Gazdaság & Társadalom / Journal of Economy & Society
16 (34) (2023) 3, 33–46. • DOI: 10.21637/GT.2023.3.03

A jelenérték számítás pontatlanságának numerikus vizsgálata

Numerical investigation of the inaccuracy related to the present value calculation

***Sereg Nikolett*[1]**

Absztrakt: Gazdasági döntések meghozatalához elengedhetetlen, hogy a döntést támogató számítási módszerek kellően pontos eredményre vezessenek. A kutatás célja a jelenérték-számítás „tankönyvi" megközelítése során alkalmazott periódusvégi konvencióból és a várható élettartamig történő számításból fakadó hibák együttes hatásának numerikus vizsgálata. A hiba mértéke függ a feltételezett pénzáramprofiltól és az élettartam valószínűség-eloszlásától. Elsőként azt elemezzük, hogy a „tankönyvi" megközelítéshez képest mennyivel pontosabb, ha csak az élettartammal kapcsolatban hibázunk, illetve javít-e a „tankönyvi" számítás pontosságán, ha figyelembe próbáljuk venni az élettartam valószínűségeloszlásának magasabb momentumait is. Eredményként elmondható, hogy a kutatásban szereplő feltételezések teljesülése esetén a „tankönyvi" eljáráshoz képest az életszerű esetek többségében nem érdemes törekedni sem a helyes pénzáramprofil, sem az élettartammal kapcsolatos bizonytalanság figyelembevételére.

Kulcsszavak: *nettó jelenérték, relatív hiba, periódusvégi konvenció, bizonytalan élettartam*

JEL-kódok: *C18, G30*

[1] SEREG Nikolett egyetemi tanársegéd [Assistant lecturer],
(https://orcid.org/0000-0002-4609-6410)
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar, Pénzügyek Tanszék [Budapest University of Technology and Economics, Faculty of Economic and Social Sciences, Department of Finance]
(sereg.nikolett@gtk.bme.hu)

Abstract: Any computational method supporting financial decision-making must produce results of sufficient precision. The research aims to examine numerically the combined effect of errors arising from the end-of-period convention and negligence of uncertainty related to lifespan beyond expected value used in the „textbook“ method of present value calculation. The magnitude of the error depends on the assumed cash flow profile and the life-time probability distribution. The study compares the accuracy of different cases of present value calculations. In the first case, errors are only related to the uncertainty of the lifespan. In the second case, errors are related to the end-of-period convention due to the involvement of the higher moments of the probability distribution of the lifespan. It can be concluded that if the research assumptions are fulfilled, in most real-life cases, it is not worth considering either the correct cash flow profile or the uncertainty related to the lifetime beyond the „textbook“ method.

Keywords: *present value, relative error, end-of-period convention, uncertain lifespan*

JEL Codes: *C18, G30*

Bevezetés

Napjaink gazdasági döntéseinek meghozatala során elengedhetetlen, hogy a döntést támogató számítási módszerek kellően pontos eredményt adjanak. Pénzügyi területen a döntéshozatalt nagyban támogatják a jelenérték-számításon alapuló értékelési megközelítések. A módszer lényege, hogy egy eszköz értékét a tőle várt jövőbeli pénzáramlások jelenre vetített értékeként határozza meg, egy az eszköz kockázatosságát, a befektetett tőke alternatívaköltségét tükröző diszkontráta segítségével (Damodaran, 2006).

A „tankönyvi” megközelítés szerint a jelenérték-számításhoz a következő bemeneti információkra van szükség: a periódus hosszára (általában egy év), az eszköz várható élettartamára (a periódus hosszával megegyező mértékegységben, például évben), a periódusokra becsült aggregált pénzáramokra a periódusok végére tolva (időzítve), a periódusra becsült diszkontrátára. Felmerül a pénzáramok és a diszkontráta pontatlan becslése[2], az eszköz élettartamával kapcsolatos bizonytalanság figyelmen kívül hagyása

[2] A becslések pontosságának vizsgálatával részletesen foglalkoznak Székely és társai (2020).

