumok közepeiben, a $[0, 42]$ MPa tartományban. Kezdő modell: amplitúdók = 10, 50 iteráció után a 2a. ábrán látható P-hullám Q spektrum adódott; csak 4 spektrális vonal maradt (a 0,1 alattiakat elhagytuk). A mért és számított adatok illeszkedése a 2b. ábrán látható. (A nagy nyomáson vett határérték $Q_m = 66,14$.) A karakterisztikus nyomások és amplitúdók a 6. táblázatban láthatók. Az adattérben és modellterében elfogadható eredményt kaptunk: $D = 0,898\%$, átlagos relatív hiba 76,5%, $S = 0,799$.

6. táblázat Nedves kőzetminta P-hullám jósági tényező adatainak PSIM inverziója MEM modell egyenlettel ($M = 14$)
Table 6 The PSIM inversion result of P wave quality factor data ($M = 14$, wet sample)

Karakterisztikus nyomás	Spektrális amplitúdó	Becslési hiba	Rel. becslési hiba (%)
1,5	8,31	5,61	67,5
4,5	20,17	3,11	15,5
25,5	8,35	11,09	133,9
28,5	12,81	11,31	88,2

A stabilitás vizsgálatához a PSIM inverziót más parametrizációval megismételtük: karakterisztikus nyomások $[0, 36]$ MPa, $M = 12$. A kezdő modell azonos. A részletek a 7. táblázatban; az amplitúdók és hibáik közel azonosak.

7. táblázat Nedves kőzetminta P-hullám jósági tényező adatainak PSIM inverziója MEM modell egyenlettel ($M = 12$)
Table 7 The PSIM inversion result of P-wave quality factor data ($M = 12$, wet sample)

Karakterisztikus nyomás (MPa)	Spektrális amplitúdó	Becslési hiba	Rel. becslési hiba (%)
1,5	8,31	5,61	67,5
4,5	20,16	3,11	15,4
25,5	8,15	10,90	133,9
28,5	13,11	10,99	83,8

A PSIM és DLSQ összevetés alapján az eredmények konzisztensnek tekinthetők. A DLSQ (DEM-mel) által adott két „spektrális vonal” a PSIM-ben két-két komponensre bomlik. A $\sigma_{c1} = 3,17$ közel esik a 6. táblázat első két karakterisztikus nyomásának (3,0 MPa) átlagához. A 6. táblázat első két amplitúdójának összege 28,47, ami (hiba-

intervallumon belül) egyezik az 5. táblázatbeli $\Delta Q_1 = 23,03$ értékkel. Hasonlóan, $\sigma_{c2} = 20,94$ a (hibán belül) egyezik a 6. táblázat utolsó két karakterisztikus nyomásának (27,0 MPa) átlagával, és az utolsó két amplitúdó összege (21,16) is összhangban van az 5. táblázatbeli $\Delta Q_2 = 23,66$ értékkel.

5. Következtetések

Bemutattunk egy új kvantitatív modellt az akusztikus P- és S-hullámok jósági tényezőjének nyomásfüggésére. A javasolt analitikus modell azon az elképzelésen alapul, hogy a nyomásfüggést befolyásoló különféle belső mechanizmusok egyidejűleg lehetnek jelen a kőzetben; mindegyikhez tartozik egy karakterisztikus nyomás, amely mentén a mechanizmus hat, és amelyen „lefut”. Petrofizikai modellünkben a jósági tényező nyomás érzékenységeit (λ_i) és ezek reciprokaként a $\sigma_i = 1/\lambda_i$ karakterisztikus nyomásokat vezettük be, mint a minőséget meghatározó új, mechanizmusonként értelmezett anyagállandókat. Egy adott (például i -edik) belső mechanizmushoz tartozó jósági tényező változás ugyanabban a formában írható le, mint a fizikában exponenciális folyamatként tárgyalt mennyiségek (töltés, hőmérséklet, mágneses térerősség stb.) – azzal a különbséggel, hogy az idő szerepét itt a nyomás veszi át. Ezzel az analógiával a (P- és S-hullám) jósági tényező nyomás növekedésével történő exponenciális csökkenését feszültségdominált exponenciális folyamatnak tekintettük; a mögöttes fizikai folyamatot (például mikrorepedések záródása) a σ_c karakterisztikus nyomás jellemzi. Az egyedi mechanizmusok számától függően bevezettük a kettős, hármas, illetve általános többexponenciális modelleket (SRM, DEM, TEM, ..., MEM), és megadtuk a jósági tényező nyomásfüggését leíró direkt modellezési képleteket.

