

JÖRÖS BENCE

BALATONFÜRED HÁLÓELMÉLETE A KORA- ÉS A KÉSŐ-KÖZÉPKOR HATÁRÁN

1. Bevezetés

Balatonfüred régóta fontos szerepet játszik a Balaton-felvidék kulturális és történelmi örökségének megőrzésében. Az elmúlt évtizedekben azonban a város történelmi kutatásai is jelentősen fejlődtek, és a kutatók egyre több érdekes információra derítettek fényt Balatonfüred múltjával kapcsolatban. Az egyik legérdekesebb kutatási terület azonban az utóbbi időben a hálóelemzés, amely a középkori társadalmi kapcsolatok hálózatának elemzését jelenti. Balatonfüred kialakulása és történelmi fejlődése egyedinek mondható a Balaton-felvidéken. Amikor Balatonfüred középkori történetéről beszélünk, fontos kiemelnünk, hogy a középkori Füred területe nem egyezett meg a mai Balatonfüred területével. A mai Balatonfüred területén nem kevesebb, mint 5 középkori település osztozott egymással: Arács, Magyaré, Kék, Siske (vagy Papsoka) és természetesen Füred.¹ Ezek a települések közel estek a Balaton partjához és egyházi szempontból Tihany vonzáskörzetébe tartoztak. Ezen kívül több tényező is szerepet játszott abban, hogy végül ezek a települések összeolvadtak. Az oklevelek szerint a középkorban is szoros egységet alkottak ezek a települések. Hogy ez az egység mennyire volt szoros arra próbál ez a rövid tanulmány rávilágítani a hálóelemzés segítségével.

A hálóelemzés egy olyan kutatási módszer, amely lehetővé teszi a középkori társadalmi hálózatok struktúrájának működésének feltárását. Ez a módszer az utóbbi években egyre népszerűbbé vált a történészek és antropológusok körében, és ma már széles körben alkalmazzák a társadalomtudományokban. Balatonfüred középkori hálóelemzése azonban egyedülálló lehetőséget kínál a kutatóknak arra, hogy feltárják a település társadalmi kapcsolatait és hálózatát a középkori időkben. A hálóelemzés azonban lehetővé teszi, hogy jobban megértsük a középkori Balatonfüred társadalmi és kulturális hálózatának működését, valamint annak szerepét a Balaton-felvidék gazdasági és társadalmi fejlődésében. Ez az elemzés lehetővé teszi, hogy feltárjuk az itt élő emberek kapcsolatait, a kereskedelmi és ipari tevékenységeket, valamint a város társadalmi stratifikációját. Az eredmények segíthetnek nekünk abban, hogy mélyebb betekintést nyerjünk a középkori Balatonfüred különleges történelmi jelentőségére és a település

hozzájárulására a Balaton-felvidék gazdasági, kulturális és társadalmi fejlődéséhez.

Egyedülállóan fontos a középkori Balatonfüred hálóelemzése szempontjából az is, hogy a település mind a mai napig megőrizte eredeti városi karakterét és építészeti örökségét. A város ma is számos olyan történelmi műemlékkel rendelkezik, amelyek több mint 700 éves múltra tekintenek vissza.² Az elmúlt évtizedekben a városban végzett ásatások is nagyban hozzájárultak a középkori Balatonfüred történelmi kutatásaihoz. Az ásatások során számos érdekes leletet tártak fel, többek között kereskedelmi és ipari eszközöket, kerámiákat és ékszereket, amelyek segítenek a kutatóknak jobban megérteni a település középkori életét és kultúráját.

2. Rövid kutatástörténet

A Balaton-felvidék és így Balatonfüred középkori kutatástörténete kiemelkedő fontosságú a magyar történelem és régészet szempontjából. A régió kutatása már az 1800-as évek végén megkezdődött, azonban az első világháború és az azt követő évtizedek politikai helyzete miatt a kutatások szinte teljesen megszakadtak. Az újabb korszakban azonban a kutatások új lendületet kaptak, és számos fontos felfedezést tettek a régészek.

A régió régészeti lelőhelyeinek feltárása már több, mint százéves múltra tekint vissza, amikor Gyenesdiás és Keszthely térségében az első régészeti ásatásokat végezték el.³ Azóta számos ásatást végeztek a régióban, és ezek a kutatások nagymértékben hozzájárultak a középkori Balaton-felvidék történetének és régészeti örökségének jobb megértéséhez.

A középkori Balaton-felvidék történelmének kutatása számos területet érintett. A régészek az épített örökség és a napi élet relikviáit kutatják, és az írott forrásokat is tanulmányozzák. Az írott források között kiemelkedő szerepe van a Tihanyból származó oklevélnek, amely a Balaton-felvidék legkorábbi írott említése.⁴ A régészeti kutatások során felfedezett leletek és épületek arra utalnak, hogy a középkori Balaton-felvidék gazdag és virágzó régió volt. A leletek között találhatóak korabeli kerámiák, érmék és ékszerek.⁵ Az építészeti emlékek között pedig számos kápolna, kastély és vár található, amelyek nagy jelentőséggel bírnak a magyarországi építészeti örökség szempontjából.

Balatonfüred, a Balaton északi partjának egyik legismertebb és leglátogatottabb városa, a 19. században vált ismertté, mint fürdőhely.⁶ Azonban a település története jóval régebbre nyúlik vissza, egészen a középkorig. Balatonfüred középkori kutatástörténete a régió történeti és kulturális örökségének megismeréséhez és értelmezéséhez nyújt értékes adatokat.

A középkori Balatonfüred kutatása nagyobb figyelmet kapott az utóbbi évtizedekben, és számos régészeti ásatás és kutatás történt a városban és környékén. Az ásatások során feltárt leletek, épületek és dokumentumok segítségével lehetőség nyílt a település középkori történetének megismerésére és értelmezésére.⁷

A Balatonfüred és környéke középkori történetével kapcsolatos kutatások között kiemelkedő a Veszprém megyei régészeti feltárások és kutatások, amelyek az elmúlt évtizedekben nagy előrelépést hoztak a települések középkori történetének megismerésében. A kutatások során feltárták a középkori városfalak maradványait, a középkori kápolnák helyét és a középkori település életének számos más fontos aspektusát.

Az ásatások eredményei tovább növelik a Balaton-felvidék középkori történetének és kultúrájának megértését, és segítenek a város múltjának árnyaltabb megértésében. Az ásatások és kutatások mellett számos tudományos kutatás is foglalkozik a település középkori történetével, amelyek jelentőségek és értéküket csak tovább növelik.

Az egyik legfontosabb kutató a témában a történész és régész Koppány Tibor, aki évtizedek óta kutatja a Balaton-felvidék történetét és kultúráját. Koppány Tibor számos fontos publikációban osztotta meg kutatási eredményeit,⁸ és munkájának eredményeként ma már sokkal árnyaltabb képet kaphatunk a Balatonfüred és környékének középkori életéről és történelméről.

Az elmúlt évtizedekben számos kutató járult hozzá a balatonfüredi középkor történetének megértéséhez és feltárásához. Az egyik legjelentősebb személyiség ezen a területen Rainer Pál volt, aki a Balatonfüred és a balaton-felvidéki városok történetének és kultúrájának kutatásával foglalkozott.⁹ Rainer Pál a városi történelem, az építészettörténet és a műemlékvédelem szakértőjeként több fontos kutatást is végzett Balatonfüreden, amelyek a város történeti és építészeti örökségének jobb megértését szolgálták.

A másik jelentős kutató, aki hozzájárult a Balatonfüred kutatásához, Holl Imre és Parádi Nándor

volt, aki a Balaton-felvidék középkori építészeti örökségének feltárásával foglalkozott. Holl és Parádi kutatásai során számos középkori épületet tárt fel a Balaton-felvidéken, többek között a középkori templomokat és falvakat is.¹⁰ Ezek az ásatások nagyban hozzájárultak a Balaton-felvidék középkori történelmének és építészeti örökségének megértéséhez, és segítették a kutatókat abban, hogy jobban megismerjék a középkori Balatonfüred gazdasági, kulturális és társadalmi életét.

A középkori Balatonfüred kutatása még mindig folyamatban van, és remélhetőleg további kutatások és ásatások révén még több érdekességre derülhet fény a település középkori múltjával kapcsolatban. Az eddigiek alapján azonban egyértelműen kijelenthető, hogy Balatonfüred a középkorban is fontos szerepet játszott a régió életében, és a település története és kultúrája számos érdekességet rejt magában.

3. Hálóelméleti kutatások Magyarországon

A magyar tudományos körökben elsőként a szociológusok vették észre azokat a lehetőségeket, amelyeket a hálózatelemzés módszertana nyújtott az 1990-es évek legelején. A hálózattörténeti kutatások módszertanát a későbbiekben a pszichológusokon majd a történeti geográfusokon át a történészek is átvették.¹¹ Itthon az egyik legnagyobb hálózatelemzéssel foglalkozó konferencia volt a HUNNET konferenciasorozat, amely 2011-ben ült össze utoljára.¹² Sajnos olyan konferenciasorozat, ami kifejezetten magyarországi középkori történeti hálózatkutatást állítja központba, nálunk még nem létezik. Nagyon erős túlzás lenne viszont kijelenteni, hogy nem is foglalkoznak itthon a témával. A Magyar Tudományos Akadémia „Behálózva” – Az élettudományok és a hálózatelemzés kapcsolatáról címen konferenciát tartott 2019. október 29-én, amelyen három nagyobb korszak (őskor, Jagellókor, 18. századi Magyar Királyság) is szerepet kapott.¹³ László Gábor történész, levéltáros a történészek mai feladatai kapcsán a „Rég volt már az, testvér!” – Mérészi jegyzőkönyv-kísérlet egy egyházi közösség történetírásának hasznáról című előadásában a Salamander-konferencián arról értekezett, hogy a hálózatkutatás lehetővé teszi a nehezen számszerűsíthető adatok közlését.¹⁴ Szerencsés módon, egyre több hazai irodalom is keletkezik a témában. Kovács Bálint a 2012-es cikke „A hálózatelemzés alkalmazásáról a történettudomány-

ban” egy olyan általános, átfogó írás, amely a „hálózat” szó etimológiájával, az általános hálózat-elemzés fogalmaival, *Barabási-Albert László*¹⁵ és *Mark Granovetter* elméletének kifejtésével és az ábrázolás gyakorlati használatával foglalkozik, szinte alapirodalomként említhető meg a hazaiak közül.¹⁶ Mellette ki kell emelnem Markó Anita irodalomtörténész *„Hálózatelmélet és -elemzés az irodalomtörténeti kutatásokban”* című írását, amely elsősorban – az alcímnek megfelelően – a publikációs lehetőségekhez jutó értelmiségi hálózatával foglalkozik az 1473-1600 közötti periódusban. Írásában a hálózatelmélet alkalmazása mellett érdeklődik annak matematikai háttere iránt is, így kapva egy rendkívül sokszínű és alapos elemzést.¹⁷ Az utolsó munka, amely egyben egy előremutató példa is, egy egészen friss kiadvány, a *Magyar Gazdaságtörténeti Évkönyv 2020-as száma*. Ebben a kötetben *Kövér György* mélyrehatóan megírt bevezetője után számos hálózat-kutatási problémakörrel foglalkoznak az itt publikáló kutatók: a 20. századi városhálózatok, a vállalati hierarchiák és hálózatok ismertetésén túl a kereskedelmi-, és hitelkapcsolatok feltérképezése ugyanúgy részét képezi a kötetnek.¹⁸

