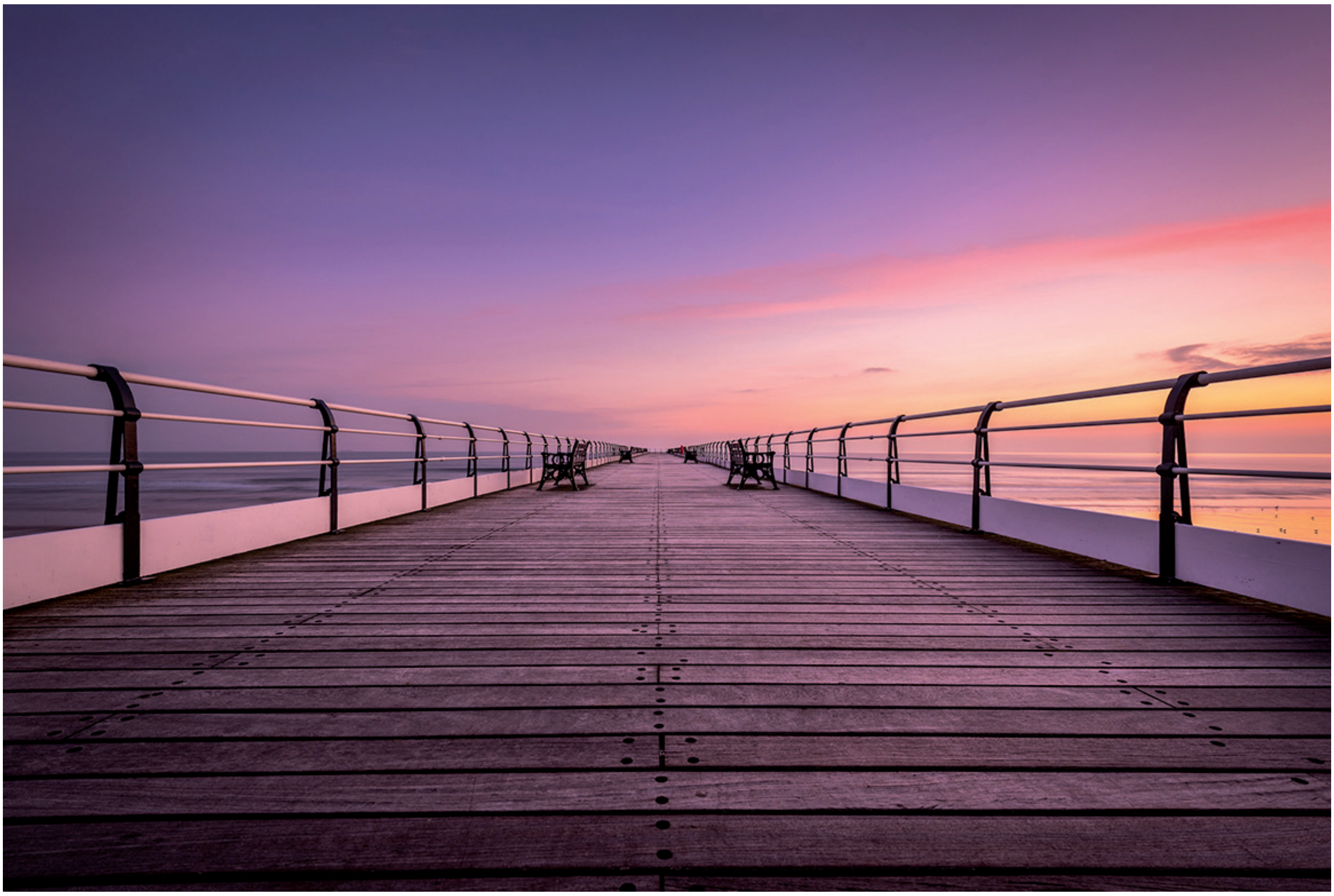
Dr. Simon Ilona

A végtelen Isten keresése



A szerző adjunktus a Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol matematikát oktat.

Véges lény a matematikus is, de évezredek óta foglalkozik a végtelen kérdésével. Az idők folyamán sok huzavona eredményeképpen kikristályosodott számos olyan fogalom, melyekkel már hatékonyan megválaszolhatunk sok, korábban ellentmondásosnak és érthetetlennek tűnő kérdést. (Például konvergencia, sorok összege, halmazok számossága, a különböző végtelen számosságok stb.) Miután már ilyen sokat tudunk róla, ne felejtsük el a szellemi tanulságokat leszűrni. A matematika végtelen fogalmai mutatnak-e egy magasabb valóságra és tanítanak-e minket Isten helyes keresésére?

A köznapi beszédben a végtelent olyan értelemben használjuk, hogy „nagyon sok", „nagyon nagy". (X.Y. végtelenül ostoba, Z. előtt végtelen lehetőségek állnak.) (Megjegyzem, hibás a „végtelen nagyság" kifejezés, mert azt sugallja, hogy egyazon mértéke van minden végtelen nagyságú dolognak, pedig dehogy. Olyan sokféle végtelen számosság van, hogy a legtöbben ezek mértékét fel sem foghatják.) Tehát *a megértésünkben a végtelen azt jelenti: elképesztően nagy. Csakhogy a "nagyon nagy" és a "végtelen" nagyon különböző tulajdonságú, mint látni fogjuk*.