A javasolt kőzetfizikai modellt laboratóriumi sebességadatokon teszteltük. A mért adatokat inverziós technikával dolgoztuk fel. Az inverzió pontosságát adattávolsággal és paraméterbecslési hibával jellemeztük. A DEM és TEM modellek esetén csillapított legkisebb négyzetek módszerét alkalmaztuk. Azt találtuk, hogy a DEM-alapú inverzió stabil és kellően pontos. Ezzel szemben a nyomásfüggő sebességmodellben figyelembe vett mechanizmusok számának növelésével az inverzió pontossága gyorsan romlik, ami elfogadhatatlan becslési hibához és erősen korrelált modellparaméterekhez vezet. Emiatt egy új, sorfejtésen alapuló inverziós algoritmust fejlesztettünk ki, amelyben a MEM direkt képletében szereplő ismeretlen ΔQ_i mennyiségeket a karakterisztikus nyomásspektrum spektrális vonalaiként értelmeztük. A spektrális amplitúdók (mint a sorfejtés együtthatói) számát úgy választottuk meg, hogy az inverzió túlhatározott maradjon.

Laboratóriumi adatokon végzett test vizsgálatok során azt találtuk, hogy a Nyomásspektrum Inverziós Módszer (PSIM) pontos és stabil eredményt ad még akkor is, ha több tucat ismeretlen (figyelembe vett egyedi mechanizmus) szerepel. Az eredményeket összevetettük a DEM és TEM esetén a DLSQ-val kapottakkal, és konzisztenciát találtunk: a DLSQ által adott egyes spektrális amplitúdók

a PSIM-ben egy vagy két vonalra „felbontva” jelennek meg, és a felbontott amplitúdók összege közel esik a DLSQ (DEM/TEM) által adott egyetlen értékhez. A PSIM eljárást mind P-, mind S-hullám Q -faktor-adatokra alkalmaztuk.

FÜGGELÉK

A Nyomásspektrum Inverziós Módszer (PSIM)

A direkt probléma jelentős nemlinearitása miatt a linearizált inverzió pontossága és stabilitása az ismeretlenek számának növelésével gyorsan romlik. Ezért hatékonyabb inverziós algoritmust kell definiálni a MEM használatakor (ha $M \geq 3$). Ehhez ki kell zárunk az inverzió ismeretlenjei közül az exponenciális függvényekben megjelenő modellparamétereket mint a nemlinearitás fő okait és a MEM direkt modellezését spektrális problémaként kell felfogni, ahol a jósági tényező a karakterisztikus nyomás spektrumaként adódik.

Kiindulásul írjuk fel a (9) egyenletet a k -adik mért nyomáspontra:

$$\Delta Q(\sigma_k) = \sum_{i=1}^M \Delta Q_i \exp(-\sigma_k / \sigma_{ci}),$$

ahol $\Delta Q(\sigma_k) = Q_m - Q(\sigma_k)$. Folytonos spektrum általános esetében feltételezhetjük a karakterisztikus nyomás (új jelöléssel τ) folytonos eloszlását és ezzel:

$$\Delta Q(\sigma_k) = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} w(\tau) e^{-\sigma_k / \tau} d\tau. \quad (F1)$$

ahol $w(\tau)$ a karakterisztikus nyomás spektrálsűrűségfüggvénye. A sorfejtésen alapuló inverziós eljárás (Dobróka, Völgyesi 2008, Dobróka et al. 2012a, Dobróka et al. 2012b) szerint:

$$w(\tau) = \sum_{p=1}^P B_p \Phi_p(\tau), \quad (F2)$$

ahol B_p a sorfejtési együtthatók, $\Phi_p(\tau)$, ($p = 1, \dots, Q$) pedig a megfelelően megválasztott bázisfüggvények, Q a sorfejtési együtthatók száma. (F1) és (F2) összevonásával:

$$\Delta Q(\sigma_k) = \Delta Q_k = \sum_{p=1}^P B_p \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \Phi_p(\tau) \exp\left(-\frac{\sigma_k}{\tau}\right) d\tau. \quad (F3)$$