De mit nevezünk hálózatelméletnek? Pontosan mire való és milyen fogalmakkal dolgozik? Miért jó alkalmazni a történettudományban? Az egyik definíciót még *Barabási Albert-László* adta meg: *„A hálózattudományi vizsgálatok célja megérteni a komplex rendszerek univerzális tulajdonságait és eredetüket, felfedni az ezen hálózatok fejlődését alakító törvényeket, és azt, hogy ezek a törvényszerűségek miként vannak hatással a hálózat viselkedésére”*.¹⁹ Tömörebb definíciót ad *Kovács Bálint*: *„Hálózatként olyan struktúrákat és rendszereket lehet megnevezni, amelyek matematikailag gráfon modellezhetők”*.²⁰ Valóban, a hálózatelmélettel foglalkozó tanulmányok rendszerint az elmélet tárgyalását visszavezetik a gráfok fogalmára. A gráfok alapfogalmainak ismertetésére már szó esett, itt csak annyit tennék hozzá, hogy a történészek a hatékony feldolgozásához elengedhetetlenül szükséges az informatikai infrastruktúra, amely mintegy vizualizálja is a gráfokat gyorsan és pontosan. E mellett nagyon fontos az adatok megfelelő kinyerése, nem mindegy ugyanis, hogy milyen típusú adatokkal dolgozunk, ez pedig nagyban függ a kérdés-feltételtől. Átemelve *Markó Anita* megfogalmazását: *„... a hálózat-kutatás módszertana alapvetően empirikus, gráfelméleti-matematikai, kvantitatív és informatikai”*.²¹ Hogy az adatvesztés elkerülhető

legyen és optimalizálni-automatizálni tudjuk a kinyerést, a dolgozatban az egy-egy személyhez tartozó adatok kis egységekben, úgynevezett rekordokban tárolódnak el.

A hálózat-elemzés alapvetően hasonló fogalmakkal dolgozik, mint a gráfelmélet, mégis néhány alapfogalmat a következőkben érdemes lehet definiálni. Általános fogalomnak számít a *kisvilág* fogalma, ami még *Karinthy Frigyes Láncszemek* című művében került elő. Felveti azt a kérdést, amelyre majd *Stanley Milgram* kísérel meg válaszolni: mennyi az az ismeretségi kapcsolat mennyisége, melyen keresztül egy-egy véletlenszerűen kiválasztott, teljesen idegen ember összeköthető egymással? *Milgram* számítása szerint átlagosan egy levél célba juttatásához (vagyis a két személy közötti kapcsolatfelvételhez) 5,5 ember volt szükséges 1967-ben.²² Ezek alapján tehát mikkel dolgozik a hálózat-elemzés? Csomópontokkal (vagy csúcspontokkal) és a közöttük levő kapcsolatokkal (élekkel). *Barabási Albert-László* és *Albert Réka* kutatása egy olyan modellt állított elő, melyben a következőt állították: a kapcsolatok nem véletlenszerűen alakulnak ki; a preferenciális kapcsolódási pontok alapján szerveződnek, tehát az új kapcsolatok (élek és a velük jövő pontok) a legnagyobb foksámú csúc felé navigálnak.²³ Ez a hálózatelmélet egyik alapmodelljével, az *Erdős – Rényi* modellel szembe megy, mert a kapcsolatokat nem statikusnak, hanem dinamikusnak feltételezi, vagyis folyamatosan változhatnak, míg az *Erdős – Rényi* modell azt állítja, hogy minden csúcsnak ugyanannyi éle van, vagy legalábbis erre az állapotr törekszik.²⁴ Ez hatással van magára a hálózatra is: ellenállóbbá teszi a rendszert, e mellett kialakulnak központi csúcsok, amelyek relatív nagy fokszámmal rendelkeznek a többi csúcshoz képest: ők a szilárd pont, akikhez igazodni lehet, a trendek irányítói.²⁵ A *gyengekapcsoltság* fogalom szerint léteznek nem sokáig működő, gyengébb „kölcsonhatások”, amelyek a legfontosabb pontokon találhatóak. Ezek biztosítják a hálózat folyamatos rugalmasságát. Ezek a kapcsolatok információáramlás szempontjából sokkal színesebbek lehetnek, mert általában külső, idegen vagy alig ismerős féltől származnak.

4. Balatonfüred a középkorban

Balatonfüred, a mai Magyarország egyik népszerű üdülővárosa, gazdag és érdekes történelmi múlt-ra tekint vissza. Balatonfüred középkori történeté-

vel már számos kutató foglalkozott, de Rainer Pál kutatásai alapján felfedezhetjük a település középkori időszakának fontos eseményeit és jellemzőit.

A középkorban Balatonfüred jelentős szerepet játszott a régióban. A település kezdetben a történelmi Veszprém vármegye részeként létezett, amely a királyi birtokokhoz tartozott. Rainer Pál kutatásai szerint a település neve az 1055-ös években bukkan fel először okiratokban, bár ekkor még csak a tihanyi alapítólevél hamis párja említi. Valószínűleg ez az oklevél a 14-15. századból származhat.²⁶ Az első hiteles oklevél tanúsága szerint Balatonfüred lakosai között torlókat, jobbágyokat, szőlőműveseket találunk összesen 9 háznépet. Az 1211. május 29-e után keletkezett oklevél azonban összeszámolja a Kéken és az Arácson található háznépek számát is. Az adatokból az tűnik ki, hogy Füred – főleg Arácshoz képest, ahol 23 háznép kapott helyet, vagyis több, mint kétszerese a füredinek – gyéren lakott település lehetett még az 1200-as évek elején.²⁷

A későbbi középkori Balatonfüred gazdag kereskedelmi és halászati tevékenységéről is híres volt. A Balaton közelsége lehetővé tette a halászat fejlődését, és a kereskedők számára kedvező helyzetet teremtett a kereskedelem szempontjából is. Balatonfüreden nem csak egyházi birtokosok voltak jelen. Tudjuk a ránk maradt forrásanyagból, hogy az Árpád-kor végén még léteztek a településen királyi birtokok is.²⁸ A település piacai és vásárai vonzották a környező területek lakosságát, és hozzájárultak a gazdasági virágzásához, bár ezekről az adásvételekről konkrét információk főleg a 15. századból maradtak meg adataink.²⁹

A középkori település társadalmi és gazdasági élete szorosan összefonódott a helyi földbirtokosokkal és az egyházzal. A település birtoklása számos nemesi család és egyházi intézmény között változott, sőt, egy időben több birtokosa is volt mind a szűkebben vett Balatonfüred falának, mind pedig a környező falvaknak, amik az idők folyamán beleolvadtak Füred területébe. Rainer Pál kutatásai rámutatnak, hogy a késő-középkorban mind a világi, mind az egyházi intézményeknek jelentős befolyásuk volt a városi életre és a település gazdasági tevékenységére.

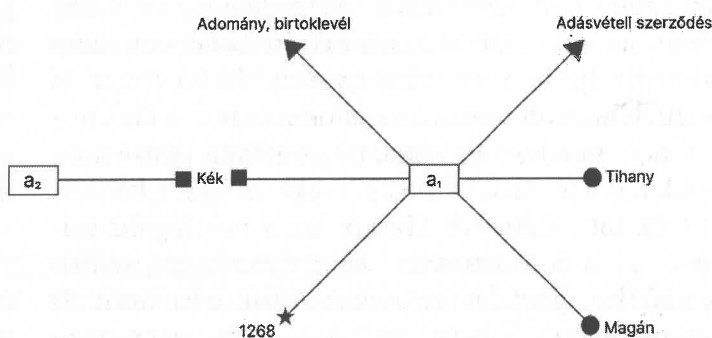
A középkori Balatonfüredet többször érintették a történelmi események és konfliktusok. A település az Árpád-korban és az Anjou-korban is fontos stratégiai helyzetben volt, már csak a Balaton-felvidéki elhelyezkedése miatt, hiszen az egyik kereskedelmi úton feküdt. Többször

váltott gazdát a különböző uralkodói családok és hatalmi központok között. Példának okáért Tihanyon és a királyi udvarnokokon kívül voltak birtokai a veszprémi egyháznak is a területen. 1326. május 1-jén a füredi Buda fia, János állt a veszprémi Szent Mihály-egyház szolgálatába, mint harcos nemes jobbágy, utódaik nevében is.³⁰ Így a veszprémi egyház egyfajta jogi védőburkot képzett az egyházi földesurak köré.

Balatonfüred középkori története tehát gazdag és sokrétű. Az időszakban a település gazdasági fejlődése, kereskedelmi tevékenysége és jelentősége a régióban kitűnt. Az egyházi intézmények jelenléte és a település szerepe a politikai konfliktusokban is kihívásokkal és változásokkal jártak.

5. Pontok és vonalak a papíron ...

Mint az előző fejezetben is látható, elsősorban a középkori írott forrásanyag áll rendelkezésünkre Balatonfüred kutatásában, így elsősorban az adatok innen származnak. Ezek elemzése több lépcsőben fog megtörténni. Első lépésként egy olyan matematikai eszközt fogok alkalmazni, amely már a nyugati kutatásoknál is hatásosan alkalmaztak: a hipergráfokkal dolgozó incidencia-mátrixot. A jelenlegi cikk 4 típusú adattal dolgozik: az egyes települések okleveles említései, az időpont (évre pontosan), amikor említésre kerültek, a településen levő birtokos személye, illetve magának a forrásnak a típusa lesz jelenleg számunkra fontos. Sajnos ahhoz túl kevés adat áll rendelkezésre, hogy személyekhez köthetően tudjunk módszeres elemzést adni, viszont, ha a rendelkezésünkre álló információt csoportosítjuk, jelen esetben közösségek (falvak) szerint, már érdekes elemzéseket lehet elvégezni. A hipergráfos modellnek egy további, behozhatatlan előnye abban rejlik, hogy egyetlen kapcsolat nem csak 2, hanem több csúcspontot is összeköthet, így egy-egy adott eseményt vagy rekordot (amelyet $a_1 \dots a_n$ jelölünk jelen esetben) tudunk egymással egyeztetni:



Az adatok felvétele után (amihez elég egy egyszerű excel táblázat is) a fentebb is említett matematikai eszközt fogom segítségül hívni, vagyis az incidencia mátrixot. Az incidencia mátrix egy olyan matematikai eszköz, amelyet a gráfelméletben is alkalmaznak a matematika számos területe közül. A gráfelmélet így a matematika ága, amely a gráfokat tanulmányozza, amelyek pontokból (csomópontok) és ezek közötti élekkel vannak meghatározva. Egyben egy olyan táblázat, amelyben a sorok a gráf csomópontjait, az oszlopok pedig a gráf éleit jelölik. Az egyes cellákban 1-esek vagy 0-k vannak, attól függően, hogy az adott csomópont része-e az adott élnek vagy sem. Például, ha egy gráf három csomóponttal rendelkezik és négy éle van, akkor az incidencia mátrix egy 3 sorból és 4 oszlopból álló táblázat lesz. Az incidencia mátrixban az i . sor j . oszlopában 1-es lesz, ha az i . csomópont része az j . élnek, ellenkező esetben 0.