Tekintsünk három példát a „nagyon nagy” és a „végtelen” különbözőségeiről a matematika köréből. (Megjegyzem, hitem szerint Isten sok szempontból végtelen, de nem azonos a matematikai végtelennel, hanem afölött álló, önmagát személyként bemutató lény. Ám a matematikai végtelen kapcsán leszűrt tanulság hatványozottan igaz lesz az isten-keresésre.) Ha valaki kihagyná a matekos részt (amit persze sajnálnék) az ugorjon a cikk végénél a „Tanulság” szakaszcímhez.

Egy sor összege

Egy nagyon sok tagú, ám véges összeg átzárójelezhető. Tehát (1−1)+(1−1)+(1−1)+(1−1)=1+(−1+1)+(−1+1)+(−1+1)−1. És ezen nem változtatna az sem, ha közben milliárd szám áll mindkét oldalon. De ha azt mondom, hogy folytassuk az eljárást mindkét oldalon a végtelenségig, azaz minden határon túl, akkor az 1−1+1−1+1−1+1−1+… összeget szeretném kiszámolni, így bajban lennék az átzárójelezéssel. Ugyanis ha a bal oldalit tekintem, (1−1)+(1−1)+(1−1)+(1−1)+… akkor a nullát adom össze végtelenszer, így 0-t kapok, míg ha a jobb oldalit folytatom minden határon túl, akkor az 1-hez adok nullákat, tehát 1-et kapok eredményül. Baj van ezzel, nem igaz a 0=1, és ezen balhéztak már a középkorban is néhány száz éven keresztül, mire kialakult a konvergencia precíz fogalma, és a kérdés megoldódott. (Ez a sor nem konvergens, de *Cesaro* összege 1/2.) Számunkra most elegendő annyit leszűrni, hogy *ami működik a nagyon nagy esetén, az nem feltétlenül működik a végtelen esetén, hiszen más tulajdonságok lehetnek érvényesek a végtelenben.*

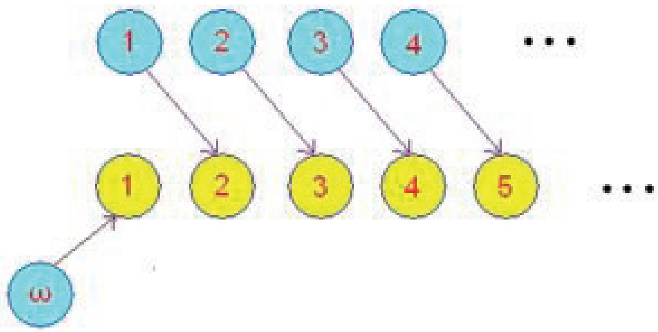
Hilbert szállodája

Hilbert szállodája egy képzeletbeli szálloda végtelen sok szobával (pontosabban szólva: legyen annyi szoba, ahány természetes szám, hiszen az ajtókon számok csüngenek). Kezdjük a klasszikus feladattal, de számunkra a hármas számú lesz nagyon tanulságos.

1.) Első éjszaka minden szoba foglalt. Ekkor érkezik még egy utazó. El tudjuk-e szállásolni?

Igen, habár minden szoba foglalt volt, el tudjuk szállásolni az újonnan érkezőt: mindenkit eggyel magasabb számú szobába költöztetünk, így felszabadítva az 1. számú szobát. Második éjszaka minden szoba foglalt és minden szobában ketten vannak. Viszont egyedül szeretnének lenni. Megoldható-e?

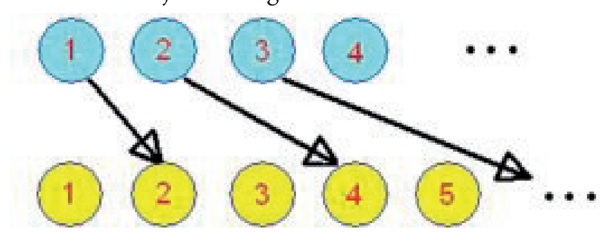
Igen, megoldható: Költöztessünk minden k-adik szobából egy embert a 2k-adikba, a másikat pedig a (2k−1)-edikbe. Így minden szobában egyedül lesznek és mindenkinek van szobája.



Ennek a feladatnak egy másik változata:

2.) Második éjszaka minden szoba foglalt, és ekkor végtelen sok új vendég érkezik. Megoldható-e? Egyébként most azt modelleztük, hogy két megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz uniója is megszámlálhatóan végtelen. Azaz:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$



Jöjjön előbb a bemelegítő a fontos harmadik feladathoz:

Harmadik éjszaka csak éjfél előtt lehet beköltözni, ha van szabad és tiszta szoba. A takarítónő rendes, és most minden szoba tiszta.

- Érkezik egy utazó 12:00 előtt 1/2 perccel. Elhelyezzük az 1. szobában.
- Megjön a 2. utazó 12:00 előtt 1/4 perccel. Övé lesz a 2. szoba.
- Majd megérkezik az n. utazó 12 előtt $1/2^n$ perccel. Őt az n. szobában szállásoljuk el.