Bevezetve a

$$G_{k,p} = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \Phi_p(\tau) \exp\left(-\frac{\sigma_k}{\tau}\right) d\tau \quad (F4)$$

jelölést, a k -adik számított adat:

$$\Delta Q_k^{(c)} = \sum_{p=1}^P B_p G_{kp},$$

illetve vektoralakban:

$$\Delta \mathbf{Q}^{(c)} = \mathbf{G} \mathbf{B}. \quad (F5)$$

Látható, hogy a mátrixelemek numerikusan számíthatók, és szerepet kapnak a Jacobi-mátrix meghatározásában. A mért és a számított adatok különbsége:

$$\mathbf{e} = \Delta \mathbf{Q}^{(m)} - \Delta \mathbf{Q}^{(c)} = \Delta \mathbf{Q}^{(m)} - \mathbf{G} \mathbf{B} \quad (F6)$$

lineáris az együtthatókban, melyek az inverziós eljárás ismeretlenjei. Az eltérésvektor euklideszi normájának minimalizálásával a normálegyenlet:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{B} = \mathbf{G}^T \mathbf{Q}^{(c)} \quad (F7)$$

adódik, amelynek megoldása:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{Q}^{(m)}. \quad (F8)$$

Ekkor az (F22) szerinti folytonos spektrálsűrűség bármely τ pontban kiszámítható, vagyis a spektrum *lineáris inverzióval* meghatározható.

A $\Phi_p(\tau)$ bázisfüggvények megválasztása a feladattól függ. Túlhatalozottság érdekében az ismeretlenek száma kisebb legyen, mint a mért adatoké: $Q < N$. Egy lehetséges bázis a cellánként állandó függvények halmaza:

$$\Phi_p(\tau) = \begin{cases} 1/2\Delta, & \text{ha } |\tau - \tau_p| \leq \Delta, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases} \quad (F9)$$

ahol Δ a τ_p pont körüli intervallum félhossza. Ebben az esetben a $[0, 2P\Delta]$ tartományon ortonormált függvényrendszer definiálunk. A Jacobi-mátrix elemei:

$$G_{k,p} = \frac{1}{2\Delta} \int_{\tau_p - \Delta}^{\tau_p + \Delta} \exp\left(-\frac{\sigma_k}{\tau}\right) d\tau. \quad (F10)$$

A vonalspektrum leírására fontos másik bázisválasztás:

$$\Phi_p(\tau) = \delta(\tau - \tau_p), \quad (F11)$$

ahol a Dirac-függvény helyen lokalizált. Ekkor a Jacobi-mátrix:

$$G_{k,p} = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \delta(\tau - \tau_p) \exp\left(-\frac{\sigma_k}{\tau}\right) d\tau = \exp\left(-\frac{\sigma_k}{\tau_p}\right) \quad (F12)$$

és (F23) alakja:

$$\Delta Q(\sigma_k) = \sum_{p=1}^P B_p \exp\left(-\frac{\sigma_k}{\tau_p}\right). \quad (F13)$$

Ez megmutatja, hogy a B_p együtthatók a τ_p helyen lévő spektrális vonal amplitúdói. Figyelembe véve, hogy

$$\Delta Q(\sigma) = Q_m - Q(\sigma),$$

(F13) alapján:

$$Q(\sigma_k) = Q_m - \sum_{p=1}^P B_p \exp\left(-\frac{\sigma_k}{\tau_p}\right), \quad (F14)$$

ami megegyezik a (9) egyenlettel:

$$Q(\sigma) = Q_m - \sum_{i=1}^M \Delta Q_i \exp\left(-\frac{\sigma}{\sigma_{ci}}\right). \quad (F15)$$

Így a MEM direkt képletének ΔQ_i ismeretlenjei spektrális amplitúdókként értelmezhetők, amelyek a $\tau_i = \sigma_{ci}$ helyeken lokalizáltak. Ebben a megközelítésben a sorfejtési együtthatók P száma megegyezik a nyomásfüggést

meghatározó mechanizmusok M számával, $P = M$. A Q_m figyelembevételével az ismeretlenek száma $M + 1$. A direkt formula lineáris minden ismeretlenjében, ezért új Jacobi-mátrix definiálható úgy, hogy:

$$Q^{(c)}(\sigma_k) = \sum_{i=1}^{Q+1} B_i J_{k,i}, \quad (\text{F16})$$

ahol

$$J_{k,i} = \begin{cases} -\exp(-\sigma_k / \tau_i), & \text{ha } i \leq P, \\ 1 & \text{különben,} \end{cases} \quad (\text{F17})$$