Jelen esetben nagyon fontos tehát, hogy egy sorban minimum 3 db 1-es érték fog szerepelni mátrixunkban. Ha a birtokos személyét nem is lehet egyértelműen egy-egy oklevél alapján tisztázni, az azonban teljesen egyértelműnek kell lennie, hogy melyik évben milyen típusú oklevélben melyik település volt megemlítve. A következő típusokra osztottam fel az előforduló okleveleket: adománylevél/birtoklevél, ítéletlevél, adásvételi szerződés, gazdasági összeírás, határjárás. Természetesen ezen kívül is léteznek más oklevéltípusok, de ez esetben nem relevánsok ezek a típusok (pél-

dául igaz, hogy a tihanyi alapítólevélben szerepel Balatonfüred területe is, azonban ez az oklevél már kívül esik a jelenlegi téma időbeli határain.) A települések adottak: Füred, Siske (vagy Papsoka, ez egyenértékű Siske településsel, mert névváltozáson ment keresztül), Magyaré, Kék és Arács. Már most ki kell emelni: Magyaré nem képezi részét a jelenlegi elemzésnek, bár a mátrixba felvettük adatként a teljesség kedvéért. Ez azért van így, mert Magyaré településről nem ismerünk az adott korszakban okleveles említést. Az évszámok azokat a dátumokat jelölik, amikor bármelyik település meg volt jelölve egy-egy oklevélben, tekintet nélkül a kontextusra (jelen modellben egyenértékűnek számít, hogy valakit egy adott településről tanúként kértek fel egy perben vagy éppen az adott per alperese/felperese volt-e). Végül a birtokos személye az utolsó adattípus, ez alapvetően négy értéket vehet fel: Tihanyi Apátság, Veszprémi Káptalan, egyéb egyházi szervezet vagy világi tulajdonos. Ezeket az értékeket abban az esetben adjuk meg, ha az oklevél szövege egyértelműen tisztázza a birtokost, vagy egyértelműen következik az oklevél szövegéből egyéb esetben nem. Ebben a speciális esetben tehát előfordulhat, hogy ez az oszlop-csoport üresen marad, ha nincs róla információnk. Szintén kiemelendő, hogy irányítatlan gráffal dolgozunk a modellünkben, hiszen

A fentiek tükrében az incidencia-mátrix egy adott sora (ami a gráf egy csúcsa/csomópontja) a következő módon fog kinézni:

	VILLAGE			YEAR			LANDOWNER			TYPE		
	ARÁCS	KEK	...	1267	1268	...	TIHANY	VESZPRÉM	...	HATÁRJÁRÁS	ADOMÁNYLEVÉL	...
E	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0

A fenti E-vel jelölt gráfrepresentáns egy irányítatlan hipergráf³¹ képét rajzolja ki előttünk. A következő lépcsőfok az incidencia-mátrix kialakítása után ezt a mátrixot át kell konvertálnunk egy szomszédsági mátrixá, vagyis adjacenciamátrixá (E^A). Szomszédsági mátrixok olyan matematikai eszközök, amelyek a csúcsok közötti kapcsolatokat reprezentálják egy gráfban vagy hálózatban. Ezek a mátrixok segítenek meghatározni egy adott csúcs szomszédos csúcsait és azok közötti kapcsolatokat. A szomszédsági mátrix egy négyzetes mátrix, ahol a sorok és oszlopok a gráf csúcsait reprezentálják. Ha a gráfban van egy él a "i" csúcsból a "j" csúcsba, akkor a szomszédsági mátrix "i"-edik sorának

"j"-edik eleme 1 lesz, különben 0. Tehát a mátrix "i", "j" eleme azt mutatja, hogy van-e él a "i" és "j" csúcsok között.

Ezt úgy tehetjük meg, hogy magát a mátrixot megszorozzuk a transzponáltjával. Mátrix transzponálása pedig azt jelenti, hogy a mátrixot tükrözött módon megfordítjuk úgy, hogy a sorok oszloppokká, az oszlopok pedig sorokká válnak. A mátrix transzponálását a mátrix neve elé írt "T" index jelöli. Ha A egy $m \times n$ méretű mátrix, akkor A transzponáltja (jelölése: A^T) egy $n \times m$ méretű mátrix lesz. A mátrix transzponáltjával való szorzás azt jelenti, hogy az eredeti mátrixot a transzponáltjával szorozzuk össze. Az eredmény egy új mátrix lesz, ahol

az i -edik sor és j -edik oszlop eleme az eredeti mátrix i -edik sorának és transzponáltja j -edik oszlopának skaláris szorzata.

Matematikailag, ha A egy $m \times n$ méretű mátrix és B egy $n \times p$ méretű mátrix (ami egy másik mátrix transzponáltja), akkor a két mátrix szorzata ($A * B^T$) egy $m \times p$ méretű mátrix lesz, és az elemei a következőképpen számolhatók ki:

$$(A * B^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A_{ik} * B^T_{kj})$$

Vagyis amire szükségünk van végső soron:

$$E^A = E * E^T$$

A jelenlegi adatbázisban Balatonfüred későbbi adatait egy 28 rekordos adatbázisban tudtuk eltárolni, amelynek összesen (a fenti említésekkel együtt, mint okelvéltípusok, dátumok stb.) 47 attribútuma van. Ez természetesen bármikor bővíthető a későbbiekben.

A szomszédsági mátrix egy $28 * 28$ -as méretű adatbázis lesz, amelyben a 28 -as szám fogja jelölni a mátrix csúcsainak számát. A mátrix elemei a gráf éleinek jelenlétét vagy hiányát jelzik. Ha a gráf csúcsai között él van, akkor a megfelelő mátrix-elem értéke 1, különben 0.

A szomszédsági mátrix ezen kívül számos jellemzőt és tulajdonságot reprezentál a gráffal kapcsolatban. Ezek közül néhány fontos tulajdonság a szimmetria. Ha a gráf irányítatlan, akkor a szomszédsági mátrix szimmetrikus, azaz a mátrix elemei a diagonális felett és alatt tükrözik egymást. Ez azt jelenti, hogy ha az (i, j) elem értéke 1, akkor az (j, i) elem is 1. Ez ebben az esetben is így van. Ezen kívül fontos a kapcsolódás megállapítása. A szomszédsági mátrix alapján könnyen megállapítható, hogy a gráf összefüggő-e vagy sem. Ha az összes csúcs között létezik legalább egy út, akkor a mátrix minden eleme 1-es értékű, és a gráf összefüggő, mint jelenleg. Ellenkező esetben a gráf nem összefüggő.

A következő lépés az úgynevezett központi analízis, amely egy újabb sor matematikai műveletet jelent. A karibi támadásokat bemutató cikkben

Bonacich, Holdren és Johnston (2004) megmutatják, hogyan lehet a hálózati centralitás fogalmát az incidenciamátrix segítségével a szupradiadikus hálózatokra adaptálni, most is ezzel fogjuk folytatni.³² Az előző szakaszban bemutatott incidenciamátrix 10 település közötti kapcsolati hálót mutat be, összesen 28 évre leszűkítve azt az 1267-1349 közötti években. Ebben az esetben alapvetően azt kell figyelembe venni, hogy a kialakult mátrixban a sajátvektor-centralitást hogyan lehet alkalmazni a hipergráfokban. Nagyon leegyszerűsítve: a gráfok csomópontjai alapján osztunk ki centralitási-pontszámokat bizonyos tényezők mentén, ezeket vetjük össze egymással. A centralitási-pontszámok azt fogják reprezentálni, hogy egy-egy csúcspont vagy kapcsolat mennyire hangsúlyos a gráfon belül. Az ehhez szükséges képletek:

$$\begin{aligned} \text{a. } & EE^T = X \Lambda X^T \\ \text{b. } & E^T E = Y \Lambda^* Y^T \end{aligned}$$

Az itt bemutatott két sor a következőt jelenti: Az X és az Y azok a mátrixok, amik oszlopai reprezentálják a sajátvektorokat, a Λ és a Λ^* pedig a diagonális mátrixok a sajátvektorokkal együtt. Az E az eredeti mátrix, a E^T pedig ugyanazon mátrix transzponáltja.

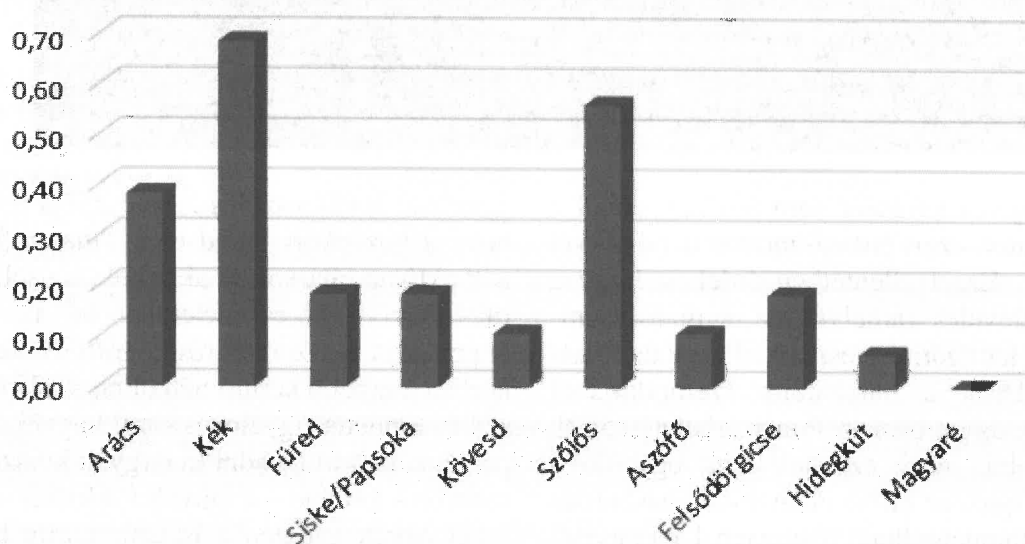
Az elemzések eredménye elsőre nem meglepő: ha csak az említések számát nézzük, akkor a megadott sajátvektor-értékek a következőek: [0.383, 0.685, 0.183, 0.183, 0.106, 0.560, 0.106, 0.183, 0.066, 0.000]. A legmagasabb érték Kék településhez köthető – amely 16 alkalommal került említésre az évek alatt. Azonban, ha olyan módon tekintünk az adott mátrixra, hogy nem csak a települések említéseinek számosságát vesszük alapul, hanem különböző tulajdonságaikat is bele vesszük, mint hogy milyen típusú említések voltak gyakoriak melyik évben és ezek melyik településhez köthetőek, akkor már nem Kék rekordjának van a legmagasabb pontszáma, hanem megelőzi őt Balatonszőlős. Ez annyit jelent, hogy Balatonszőlőshöz tartozó rekord a teljes kapcsolati háló szempontjából az egyik központi rekorddá válik. [0.290] Igaz, Kék nem marad el tőle messzire [0.241].