- Így tovább folytatódik a játék a végtelenségig…
- Elérkezik az éjfél. Hány szabad szoba lesz 12:00-kor?

Érkezik egy utazó 12 előtt $\frac{1}{2}$ perccel... 1. szoba
megjön a 2. utazó 12 előtt $\frac{1}{4}$ perccel... 2. szoba
megjön a n. utazó 12 előtt $\frac{1}{2^n}$ perccel... n. szoba
$\vdots$
Hány szabad szoba lesz 12:00-kor?

Válasz: 0. Hiszen szépen sorban elfoglalják az 1,2,3… szobákat, azaz mindegyiket.
Megjegyzés: Ez így világos, hiszen az elérhető szobák száma csökkent. Na, de most jön a meglepetés…

3.) Harmadik éjszaka csak éjfél előtt lehet beköltözni, ha van szabad és tiszta szoba. A takarítónő most nem siette el a dolgokat, és így éjjeli 12:00 előtt 1 perccel tiszta lesz az 1–5 szoba.
12:00 előtt 1/2 perccel tiszta lesz a 6–10 szoba.
12:00 előtt 1/4 perccel tiszta lesz a 11–15 szoba.
12:00 előtt 1/2n perccel tiszták lesznek a (2n+1).-től a 2(n+1).-ig terjedő szobák.
Közben érkezik az első utazó 12:00 előtt 1 perccel. Elhelyezzük az 1. szobában.
Megjön a 2. utazó 12: 00 előtt 1/2 perccel. Irány a 2. szoba.
Hány szabad szoba lesz 12:00-kor?

Válasz: 0. *A szobák mind elfogynak, pedig az elérhető szobák száma egyre csak növekszik! A nagy* n*-ek esetén egyre csak gyarapodnak a szobáink, de amint* n *tart a végtelenbe, elfogynak. Kérem, álljon meg, és gondolja át, ez nagyon meglepő!*

Végtelen számosságok paradox, furcsa keveredése
A racionális és irracionális számok sűrűsége igen meglepő. Ezt most nem részletezném, de megemlítem, hogy racionális szám is annyi van, amennyi természetes szám, azaz megszámlálhatóan végtelen. Az irracionális számok halmaza kontinuum számosságú, azaz irracionális számból sokkal-sokkal több van, mint racionálisból.

Most jön a bökkenő. Az alábbi állítások bizonyítása egyszerű, ám mivel e cikk terjedelmeit meghaladná, ezért csak tényként közlöm:

- Minden két irracionális szám között van racionális szám.
- Minden két racionális szám között van irracionális szám.

Ezekből az állításokból a józan paraszti ésszel arra következtetnénk, hogy ugyanannyian vannak. Pedig nem: irracionálisból kontinuum sok van, jóval több, mint racionálisból, ami csak megszámlálhatóan végtelen sok. *Hát igen, a mindennapi tapasztalat csak gyenge mutatója annak, hogy mi a valós szám. Gyengén tükrözi, hogy mi történik végtelen számosságok esetén.*

Tanulság
A végtelen tulajdonságai nagyban különböznek attól, amit a véges tapasztalataink alapján gondolunk. Tehát körültekintésre, alázatra van szükség, amikor kiterjesztjük a véges tapasztalatainkat a végtelenre, és ez alapján a végtelenről állítunk valamit.

Óvatosságra van tehát szükség, amikor Istenről, a legteljesebb és legfelsőbb Végtelenről állítunk valamit. A fentiek alapján nem észszerű dolog pusztán a materiális tapasztalatainkra hagyatkoznunk az Isten keresésében és megismerésében. Van létjogosultsága megvizsgálni, hogy megjelent-e az emberi történelemben, és mit mondott magáról? Világunk tele van azzal a spirituális szeméttel, ami pusztán az ember spekulációja Istenről. A keresztények hite nem emberi spekuláción alapul.

Mázlisták vagyunk, mert nemcsak adatott egy ihletett iratgyűjteményünk (Bibliánk), de Isten emberi testben meg is látogatott minket itt a földön (Jézus személyében), ezzel kínálva egyedülálló megoldást a legnagyobb emberi problémára.

Isten végtelenségéről beszél a Biblia is.

*„De vajon lakhatik-e Isten a földön?
Hiszen az ég, sőt az egeknek egei
sem fogadhatnak magukba téged,
hát még ez a ház,
amelyet én építettem!”
1Kir 8,27*

„A Szentháromság misztériumába nem annyira gondolkodás és képzelet által juthatunk be, mint a szeretet által. A gondolkodás és a képzelet hamar eléri azt a határt, melyet átlépni képtelen. De a szeretet minden határon túlvisz, és megközelíthetjük őt, akit intellektusunk képtelen meglátni.”
(Thomas Merton)

Források:

- Matematika szakkönyvek.
- James Bradley, Russell Howell: Mathematics through the eyes of faith (HarperCollins, NewYork, 2011).
- http://plato.stanford.edu/entries/cusanus