($k = 1, \dots, N$). Ekkor az első P ismeretlen sorfejtési együtt-hatóság, az utolsó pedig $B_{P+1} = Q_m$. Az új direkt formula a számított adatokat

$$\mathbf{Q}^{(c)} = \mathbb{J}\mathbf{B} \quad (\text{F18})$$

adja, amely alapján a mért–számított különbség:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Q}^{(c)} - \mathbb{J}\mathbf{B} \quad (\text{F19})$$

lineáris minden ismeretlenben. Az \mathbf{e} elérésvektor euklidészi normáját minimalizálva a Gauss-féle LSQ normál-egyenlet:

$$\mathbb{J}^T \mathbb{J} \mathbf{B} = \mathbb{J}^T \mathbf{Q}^{(m)}, \quad (\text{F20})$$

amelynek megoldása:

$$\mathbf{B} = (\mathbb{J}^T \mathbb{J})^{-1} \mathbb{J}^T \mathbf{Q}^{(m)}, \quad (\text{F21})$$

és tartalmazza a ΔQ_i ($i = 1, \dots, P$) spektrális amplitúdókat, valamint a Q_m határértéket. Az inverzió minősége jellemezhető a relatív adattávolsággal:

$$D = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{d_k^{(m)} - d_k^{(c)}}{d_k^{(c)}} \right)^2} \cdot 100 \text{ (\%)}, \quad (\text{F22})$$

és a modell-kovarianciamátrixszal:

$$\text{cov}^{(m)} = \mathbb{G}^{-g} \text{cov}^{(d)} (\mathbb{G}^{-g})^T, \quad (\text{F23})$$

ahol $\text{cov}^{(d)}$ az adatok kovarianciamátrixa és

$$\mathbb{G}^{-g} = (\mathbb{J}^T \mathbb{J})^{-1} \mathbb{J}^T \quad (\text{F24})$$

az általánosított inverz (Menke 1984). Az i -edik modell-paraméter becslési hibája:

$$\text{est_err}_i^{(m)} = \sqrt{\text{cov}_{ii}^{(m)}}. \quad (\text{F25})$$

A modell-korrelációmátrix

$$\text{corr}_{ij}^{(m)} = \frac{\text{cov}_{ij}^{(m)}}{\sqrt{\text{cov}_{ii}^{(m)} \text{cov}_{jj}^{(m)}}}, \quad (\text{F26})$$

és annak átlagos szórása

$$S = \sqrt{\frac{1}{J(J-1)} \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J (\text{corr}_{ij}^{(m)} - \delta_{ij})^2}. \quad (\text{F27})$$

A fenti Nyomásspektrum Inverziós Módszer lineáris eljárás lehetővé teszi a spektrális vonalak számának meghatározását olyan esetekben is, mikor az ismeretlenek száma több mint egy nagyságrenddel meghaladja nagyobbra, mint a standard linearizált, de nemlineáris LSQ vagy DLSQ algoritmusban szereplő ismeretlenek számát.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal támogatásával, a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott ADVANCED-152958 azonosítószámú projekt keretében valósult meg.