Gyakorlati értelemben ez azt jelenti, hogy a leghangsúlyosabb csomópont nagyobb befolyással rendelkezhet a hálózat működésére vagy struktúrájára. Például, ha a hálózat egy társadalmi kapcsolatokat modellező hálózat, akkor a leghangsúlyosabb csomópont lehet egy olyan személy, aki nagy hatással van más emberekre vagy akinek sok kap-

csolata van a hálózaton belül. Az sajátvektorok centralitási értékek alapján azonosíthatóak a fontos vagy befolyásos csomópontok és ezek az információk számos területen hasznosak lehetnek, például a társadalmi hálózatok elemzésében, információterjesztés modellezésében, vagy a vállalati hálózatokban a kulcsfontosságú szereplők azonosításában. A fenti konkrét példában Kék és Balatonszőlős ilyen rekordok. Érdekes azt is megjegyezni, hogy a mérőszámok pozitívan korrelálnak a megvizsgált településekkel. Ehhez elég csak az első,

szűkített mátrixot néznünk: Arács települést összesen 4-szer említik az évek alatt (jelenleg mindegy, hogy mikor), pontszáma is így alakul: [0.383]. Ezzel ellentétben például Hidegkút említése összesen egyetlen egyszer kerül említése, akkor sem más településsel összefüggésben: pontszáma [0.066] (még a 0.1-et sem éri el). Természetesen a legalacsonyabb pontszámmal Magyaré település rendelkezik 0 ponttal (nem történt ebben az időszakban említés a faluról), a legmagasabbal pedig Kék település.

Települések centralitási értékei

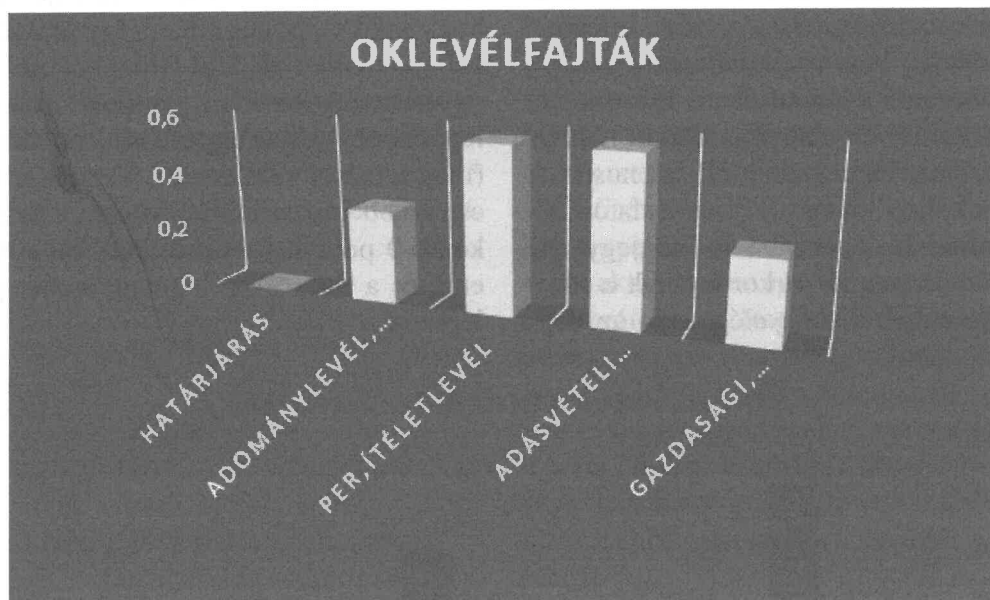


Érdekes lehet megfigyelni a gráf többi részgráfjának centralitási pontszámait is: bár maga a vespémi káptalan közvetett vagy közvetlen módon kevesebb alkalommal szerepel, mint a tihanyi apát-ság, mint szervezet, a hálózatban betöltött szerepe egy kicsivel magasabb, mint Tihanynak (Vesz-

prém: [0.612]; Tihany: [0.539]). Egyébként a gyakorlatban ez nem jelent jelentős különbséget; csupán pár darab említésről van szó. Mondhatjuk tehát, hogy ebben az esetben rendkívül fontos az abszolút mennyisége az említéseknek és a különbség elhanyagolható.



Végül nézzük meg az oklevelek típusára vonatkozó centralitási pontszámokat is.



Mivel határjárás leírására nem találtam ebből a korszakból adatot, ezért érthető módon 0-s értékkel fog szerepelni. Ezzel ellentétben érdekes, hogy a perek és ítéletlevelek (amelyek az elemzés szempontjából egy kategóriába esnek), illetve az adásvételi szerződések a hálózatunk szempontjából egyenlő fontossággal bírnak. Pontszámuk: [0.562]. Érdekes továbbá, hogy ezeknek nem egyenlő a számosságuk, igaz, az előző elemzéshez hasonlóan a különbség elhanyagolható (összesen 1 mennyiségi különbség van).

Fontos megjegyezni, hogy az sajátvektorok centralitási értékeinek mértékegysége nem szabványos, és a konkrét jelentésük a hálózat kontextusától függ. Az eredmények értelmezése és a leghangsúlyosabb csomópont azonosítása a hálózat jellegétől és céljától függően változhat. E mellett ezek viszonyszámok, amelyek egy-egy csomópont jelentőségét mutatják az adott hálózaton belül, így mindenképpen kontextusában érdemes csak vizsgálni ezeket az értékeket és az abszolút pontszámok meghatározásától élesen el kell különíteni ezeket a számokat, mint ahogy a fenti példák is mutatták.

6. Zárzó, összegzés

A fenti elemzés számos ponton tartogat érdekességeket. Egyrészt érdemes megfigyelni azokat a finom, de kimutatható különbségeket, amelyek jelen elemzés lényegét adják: vagyis azt, hogy például hogyan fordulhat elő az az eset, hogy Kék falu után Balatonszőlős jelentősége a legnagyobb a kapott mutatók alapján. Ezt több tényezővel is lehet ma-

gyarázni: Balatonszőlős lokalizációja lehetővé tette, hogy a középkori Füred és a Tihanyi-félsziget között aktívan rálásson és akár bele is szóljon a két terület közötti kereskedelembe, de az információ-áramlásnak is szerves része volt. Hiszen a középkorban nagyobb kerülő nélkül nem lehetett Balatonszőlős területét figyelmen kívül hagyni, mindenképpen át kellett itt haladni (a tárgyalt korszakban Balatonszőlős területe – a művelt földekkel a lakott területtel együtt egészen a Balaton-partig tartott). Más részről Balatonszőlősön számos, helyi mértékkel mérve nagy befolyással bíró világi birtokos család birtokolt földterületet, mint például a Faluvincsalád, így a település jelentősége a középkori Balatonfüred falvainak szempontjából sem elhanyagolható, hiszen gyakorlatilag szomszédos települések voltak.³³ Hasonlóan érdekes az a eredmény, hogy a veszprémi egyháznak legalább akkora jelentősége van a kapcsolatok szempontjából, mint a tihanyi apátság. Jelen hálózatelemzés ugyan nem vizsgálja, hogy a két birtokos viszonya milyen volt egymással, de egy következő lépésben érdemes lehet tovább vinni ezt a gondolatot, mert ennek jelentős hatása lehetett a kereskedelemre vagy éppen a jogi viták alakulására. Természetesen a magánbirtokosok szerepe is ekkor már kimutatható, de a későbbiekben ezek szerepe még jobban megnő, ahogyan egyre több és több információ marad ránk a különböző periratok és egyéb oklevelekben és egyre jobban reprezentálja magát a kis-, és nagybirtokosi társadalmi réteg is. Ez megjelenik az építészetben is, de fontos megjegyezni, hogy a jelenleg tárgyalt korszak még mindig forrásokban szegénynek tekinthető

a későbbi középkori korszakokhoz képest. Szintén érdemes lehet bevonni ezen a ponton a régészetet, mint tudományágat, mert szerencsés esetben a tárgyi emlékek alá tudják támasztani vagy pont cáfolni a feljebb feltüntetett számokat.

Ezeket az adatokat számos pontos lehet elemezni és alkalmazni egy jövőbeli kutatás során. A karib-tengeri támadásokat bemutató, SHAFIE – SCHOCH – MANS – HOFMAN – BRANDES írt publikációban például a támadási mintázatok azonosítására használták fel a rendelkezésre álló adatokat, de jelen esetben erre nem került sor. Ennek az az oka, hogy Balatonfüred történetében ezeket a módszereket úgy lenne érdemes majd alkalmazni,

hogy a következő korszakok peres ügyeit is görcső alá vesszük és együtt vizsgáljuk az adatokat; jelen cikkben csak egy rövid betekintést terveztem nyújtani a módszertan használatára.³⁴

Összességében elmondható, hogy a középkori Balatonfüred hálóelemzése fontos lehetőséget kínál a kutatóknak arra, hogy jobban megértsék a Balaton-felvidék gazdasági, kulturális és társadalmi fejlődését, valamint az itt élő emberek életét és kapcsolatait. A település egyedülálló történelmi jelentőséggel bír a térségben, és a hálóelemzés lehetővé teszi, hogy jobban megismerjük ezt az izgalmas múltat, és átfogóbb képet kapjunk a középkori Balatonfüred kultúrájáról és életéről.

Jegyzetek:

1. RAINER 1999, 139–140.
2. RAINER 1999, 150.
3. MÜLLER 2020, 71.
4. SZENTGYÖRGYI 2014, 26.
5. Lásd pl. HUSZÁR 1967, 89.
6. A témában számos publikáció született, például: KOVÁCS 2007.
7. Itt lehet említeni például a 2017-es ásatást, amely a középkori temetőt célozta. Ásatási tudósítás online: <https://www.veol.hu/kultura/2017/03/zsinagoga-balatonfured-regeszet-asatas-temeto>. Utolsó megtekintés: 2023. 06. 17.
8. Lásd például a Balaton-felvidéki román-kori templomokkal foglalkozó munkáját. KOPPÁNY 1963, 82–114.
9. RAINER 1999, 139–178.
10. Bár kutatásai nem konkrétan Füredhez köthetőek, nagyban segítettek abban a kutatóknak, hogy jobban megismerjék a balaton-felvidéki középkori falvak helyzetét. HOLL – PARÁDI 1983.
11. KÖVÉR 2020, 10.
12. <http://www.socialnetwork.hu/>. Utolsó megtekintés: 2021. 03. 12.
13. <http://tudasaramlas.btk.elte.hu/hu/esemenyek/323-behalozva-eletudomanyok-es-halozatok-konferencia>. Utolsó megtekintés: 2021. 03. 11.
14. <https://ujkor.hu/content/torteneti-kutatas-tarsadalmi-celja-es-haszna>. Utolsó megtekintés: 2021. 03. 11.
15. BARABÁSI 2011; BARABÁSI 2017.
16. KOVÁCS 2012, 187–204.
17. MARKÓ 2020.
18. KÖVÉR 2020, 9–19.
19. BARABÁSI, 2017, 42.
20. KOVÁCS 2012, 190.
21. MARKÓ 2018, 61.
22. MILGRAM 1967, 61–67.
23. A foksám adja meg, hogy egy adott csúcshoz mennyi él tartozik. BARABÁSI – ALBERT 1999, 509–512.
24. CSERMELY 2004, 10.
25. MARKÓ 2018, 61–62.
26. RAINER 1999, 140.
27. ERDÉLYI 1908a, 45; ERDÉLYI 1908b, 435–436, 446.
28. ERDÉLYI 1908a, 31, 294; Gyöngyös fia, Pasca füredi királyi udvarnok birtokait III. András Reynald apát úr kérésére a monostornak adta.
29. RAINER 1999, 145.
30. RAINER 1999, 141.
31. SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017, 53.
32. SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017, 58–59.
33. ERDÉLYI 1908b, 50. OKL.
34. SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017, 53.