és a pénzáramok valódi időzítésének figyelmen kívül hagyása, mint a számítás során elkövethető hiba. Következményként természetesen egyszerűsödik a számítás, ugyanakkor felvetődik a kérdés, hogy a pontatlanság elfogadható-e az egyszerűségét mérlegelve, vagy érdemes lenne feloldani ezen egyszerűsítő feltételeket egy feltételezetten pontosabb ám bonyolultabb számítási módszer kedvéért?

A periódusvégi konvencióból (a pénzáramok periódus végére tolásából) és a várható élettartamig történő számításból fakadó hibák együttes hatását a relatív hiba segítségével vizsgáljuk. A hiba mértéke függ a pénzáramprofiltól és az élettartam valószínűség-eloszlásától is, melyek mind elméleti szinten, mind a valóságban sokfélék lehetnek. Az elemzés elvégzéséhez folytonos, exponenciális pénzáramprofilt és exponenciális eloszlású élettartamot feltételezek. Ezen feltételezés mentén folytatott analitikus vizsgálatot Sereg (2021) tanulmánya taglalja. Jelen tanulmány a problémakör numerikus modelljét hivatott bemutatni. A feltételezésből adódóan három paraméter befolyásolja a relatív hiba értékét: a növekedési ütem, a diszkontráta és az eszköz várható élettartama. A numerikusan vizsgálat rávilágít, hogy a vizsgálati feltételezések teljesülése mellett érdemes-e a „tankönyvi” eljáráshoz képest törekedni a helyes pénzáramprofil, illetve az élettartammal kapcsolatos bizonytalanság figyelembevételére.

A feltételezett pénzáramprofil és élettartam-eloszlás

Az elemzés elvégzéséhez folytonos, exponenciális pénzáramprofilt és exponenciális eloszlású élettartamot feltételezek. Ezen kombináció a gyakorlatban többek között például tömeggyártással foglalkozó vállalatok esetén figyelhető meg. Az eloszlásfüggvény – általános definíció szerint – minden x valós számhoz annak a valószínűségét rendeli, hogy a valószínűségi változó ennél kisebb értéket vesz fel. Az exponenciális eloszlásfüggvény ($\Phi(x)$) matematikailag a következőképpen írható fel:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , ha\ x \geq 0 \\ 0 & , ha\ x < 0 \end{cases}, \tag{1}$$

ahol e a természetes logaritmus alapja, a pozitív tartományon értelmezett λ az exponenciális eloszlás paramétere.

Ha x valószínűségi változónak létezik a sűrűségfüggvénye ($f(x)$) akkor az az eloszlásfüggvény deriváltjaként adódik. Matematikailag a következő alakban írható fel:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , ha\ x \geq 0 \\ 0 & , ha\ x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

ahol $\lambda > 0$.

A feltételezésnek megfelelő exponenciális eloszlású élettartamot *T* folytonos valószínűségi változóval írjuk le, melynek várható értéke az alábbi módon számítható ki (ahol *E*() a várható értéket jelöli):

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \quad (3)$$

A folytonos exponenciális pénzáramprofil leírása matematikailag a következő:

$$F(t) = Ce^{jt}, \quad (4)$$

ahol *C* a konstans pénzáram-paramétert, *j* folytonos növekedési ütemet (amely lehet nulla, pozitív és negatív növekedés is), *t* pedig az időt jelöli.

Az elméleti várható jelenérték

Az elméletileg pontos jelenérték várható értékének kiszámítása során figyelembe kell venni, hogy az eszköz élettartamának bizonytalanságát exponenciális eloszlás jellemzi. A fentebb ismertetett eloszlásfüggvény azt mutatja meg, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy egy eszköz nem él tovább adott *t* időpontnál. A bizonytalan élettartam figyelembevételéhez ennek komplementerével kell súlyozni a korábban már definiált pénzáramprofilt, azaz annak valószínűségével, hogy az adott eszköz legalább *t* időpontig elél.

Az elméletileg pontos jelenérték várható értéke így alakul (ld. Zinn, Lesso, Motazed, 1977):

$$E(P_{pontos}) = \int_0^{\infty} Ce^{(j-\lambda)t} e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} Ce^{(j-\lambda-r)t} dt = \frac{C}{-j+\lambda+r}. \quad (5)$$

Tehát az exponenciális eloszlás feltételezéséből fakadóan úgy tekintjük, hogy az eszköz bármeddig elélhet, így a végtelenig integrálunk.