A tanulmány szerzői

Turainé Vurom Brigitta, Dobróka Mihály

Hivatkozások

- Best A. I. (1997): The effect of pressure on ultrasonic velocity and attenuation in near-surface sedimentary rocks. *Geophys. Prosp.*, 45, 345–364.
- Birch F. (1960): The velocity of compression waves in rocks to 10 kilobars, Part 1. *J. Geophys. Res.*, 65, 1083–1102.
- Brace W. F., Walsh J. B. (1964): A fracture criterion for brittle anisotropic rock. *J. Geophys. Res.*, 69, 3449–3456.
- Darot M., Reuschlé T. (2000): Acoustic wave velocity and permeability evolution during pressure cycles on a thermally cracked granite. *Int. J. of Rock Mech. Min. Sci.*, 37, 1019–1026.
- Dobróka M., Völgyesi L. (2008): Inversion reconstruction of gravity potential based on gravity gradients. *Math. Geosci.*, 40, 299–311. DOI: 10.1007/s11004-007-9139-z
- Dobróka M., Somogyi-Molnár J. (2012): New petrophysical model describing the pressure dependence of seismic velocity. *Acta Geophys.*, 60(2), 371–383. DOI: 10.2478/s11600-011-0079-0
- Dobróka M., Szegedi H., Vass P., Turai E. (2012a): Fourier transformation as an inverse problem – An improved algorithm. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 47(2), 185–196. DOI: 10.1556/AGEod.47.2012.2.7
- Dobróka M., Szabó N. P., Turai E. (2012b): Internal inversion of borehole data for petrophysical characterization of complex reservoirs. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 47(2), 172–184. DOI: 10.1556/AGEod.47.2012.2.6
- He T., Schmitt D. R. (2006): Velocity measurements of conglomerates and pressure sensitivity analysis of AVA response. SEG/ New Orleans 2006 Annual Meeting.
- Ji S. C., Wang Q., Xia B. (2003): *Handbook of Seismic Properties of Minerals, Rocks, Ores*. Polytechnic International Press, Montreal, Canada. DOI: 10.1016/j.tecto
- Ji S., Wang Q., Marcotte D., Salisbury M. H., Xu Z. (2007): P-wave velocities, anisotropy and hysteresis in ultrahigh-pressure metamorphic rocks as a function of confining pressure. *J. Geophys. Res.*, 112, B09204. DOI: 10.1029/2006JB004867
- Ji S., Shao T., Michibayashi K., Long C., Wang Q., Kondo Y., Zhao W., Wang H., Salisbury M. H. (2013): A new calibration of seismic velocities, anisotropy, fabrics and elastic moduli of amphibole-rich rocks. *J. Geophys. Res.*, 118, 4699–4728, DOI: 10.1002/jgrb.50352
- Jones L. A., Wang H. F. (1981): Ultrasonic velocities in Cretaceous shales from the Williston Basin. *Geophys.* 46(3), 288–297. DOI: 10.1190/1.1441199
- Khazanehdari J., McCann C. (2005): Acoustic and petrophysical relationships in low-shale sandstone reservoir rocks. *Geophys. Prosp.* 53, 447–461. DOI: 10.1111/j.1365-2478.2005.00460.x
- Menke W. (1984): *Geophysical Data Analysis – Discrete Inverse Theory*. Academic Press, Inc., London Ltd.

- Nur A., Simmons G. (1969): The effect of saturation on velocity in low porosity rocks. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 7, 183–193.
- Prasad M. (2002): Acoustic measurements in unconsolidated sands at low effective pressure and overpressure detection. *Geophysics*, 67(2), 405–412.
- Prasad M., Meissner R. (1992), Attenuation mechanisms in sands: Laboratory versus theoretical (Biot) data. *Geophys. J. Int.*, 710–719. DOI: 10.1190/1.1443284
- Saul M. J., Lumley D. E. (2013): A new velocity–pressure–compaction model for uncemented sediments. *Geophys. J. Int.*, 193, 905–913. DOI: 10.1093/gji/ggt005
- Sengun N., Altindag R., Demirdag S., Yavuz H. (2011): P-wave velocity and Schmidt rebound hardness value of rocks under uniaxial compressional loading. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 48, 693–696.
- Scholz C. H., Kranz R. (1974): Notes on dilatancy recovery. *J. Geophys. Res.*, 79(14), 2132–2135. DOI: 10.1029/JB079i014p02132
- Singh R., Rai C., Sondergeld C. (2006): Pressure dependence of elastic wave velocities in sandstones. SEG/New Orleans 2006 Annual Meeting.
- Somogyiné Molnár J., Kiss A., Dobróka M. (2014): Petrophysical models to describe the pressure dependence of acoustic wave propagation characteristics. *Acta Geod. Geophys.*, 50(3), 339–352.
- Stacey T. R. (1976): Seismic assessment of rock masses. In: *Symp. on Exploration for Rock Engineering*, Johannesburg, 2, 113–117.
- Toksöz M. N., Johnston D. H., Timur A. (1979): Attenuation of seismic waves in dry and saturated rocks, I. Laboratory measurements. *Geophysics*, 44(4), 681–690.
- Wyllie M. R. J., Gregory A. R., Gardner G. H. F. (1958): An experimental investigation of factors affecting elastic wave velocities in porous media. *Geophysics*, 23(3), 459–493.
- Yu G., Vozoff K., Durney D. W. (1993): The influence of confining pressure and water saturation on dynamic elastic properties of some Permian coals. *Geophysics*, 58(1), 30–38.
- Wepfer W. W., Christensen N. I. (1991): A seismic velocity–confining pressure relation, with applications. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 28(5), 451–456. DOI: 10.1016/0148-9062(91)90083-X
- Wang Q., Ji S. C., Salisbury M. H., Xia M. B., Pan B., Xu Z. Q. (2005): Shear wave properties and Poisson’s ratios of ultrahigh-pressure metamorphic rocks from the Dabie-Sulu orogenic belt: Implications for the crustal composition. *J. Geophys. Res.*, 110, B08208. DOI: 10.1029/2004JB003435