Bibliográfia (és a rövidítések feloldása):

- BARABÁSI – ALBERT 1999: BARABÁSI Albert-László – ALBERT Réka: Emergence of Scaling in Random Networks. *Science* 286 (1999), 509–512.
- BARABÁSI 2011: BARABÁSI Albert-László: *Behálózva*. Budapest 2011.
- BARABÁSI 2017: BARABÁSI Albert-László: *A hálózatok tudománya*. Budapest 2017.
- CSERMELY 2004: CSERMELY Péter: *A rejtett hálózatok ereje: Hogyan stabilizálják a világot a gyenge kapcsolatok?* Budapest 2004.
- ERDÉLYI 1908a: ERDÉLYI László: *A Tihanyi Apátság önállósága 1055–1701. A Pannonhalmi Szent Benedek Rend Története 10/1*. Budapest 1908.
- ERDÉLYI 1908b: ERDÉLYI László: *A Tihanyi Apátság önállósága 1055–1701. A Pannonhalmi Szent Benedek Rend Története 10/2*. Budapest 1908.
- HOLL – PARÁDI 1982: HOLL Imre – PARÁDI Nándor: *Das mittelalterliche Dorf Sarvaly*. Budapest 1982.
- HUSZÁR 1967: HUSZÁR Lajos: Újabb Veszprém megyei éremleletek. *Veszprém Megyei Múzeumok Közleményei* 6. (1967), 89–112.
- KOPPÁNY: KOPPÁNY Tibor: A Balaton-felvidék román kori templomai. *A Veszprém Megyei Múzeumok Közleményei* 1. (1963), 82–114.
- KOVÁCS 2007: KOVÁCS Emőke: A 19. századi Balaton világa. Budapest 2007.
- KOVÁCS 2012: KOVÁCS Bálint: A hálózatelemzés alkalmazásáról a történettudományban. *Világtörténet* 3–4. (2012), 187–204.
- KÖVÉR 2020: KÖVÉR György: Előszó. *Magyar Gazdaságtörténeti évkönyv. Hálózat & hierarchia*. Budapest 2020.
- MARKÓ 2018: MARKÓ Anita: Hálózatok a 16–17. századi album amicorumokban: Az 1500 és 1700 közötti hungarika jellegű emlékkönyvbejegyzések hálózatelemzése az Inscriptiones Alborum Amicorum adatbázis alapján. *Digitális Bölcsészet* 1 (2018), 55–82.
- MARKÓ 2020: MARKÓ Anita: Hálózatelemzés és -elemzés az irodalomtörténeti kutatásokban. *Literatura* 46/3(2020), 312–334.
- MILGRAM 1967: MILGRAM, Stanley: The small world problem. *Psychological Today* 1 (1967), 61–67.
- MÜLLER 2020: MÜLLER Róbert: A Keszthely-kultúra ma. *Archaeologiai Értesítő* 145 (2020), 69–99.
- RAINER 1999: RAINER Pál: Középkor. In.: *Balatonfüred és Balatonarács története*. Veszprém 1999., 139–178.
- SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017: SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017: Hypergraph Representations: A Study of Carib Attacks on Colonial Forces (1509-1700). *Journal of Historical Network Research* 1 (2017) 52–70.
- SZENTGYÖRGYI 2014: SZENTGYÖRGYI Rudolf: *A tihanyi apátság alapítólevele 1*. Budapest 2014.

Angol nyelvű változat / English version:

BENCE JÖRÖS

NETWORK THEORY IN BALATONFÜRED AT THE BOUNDARY OF THE EARLY AND LATE MIDDLE AGES

1. Introduction

Balatonfüred has long played a significant role in preserving the cultural and historical heritage of the Balaton-Highlands. However, in recent decades, historical research in the town has greatly advanced, and scholars have uncovered increasingly interesting information about the past of Balatonfüred. One of the most interesting areas of research lately has been network analysis, which involves examining the network data of medieval social connections. The formation and historical development of the area are unique in the Balaton-Highlands. When discussing

the medieval history of town, it is important to note that the medieval Füred does not correspond to the territory called Balatonfüred nowadays. In the present, the area of Balatonfüred involves no fewer than five medieval settlements: Arács, Magyaré, Kék, Siske (or Papsoka), and, of course, Füred.¹ These settlements were located near the shores of Lake Balaton and fell within the ecclesiastical influence of Tihanyi. Several factors contributed to the eventual merging of these settlements. According to charters, these settlements formed a close unity during the medieval period. This short study aims to shed light on the degree of this unity through network analysis.

Network analysis is a research method that allows the examiner to discover the structure and functioning of medieval social networks. This method has gained popularity among historians and anthropologists in the past years and is now widely used in social sciences. This is why the medieval network analysis of Balatonfüred offers a unique opportunity for researchers to uncover the social connections and network of the town during medieval times. Network analysis enables a better understanding of the functioning of the social and cultural network of medieval Balatonfüred and its role in the economic and social development of the Balaton-Highlands. This analysis allows us to explore the relationships of the people living here, the commercial and industrial activities, as well as the social stratification of the town. The results can provide us with deeper insights into the special historical significance of medieval Balatonfüred and its contribution to the economic, cultural, and social development of the Balaton-Highlands.

An important aspect for the medieval network analysis of Balatonfüred is that the town has preserved its original urban character and architectural heritage to this day. The town still boasts numerous historical monuments that date back over 700 years.² In the past decades, excavations conducted in the town have greatly contributed to the historical research of medieval Balatonfüred. These excavations have revealed various interesting artefacts, including commercial and crafting tools, ceramics, and jewellery, which help researchers better understand the medieval life and culture of the town.

2. Main source

The historical research of the medieval Balaton-Highlands, and thus Balatonfüred, has an outstanding importance from the perspective of Hungarian history and archaeology. The study of the region had begun in the late 1800s, but due to the political situation during World War I and the following decades, these works were mostly interrupted. In the last few years, however, research has taken off and archaeologists have made a number of important discoveries.

The first excavations were carried out in the Gyenesdiás and Keszthely areas. Since then, numerous studies have been conducted in the region, greatly contributing to a better understanding of the

historical and archaeological heritage of the medieval Balaton-Highlands.³

The research covered various areas. Archaeologists study the built heritage and daily life, as well as analyse written sources. Among these sources, the charter originating from Tihany plays a prominent role as the earliest written mention of the Balaton-Highlands.⁴ Artefacts and structures uncovered through archaeological research indicate that the medieval Balaton-Highlands was a rich and prosperous region. Among the findings are ceramics, coins, and jewellery from the studied period.⁵ Built heritage includes numerous chapels, castles, and fortresses holds great significance in terms of Hungary's architectural heritage.

Balatonfüred, one of the most famous and visited cities on the northern shore of Lake Balaton, gained its importance as a spa town in the 19th century.⁶ However, the history of the settlement dates back much earlier, all the way to the medieval period. From the 2000s, the research of medieval Balatonfüred has received an increased attention, leading to numerous archaeological excavations and studies in the town and its surroundings.⁷

One of the most important researchers in the field belongs to the historian and archaeologist Tibor Koppány. He shared his results in numerous important publications, providing a well-polished picture of medieval life and history in Balatonfüred and its surroundings.⁸

In the 2000's many researchers have contributed to the understanding and exploration of the medieval history of Balatonfüred. One of the most significant figures in this area was Pál Rainer, who researched the history and culture of Balatonfüred and other cities in the Balaton-Highlands. As an expert in urban history, built heritage, and monument preservation, Rainer conducted several important studies in Balatonfüred.⁹ Another significant researchers are Imre Holl and Nándor Parádi, who focused on uncovering the built heritage of the Medieval Balaton-Highlands and had a major impact on modern research. Due to their work, Holl and Parádi discovered numerous medieval buildings in the territory, including medieval churches and villages.¹⁰

The study of medieval Balatonfüred is still ongoing, and hopefully, through further research and excavations, even more interesting discoveries will provide additional information of the medieval settlement. However, based on what we know so far, it is clear that Balatonfüred played an important role in the region's life during the Middle Ages.

3. Network theory research in Hungary

In Hungarian scientific studies, sociologists were the first to notice the opportunities offered by the methodology of network analysis in the early 1990s. Later on, psychologists, followed by historical geographers and historians, also adopted the methodology of historical network research.¹¹ One of the conferences dedicated to network analysis in Hungary was the HUNNET conference series, which last convention was held in 2011.¹² Unfortunately, there is currently no conference series specifically focusing on medieval historical network research in Hungary. However, it would be a strong exaggeration to claim that the topic is completely neglected here. Fortunately, an increasing number of studies are being conducted on the subject.

The Hungarian Academy of Sciences organized a conference under the name of "Behálózva" – *Az élettudományok és a hálózatelmélet kapcsolatáról* on October 29, 2019, which also addressed three major periods (prehistory, the Jagiellonian era, and the 18th-century Kingdom of Hungary).¹³ At this event, László Gábor, a historian and archivist, discussed the current tasks of historians in his presentation titled "Rég volt már az, testvér!" – *Mérségi jegyzőkönyv-kísérlet egy egyházi közösség történetírásának hasznáról* at the Salamander Conference.¹⁴ He argued with the possibility, that network analysis allows the communication of difficult-to-quantify data. Fortunately, an increasing amount of Hungarian literatures being produced on the subject.

Bálint Kovács's article from 2012, titled "A hálózatelmélet alkalmazásáról a történettudományban" has to be mentioned in this section, which provides a comprehensive overview of the concept of 'network,' the fundamentals of network analysis, and the theories of László Barabási-Albert¹⁵ and Mark Granovetter, as well as practical aspects of visualization. This article can be considered as a fundamental essay among Hungarian publications.¹⁶ Additionally, Anita Markó, a literary historian, wrote an article titled "Hálózatelmélet és -elemzés az irodalomtörténeti kutatásokban" which primarily focuses on the networks of intellectuals gaining access to publication opportunities between 1473 and 1600. Alongside the application of network theory, her work explores its mathematical background, offering a diverse and thorough analysis.¹⁷

The last work, which is also an exemplary case, a recently published volume, is the 2020 edition of

the *Magyar Gazdaságtörténeti Évkönyv*. Following György Kövér's in-depth introduction, this volume addresses numerous issues related to network research. In addition to discussing urban networks of the 20th century and corporate hierarchies and networks, it also explores commercial and credit relationships.¹⁸

What do we mean by network theory? What is its purpose and what concepts does it work with? Why is it beneficial to apply in historical studies? One definition was provided by Albert-László Barabási: "The goal of network science studies is to understand the universal properties and origins of complex systems, uncover the laws shaping the development of these networks, and examine how these laws influence network behavior".¹⁹ Bálint Kovács offers a more concise definition: "Networks can be described as structures and systems that can be mathematically modelled as graphs".²⁰ Indeed, studies in network theory often trace the discussion back to the concept of graphs. The basic concepts of graphs have been mentioned earlier, but it's worth adding that historians require essential information technology infrastructure for efficient processing, which also enables rapid and accurate visualization of graphs. Additionally, it is crucial to extract data properly since the type of data depends heavily on the research question. As Anita Markó formulates it: "...the methodology of network research is fundamentally empirical, based on graph theory, quantitative, and computational".²¹ To avoid data loss and optimize and automate extraction, the in the last chapter data related to individual persons in small units called *records*.