A továbbiakban szemléltető példaként a tíz éves várható élettartamhoz tartozó esetek bemutatásának segítségével vezetjük végig a modell működését, viszont az általános következtetések megfogalmazása során a 2, 5, 15, 20, és 40 éves várható élettartamokon számított eredményeket is figyelembe vesszük.

1. táblázat: Az elméleti pontos jelenérték várható értéke λ=0,1 esetén

E(*T*)	λ	r						
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	10,0000	6,6667	5,0000	4,0000	3,3333	2,8571	2,5000
	5%	20,0000	10,0000	6,6667	5,0000	4,0000	3,3333	2,8571
	10%	KK	20,0000	10,0000	6,6667	5,0000	4,0000	3,3333
	15%	KK	KK	20,0000	10,0000	6,6667	5,0000	4,0000
	20%	KK	KK	KK	20,0000	10,0000	6,6667	5,0000

Forrás: Saját szerkesztés

Az 1. táblázatban látható KK jelölés a konvergencia kritériumnak való megfelelés hiányát jelöli. A $j>r$ és $j<r$ esetekben a $j<(\lambda+r)$, a $j=0$ esetben $(\lambda+r)>0$, míg $j=r$ esetben a $\lambda>0$ kritériumnak kell megfelelni, máskülönben a pontos jelenérték nem értelmezhető.

Minden további esetben a jelenértéket az eszköz élettartamának várható értékéig számítjuk, hiszen a valóságban leginkább ez áll az elemzésekhez rendelkezésre. A megközelítések közti különbséget majd az jelenti, hogy egyik esetben elhagyásra kerül a „tankönyvi” eljárás által javasolt periódusvégi konvenció, a második esetben pedig számításba vesszük az élettartammal kapcsolatos bizonytalanságot.

A szimulált várható jelenérték és a megközelítések várható jelenértéke

Szimuláció segítségével paramétereink függvényében ki tudjuk számítani a várható jelenértékeket. A pontos jelenérték várható értéke egy kettős integrál eredménye, mely a következőképpen néz ki:

$$E(P_{szimulált}) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{T} Ce^{jt}e^{-rt}dt\right)\lambda e^{-\lambda T}dT, \quad (6)$$

Minden további számítás során a pénzáramprofilra jellemző konstanst (*C*) egynek tekintjük. Tehát a numerikus modellben a pontos jelenérték T függvényében általános esetben ($j>r$ és $j<r$)[3] a következő:

$$P_{szimulált}(T) = \int_0^T e^{jt} e^{-rt} dt = \frac{-1+e^{(j-r)T}}{j-r}. \quad (7)$$

A *T* valószínűségi változót várható értéke csak egész értékeket vehet fel. A numerikus modellben a különböző várható élettartamokat úgynevezett szcenáriókként, forgatókönyvekként kezeljük, azaz a valószínűségi változónak mindig a vizsgált élettartamhoz tartozóan adjuk meg a λ paramétert, amely nem más, mint 1/E(*T*).

A későbbiekben bemutatott megközelítések összehasonlíthatósághoz indokolt a j=0 és $j=r$ eseteket különválasztani, így az ezekhez tartozó szimulált jelenérték bemutatására is szükség van. A $j=r$ esetről belátható, hogy éppen *T*-t eredményez, míg j=0 eset a következő:

$$P_{szimulált,j=0}(T) = \int_0^T e^{-rt} dt = \frac{1-e^{-rT}}{r}. \quad (8)$$

A szimuláció során százezer véletlenszerű értéket generálunk minden valószínűségi változó esetén. A fenti egyenletekben *T* az eszköz élettartamát reprezentáló valószínűségi változó értékeit a megadott λ paraméterű exponenciális eloszlásnak megfelelően veszi fel. Számunkra a százezer értéket felvevő valószínűségi változó következtében létrejövő jelenértékek várható értéke a meghatározó, ezt használjuk fel a továbbiakban. A szimulációból kivonatolt adott *r* és *j* kombinációhoz tartozó jelenértékre kapott várható értékeket tartalmazza az 1. táblázat tíz éves várható élettartam esetén.