Network analysis essentially works with similar concepts as graph theory, but it may be worth defining some basic terms. A commonly used concept is the notion of the small world, which was introduced by Frigyes Karinthy in his work "Chains." It raises the question that Stanley Milgram later attempted to answer: what is the quantity of acquaintanceship through which a randomly selected, completely unfamiliar person can be connected to another? According to Milgram's calculation, on average, it took 5.5 individuals (or steps) to deliver a letter (i.e., establish a connection) between two people in 1967.²² So, what does network analysis work with based on this? It works with nodes (or vertices) and the connections between them (edges). The research by Albert-László Barabási and Réka Albert presented a model stating that connections do not form randomly; they

are organized based on preferential attachment, meaning new connections (edges and the nodes they bring) tend to navigate toward the most highly connected nodes.²³ This contradicts the Erdős-Rényi model, which assumes static relationships and claims that every node has the same number of edges or at least tends toward this state.²⁴ This has an impact on the network itself: it makes the system more resilient and leads to the formation of central nodes that have a relatively high degree compared to other nodes. They are the solid points that can serve as reference and influence trends.²⁵ The concept of *weak ties* suggests the existence of short-lived, weaker interactions that occur in critical points. These provide continuous flexibility to the network. In terms of information flow, these connections can be more diverse because they usually come from external, unfamiliar, or barely acquainted sources.

4. Balatonfüred in the Middle Ages

Balatonfüred, one of the popular resort towns in Hungary today, has a rich and interesting historical past. The village has been the focus of medieval research by numerous scholars, and through the studies of Pál Rainer. Nowadays we can discover important events and characteristics of the town's medieval period.

During the Middle Ages, Balatonfüred played a significant role in the region. Initially, the village existed as part of the historical Veszprém County, which belonged to the royal estates. According to Pál Rainer's research, the name of the settlement first appears in false documents from the 1050s. This diploma is likely from the 14th or 15th century.²⁶ The first authentic charter indicates that among the residents of Balatonfüred, there were serfs, peasants, and vineyard workers, totaling nine households. However, a charter dated after May 29, 1211, also counts the number of households in Kék and Arács. The data suggests that compared to Arács, where 23 households were located (more than twice as many as in Füred), was a sparsely populated settlement in the early 1200s.²⁷

Medieval Balatonfüred was also famous for its trading and fishing activities. The proximity to Lake Balaton facilitated the development of fishing and created a beneficial position for the trade. Balatonfüred was not only occupied by ecclesiastical landowners. From the surviving historical sources, we know that there were also royal estates in the

town at the end of the Árpád era.²⁸ The markets and fairs of the town attracted the population from the surrounding areas and contributed to its economic prosperity, although specific information about these transactions mostly dates back to the 15th century.²⁹

The social and economic life of the medieval town was closely intertwined with the local landowners. The ownership of the settlement varied among numerous noble families and religious institutions, and at one point, both the village of Balatonfüred and the surrounding villages, (which merged into the territory of Füred over time), had multiple owners.

Medieval Balatonfüred was affected by historical events and conflicts on multiple times. The town held strategic importance during the Árpád and Anjou eras, primarily due to its location. The village lay on one of the trade routes. It changed hands several times between different ruling families and centers of power. For example, besides Tihany and the royal courtiers, the Veszprém Church also had possessions in the area. For example: On May 1, 1326, Buda, son of Füred, served the Veszprém St. Michael Church as a warrior noble serf, and his successors did the same.³⁰ Thus, the Veszprém Church provided a sort of legal protective shield for the ecclesiastical landlords.

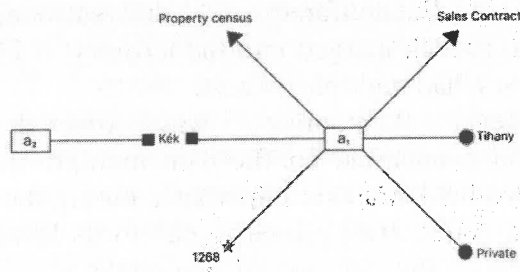
The medieval history of Balatonfüred is rich and diverse. During this period, the town's economic development, commercial activities, and significance in the region stood out. The presence of religious institutions and the town's role in political conflicts brought challenges and changes.

5. Dots and lines on paper...

As seen in the previous chapter, our research on Balatonfüred primarily relies on medieval written sources. The analysis of these sources will be conducted in multiple stages. The first step involves the application of a mathematical tool that has proven effective in Western research: the incidence matrix working with hypergraphs. The present article works with four types of data: mentions of specific settlements in charters, the precise date of these mentions, the names of landowners in the respective settlements, and the type of the source itself.

Unfortunately, the available data is not sufficient for conducting a systematic analysis linking individuals. However, by grouping the

information at our disposal according to communities (villages) in this case, we can still perform interesting analyses. Another unparalleled advantage of the hypergraph model is that a single connection can link not only two vertices but multiple ones. Therefore, we can correlate different events or records (denoted as $a_1 \dots a_n$ in this case) with each other.



After collecting the data (which can be done with a simple Excel spreadsheet), we will utilize the aforementioned mathematical tool, named by the incidence matrix. The incidence matrix is a mathematical tool also used in graph theory, which is a branch of mathematics studying graphs composed of vertices (nodes) and edges connecting them. It is essentially a table where rows represent the graph's vertices and columns represent the graph's edges. Each cell contains either a 1 or a 0, depending on whether the corresponding vertex is part of the given edge or not. For example, if a graph has three vertices and four edges, the incidence matrix will be a table with 3 rows and 4 columns. In the incidence matrix, a cell in the i -th row and j -th column will contain a 1 if the i -th vertex is part of the j -th edge, otherwise it will be 0.

In this case, it is crucial that each row contains a minimum of three 1 values in our matrix. While it may not be possible to determine the landowner's identity unequivocally based on individual

charters, it must be entirely clear in which year and through which type of charter a specific settlement was mentioned. I have divided the occurring charters into the following types: donation/belonging charters, judgment charters, sales contracts, economic inventories, and boundary disputes. Naturally, there are other types of charters, but they are not relevant to our current topic (for example, it is true that the founding charter of Tihany also includes the territory of Balatonfüred, but that charter falls outside the temporal boundaries of our current subject).

The given settlements are as follows: Füred, Siske (or Papsoka, which is equivalent to Siske as it underwent a name change), Magyaré, Kék, and Arács. It should be noted that Magyaré is not part of the current analysis, although we have included it as a data in the matrix for the sake of completeness. This is because we do not have any charters mentioning the settlement of Magyaré during the given period. The years represent the dates when any of the settlements were mentioned in a charter, regardless of the context (in the current model, it is considered equivalent whether someone was called as a witness from a specific settlement in a lawsuit or whether they were the defendant or plaintiff in that particular case). Finally, the landowner's identity is the last type of data, which can essentially take four values: Tihany Abbey, Veszprém Chapter, other ecclesiastical organization, or secular owner. We provide these values if the charter's text unequivocally clarifies the landowner or if it can be clearly inferred from the charter's text in other cases. In this special case, this group of columns may remain empty if we have no information about it. It is also worth highlighting that we are working with an undirected graph in our model, as...

In light of the above, a particular row of the incidence matrix (representing a vertex/node of the graph) will appear as follows:

	VILLAGE			YEAR			LANDOWNER			TYPE		
	ARÁCS	KÉK	...	1267	1268	...	TIHANY	VESZPRÉM	...	DONATION LETTER	SALES CONTRACT	...
E	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0

The given graph representation marked with "E" depicts an undirected hypergraph.³¹ The next step after constructing the incidence matrix is to convert this matrix into an adjacency matrix (EA). Adjacency matrices are mathematical tools that represent the connections between vertices in a graph or network. These matrices help determine the neighboring vertices of a given vertex and the relationships between them. The adjacency matrix is a square matrix where the rows and columns represent the vertices of the graph. If there is an edge from vertex "i" to vertex "j" in the graph, then the element in the "i"-th row and "j"-th column of the adjacency matrix will be 1; otherwise, it will be 0. Thus, the element at position "i", "j" in the matrix indicates whether there is an edge between vertices "i" and "j".

This can be achieved by multiplying the matrix with its transpose. Matrix transpose means reflecting the matrix by interchanging rows and columns. The transpose of a matrix is denoted by appending a "T" index to the matrix name. If A is an m x n matrix, then its transpose (denoted as A^T) will be an n x m matrix. Multiplying the matrix with its transpose means multiplying the original matrix with its transposed version. The result will be a new matrix, where the element at the i-th row and j-th column represents the scalar product of the i-th row of the original matrix and the j-th column of its transpose.

Mathematically, if A is an m x n matrix and B is an n x p matrix (which is the transpose of another matrix), then the product of the two matrices (A * B^T) will be an m x p matrix, and its elements can be calculated as follows:

$$(A * B^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A_{ik} * B^T_{kj})$$

Or what we ultimately need:

$$E^A = E * E^T$$

In the current database, the late medieval data of Balatonfüred were stored in a 28-record database, which has a total of 47 attributes (including the mentioned ones, such as document types, dates, etc.). This can be expanded in the future as needed. The adjacency matrix will be a 28*28 database, where the number 28 represents the number of

nodes in the matrix. The elements of the matrix indicate the presence or absence of edges in the graph. If there is an edge between the vertices of the graph, the corresponding matrix element will have a value of 1; otherwise, it will be 0. In addition, the adjacency matrix represents several characteristics and properties related to the graph. One important property is symmetry. If the graph is undirected, the adjacency matrix will be symmetric, meaning that the elements above and below the diagonal reflect each other. This means that if the value of element (i, j) is 1, then the value of element (j, i) is also 1. This holds true in this case as well. Another important aspect is determining connectivity. Based on the adjacency matrix, it is easy to determine whether the graph is connected or not. If there is at least one path between all vertices, then every element of the matrix will have a value of 1, indicating that the graph is connected, as it is currently. Otherwise, the graph is not connected.

The next step is the so-called centrality analysis, which involves another mathematical operation. In the article discussing Caribbean attacks, Bonacich, Holdren, and Johnston (2004) demonstrate how to adapt the concept of network centrality to supradictive networks using the incidence matrix. We will continue with this approach.³² The incidence matrix presented in the previous section depicts the network of connections between 10 settlements, narrowed down to a total of 28 years between 1267 and 1349. In this case, we primarily need to consider how to apply eigenvector centrality to hypergraphs using the obtained matrix. Simplified, centrality scores are assigned to graph nodes based on certain factors, and these scores are compared with each other. The centrality scores will represent the prominence of individual nodes or connections within the graph. The formulas required for this are as follows:

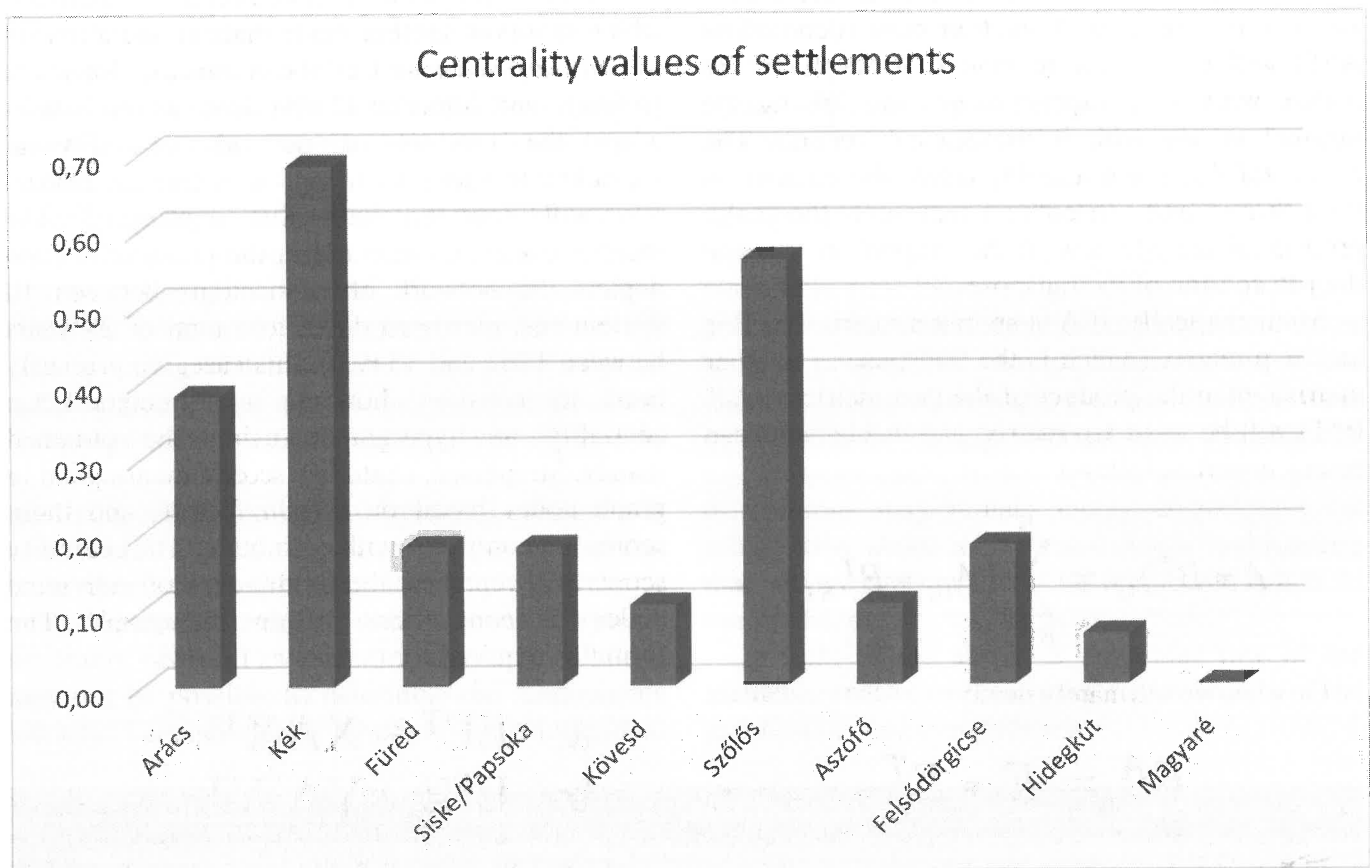
$$\text{a. } EE^T = X\Lambda X^T$$

$$\text{b. } E^TE = Y\Lambda'Y^T$$

The two lines presented here mean the following: X and Y are matrices whose columns represent the eigenvectors, while Λ and Λ' are diagonal matrices along with the eigenvectors. E represents the original matrix, and E^T represents its transpose. The results of the analysis are not surprising at first glance. If we only consider the number of mentions,

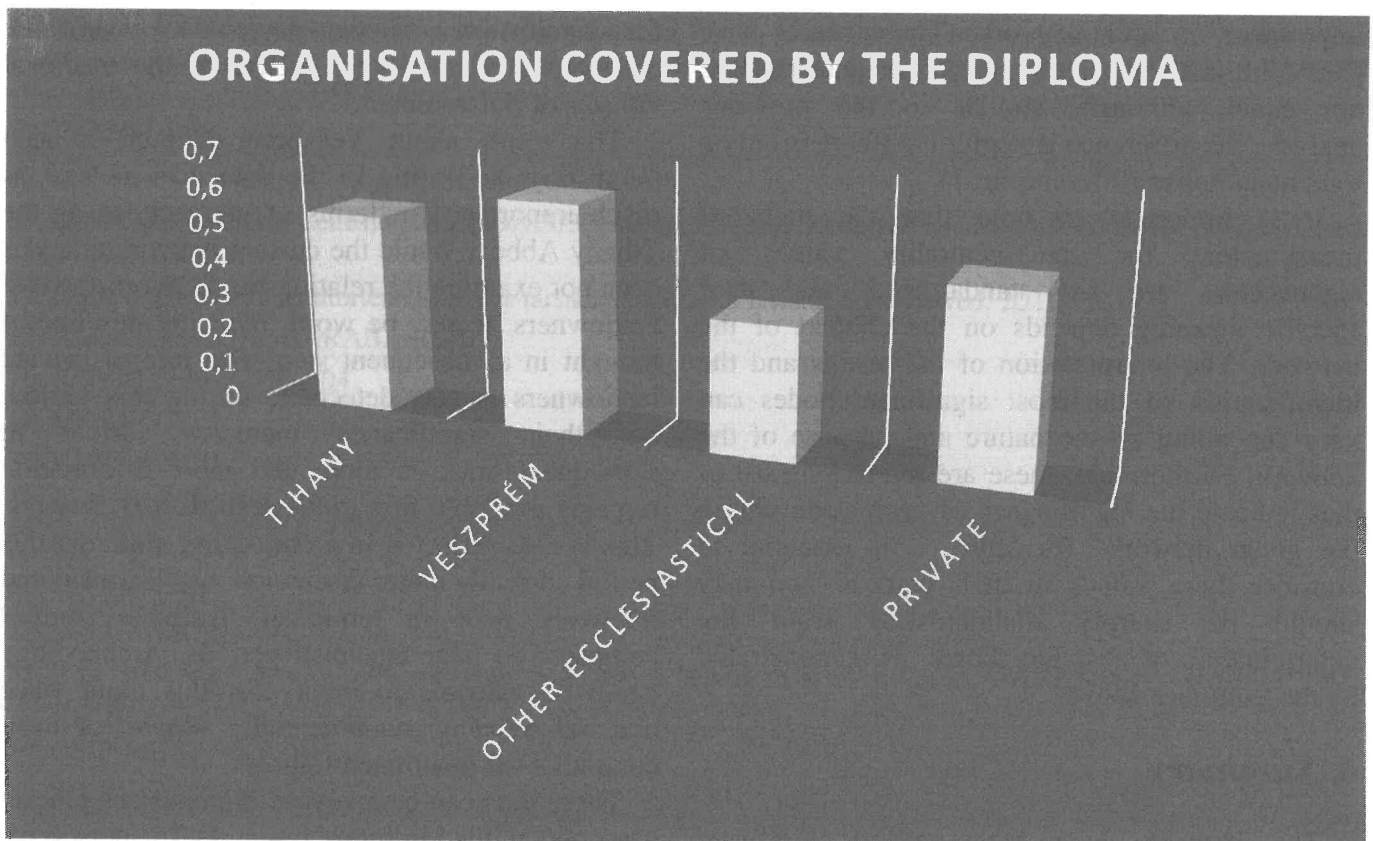
the given eigenvector values are as follows: [0.383, 0.685, 0.183, 0.183, 0.106, 0.560, 0.106, 0.183, 0.066, 0.000]. The highest value is associated with the Kék settlement, which was mentioned 16 times over the years. However, if we consider not only the number of mentions but also various properties, such as the types of mentions that were common in a specific year and which settlement they were related to, then the highest score is not attributed to the Kék record but rather to Balatonszőlős. This means that a record related to Balatonszőlős becomes one of the central records in terms of the entire network. [0.290] It is true that Kék is not far behind [0.241]. In practical terms, this means that the most prominent node may have a greater influence on the functioning or structure of the network. For example, in a network modeling social relationships, the most prominent node could be a person who has a significant impact on others or who has many connections within the network. The

centrality values of eigenvectors can help identify important or influential nodes, and this information can be useful in various areas, such as social network analysis, modelling information diffusion, or identifying key players in corporate networks. In the specific example mentioned above, Kék and Balatonszőlős are such records. It is also worth to note that the centrality scores positively correlate with the examined settlements. Just by looking at the first, narrowed-down matrix, we can see that Arács is mentioned a total of 4 times over the years (regardless of the specific timing), and its score is [0.383]. In contrast, for example, Hidegkút is mentioned only once, and not in connection with any other settlement, resulting in a score of [0.066] (not even reaching 0.1). Naturally, the lowest score belongs to the Magyaré settlement with 0 points (no mentions of the village occurred during this period), while the highest score belongs to the Kék settlement.

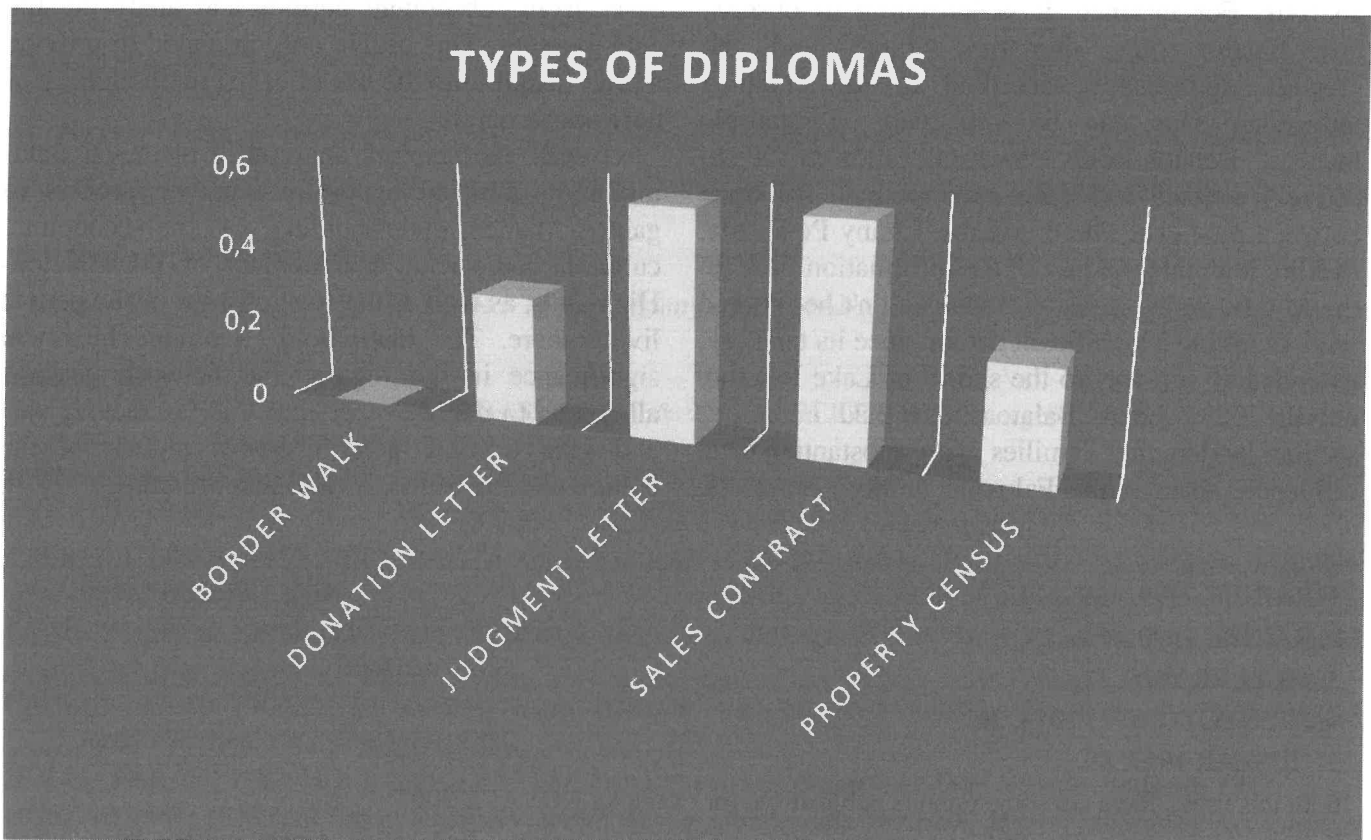


It can be interesting to observe the centrality scores of the other subgraphs of the graph as well. Although the Veszprém chapter indirectly or directly appears less frequently than the Tihany as an organization, its role in the network is slightly higher than that of Tihany as a settlement (Vesz-

prém: [0.612]; Tihany: [0.539]). However, in practice, this does not simply a significant difference; it is only a matter of a few mentions. Therefore, we can say that in this case, the absolute quantity of mentions is extremely important, and the difference is negligible.



Finally, let's also look at the centrality scores for the type of diploma.



Since there is no available data regarding border disputes from this period, it is understandable that it will have a value of zero. In contrast, it is

interesting that the lawsuits and judgment letters (which fall into the same category for analysis purposes) and the sales contracts hold equal

importance in our network. Their scores are: [0.562]. It is also intriguing that their quantities are not equal, although, similar to the previous analysis, the difference is negligible (there is only a total quantitative difference of 1).

It is important to note that the units of measurement for the centrality values of eigenvectors are not standardized, and their specific meaning depends on the context of the network. The interpretation of the results and the identification of the most significant nodes can vary depending on the nature and purpose of the network. Furthermore, these are relative measures that indicate the significance of each node within the given network. Therefore, it is essential to consider these values in their context, and they should be sharply distinguished from the determination of absolute scores, as demonstrated by the examples above.

6. Summary

The analysis above have several significant points. Firstly, it is worth to mention the subtle differences that contribute to the essence of this analysis. For instance, it is intriguing to observe how Balatonszőlős, after Kék village, holds the greatest significance according to the obtained indicators. This can be explained by multiple factors: Balatonszőlős' location allowed it to actively oversee and even participate in the trade between medieval Füred and the Tihany Peninsula, making it an integral part of the information flow. In the Middle Ages, Balatonszőlős couldn't be ignored without taking a significant detour since its territory, extended all the way to the shores of Lake Balaton. On the other hand, Balatonszőlős had numerous secular landowning families with substantial local influence, such as the Faluvine family. Therefore,

the significance of the settlement cannot be disregarded from the perspective of the medieval villages of Balatonfüred.³³

The result about Veszprém Church is also interesting: according to the data, had at least as much importance in terms of connections as the Tihany Abbey. While the current network analysis does not examine the relationship between the two landowners, it may be worth pursuing this line of thought in a subsequent step. The role of private landowners is also detectable during this period, but their significance increases further in subsequent eras, as more and more information remains available in various records and charters. This is also reflected in architecture, although this period currently under discussion is still considered relatively poor in terms of available sources compared to later medieval periods. Archaeology could be valuable to involve at this point since material remains can potentially support or even contradict the mentioned figures.

These data can be analysed in numerous precise ways and applied in future research. The reason for this is that these methods should be applied in the history of Balatonfüred when examining legal cases from subsequent periods and analysing the data together. This article only intended to provide a brief insight into the use of the methodology of network research.

Overall, the network analysis of medieval Balatonfüred offers an opportunity for researchers to gain a better understanding of the economic, cultural, and social development of the Balaton-Highlands, as well as the relationships of the people living there. The town holds a unique historical significance in the region, and network analysis allows us to delve deeper into this fascinating past and gain a more comprehensive picture of the culture and life of medieval Balatonfüred.

Notes:

1. RAINER 1999, 139–140.
2. RAINER 1999, 150.
3. MÜLLER 2020, 71.
4. SZENTGYÖRGYI 2014, 26.
5. HUSZÁR 1967, 89.
6. In this topic, there are some famous publication, for example: KOVÁCS 2007.
7. One example is the 2017 excavation of a medieval cemetery. Excavation report online: <https://www.veol.hu/kultura/2017/03/zsinagoga-balatonfured-regeszet-asatas-temeto>. Last viewed: 2023. 06. 17.
8. See, for example, his work on the Romanesque churches of the Balaton Highlands. KOPPÁNY 1963, 82–114.
9. RAINER 1999, 139–178.

10. Although his research is not specifically related to Füred, it has greatly helped researchers to gain a better understanding of the situation of the medieval villages of the Lake Balaton Highlands. HOLL – PARÁDI 1983.
11. KÖVÉR 2020, 10.
12. <http://www.socialnetwork.hu/>. Last viewed: 2021. 03. 12.
13. <http://tudasaramlas.btk.elte.hu/hu/esemenyek/323-behalozva-életudományok-es-halozatok-konferencia>. Last viewed: 2021. 03. 11.
14. <https://ujkor.hu/content/torteneti-kutatas-tarsadalmi-celja-es-haszna>. Last viewed: 2021. 03. 11.
15. BARABÁSI 2011; BARABÁSI 2017.
16. KOVÁCS 2012, 187–204.
17. MARKÓ 2020.
18. KÖVÉR 2020, 9–19.
19. BARABÁSI, 2017, 42.
20. KOVÁCS 2012, 190.
21. MARKÓ 2018, 61.
22. MILGRAM 1967, 61–67.
23. The number of degrees tells you how many edges belong to a given vertex. BARABÁSI – ALBERT 1999, 509–512.
24. CSERMELY 2004, 10.
25. MARKÓ 2018, 61–62.
26. RAINER 1999, 140.
27. ERDÉLYI 1908a, 45; ERDÉLYI 1908b, 435–436, 446.
28. ERDÉLYI 1908a, 31, 294; Gyöngyös's son, Pasca, the royal courtier of Fured, gave his estates to the monastery at the request of Abbot Andrew III Reynald.
29. RAINER 1999, 145.
30. RAINER 1999, 141.
31. SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017, 53.
32. SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017, 58–59.
33. ERDÉLYI 1908b, 50. OKL.
34. SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017, 53.

Bibliography:

- BARABÁSI – ALBERT 1999: BARABÁSI Albert-László – ALBERT Réka: Emergence of Scaling in Random Networks. *Science* 286 (1999), 509–512.
- BARABÁSI 2011: BARABÁSI Albert-László: *Behálózva*. Budapest 2011.
- BARABÁSI 2017: BARABÁSI Albert-László: *A hálózatok tudománya*. Budapest 2017.
- CSERMELY 2004: CSERMELY Péter: *A rejtett hálózatok ereje: Hogyan stabilizálják a világot a gyenge kapcsolatok?* Budapest 2004.
- ERDÉLYI 1908a: ERDÉLYI László: *A Tihanyi Apátság önállósága 1055–1701. A Pannonhalmi Szent Benedek Rend Története 10/1*. Budapest 1908.
- ERDÉLYI 1908b: ERDÉLYI László: *A Tihanyi Apátság önállósága 1055–1701. A Pannonhalmi Szent Benedek Rend Története 10/2*. Budapest 1908.
- HOLL – PARÁDI 1982: HOLL Imre – PARÁDI Nándor: *Das mittelalterliche Dorf Sarvaly*. Budapest 1982.
- HUSZÁR 1967: HUSZÁR Lajos: Újabb Veszprém megyei éremleletek. *Veszprém Megyei Múzeumok Közleményei* 6. (1967), 89–112.
- KOPPÁNY: KOPPÁNY Tibor: A Balaton-felvidék román kori templomai. *A Veszprém Megyei Múzeumok Közleményei* 1. (1963), 82–114.
- KOVÁCS 2007: KOVÁCS Emőke: *A 19. századi Balaton világa*. Budapest 2007.

- KOVÁCS 2012: KOVÁCS Bálint: A hálózatelemzés alkalmazásáról a történettudományban. *Világtörténet* 3–4. (2012), 187–204.
- KÖVÉR 2020: KÖVÉR György: Előszó. *Magyar Gazdaságtörténeti évkönyv. Hálózat & hierarchia*. Budapest 2020.
- MARKÓ 2018: MARKÓ Anita: Hálózatok a 16–17. századi album amicorumokban: Az 1500 és 1700 közötti hungarika jellegű emlékkönyvbejegyzések hálózatelemzése az Inscriptiones Alborum Amicorum adatbázis alapján. *Digitális Bölcsészet* 1 (2018), 55–82.
- MARKÓ 2020: MARKÓ Anita: Hálózatelmélet és -elemzés az irodalomtörténeti kutatásokban. *Literatura* 46/3(2020), 312–334.
- MILGRAM 1967: MILGRAM, Stanley: The small world problem. *Psychological Today* 1 (1967), 61–67.
- MÜLLER 2020: MÜLLER Róbert: A Keszthely-kultúra ma. *Archaeologiai Értesítő* 145 (2020), 69–99.
- RAINER 1999: RAINER Pál: Középkor. In.: *Balatonfüred és Balatonarács története*. Veszprém 1999., 139–178.
- SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017: SHAFIE, Termeh – SCHOCH, David – MANS, Jimmy – HOFMAN, Corinne – BRANDES, Ulrik 2017: Hypergraph Representations: A Study of Carib Attacks on Colonial Forces (1509-1700). *Journal of Historical Network Research* 1 (2017) 52–70.
- SZENTGYÖRGYI 2014: SZENTGYÖRGYI Rudolf: *A tihanyi apátság alapítólevele 1*. Budapest 2014.



Balatonfüred és környéke 1956 körül
Balatonfüred and its surroundings around 1956

Forrás / Source: Fortepan – <https://fortepan.hu/hu/photos/?id=17857>
Adományozó / Donor: Kotnyek Antal
Letöltés ideje / Download Time: 2023.június 26., 9 óra 58 perc