Belátható, hogy a szimuláció eredményeként kapott 2. táblázat az elméleti pontos várható jelenértéket bemutató 1. táblázat értékei felé konvergál, a szimuláció próbaszámának növekedésével egyre jobban.

[3] Matematikailag a j<r és j>r, a j=0, valamint a j=r eseteket a konzisztens elemzéshez külön kell kezelni minden megközelítés esetén.

2. táblázat: A *T* valószínűségi változóra futtatott szimulációból kinyert várható jelenértékek λ=0,1 esetén

E(*T*)	λ	r						
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	9,9563	6,6348	4,9785	3,9845	3,3216	2,8479	2,4925
	5%	20,1960	9,9563	6,6348	4,9785	3,9845	3,3216	2,8479
	10%	KK	20,1960	9,9563	6,6348	4,9785	3,9845	3,3216
	15%	KK	KK	20,1960	9,9563	6,6348	4,9785	3,9845
	20%	KK	KK	KK	20,1960	9,9563	6,6348	4,9785

Forrás: Saját szerkesztés

A „tankönyvi” megközelítés

A „tankönyvi” jelenértékszámítás során a feltételezett pénzáramprofilon periódusvégi konvenciót hajtunk végre az eszköz várható élettartamáig. A periódusvégi konvenció matematikailag a következő:

$$F_{tankönyvi}(t) = \int_{t-1}^{t} Ce^{j\tau} d\tau = \frac{Ce^{j(-1+t)}(-1+e^{j})}{j}, \qquad (9)$$

ahol τ az integrálási változó, mely egy időperióduson fut végig. A közelítő jelenérték (jelölve: $\hat{P}$) várható értékének kiszámításához már csak diszkontálni kell a periódus végére tolt pénzáramokat a megfelelő folytonos diszkontrátával és az élettartam várható értékéig összegezni. Ezt mutatja a következő egyenlet:

$$E(\hat{P}_{tankönyvi}) = \sum_{t=1}^{E(T)} F_{tankönyvi}(t) e^{-rt} = \frac{-1+e^{j}-e^{\frac{j-r}{\lambda}}(-1+e^{j})}{(-e^{j}+e^{r})j}. \qquad (10)$$

A „tankönyvi” megközelítés jelenértéke matematikailag sem a j=0, sem a j=r esetben nem értelmezhető ebben a formában, hiszen akkor nullával való osztás állna elő. Tehát a kezdeti bemeneti paraméterek módosításával külön meg kell ezeket az eseteket vizsgálni.

Amikor *j*=0 a „tankönyvi” megközelítés várható jelenértéke a következőképpen írható fel:

$$\mathrm{E}(\hat{P}_{tankönyvi,j=0}) = -\frac{1-e^{-\frac{r}{\lambda}}}{1-e^{r}}. \qquad (11)$$

A $j=r$ esetén pedig:

$$\mathrm{E}(\hat{P}_{tankönyvi,j=r}) = \frac{1-e^{-r}}{\lambda r}\,. \tag{12}$$

Ezen eredmények később kerülnek majd felhasználásra a relatív hiba meghatározásánál, de előbb még meg kell ismerni további két esetet, melyek majd pontosságuk szempontjából összehasonlításra kerülnek a „tankönyvi" megközelítéssel.

A „profil" megközelítés

A „tankönyvi" megközelítés a periódus végére tolt pénzáramok alapján határozza meg a jelenértéket, figyelmen kívül hagyva a pénzáramok tényleges időzítését. Ez a hiba elkerülhető, ha nem végezzük el a periódusvégi konvenciót. Ezen esetet „profil" megközelítésnek nevezzük a továbbiakban, a várható jelenértékének számítása pedig matematikailag a következő:

$$E(\hat{P}_{profil}) = \int_0^{E(T)} F(t)e^{-rt}dt = \frac{-1+e^{\frac{j-r}{\lambda}}}{j-r}\,. \tag{13}$$

A jelenérték $j=r$ esetén ebben a formában nem értelmezhető, erre az esetre a következőképpen írható fel a várható érték:

$$E(\hat{P}_{profil,j=r}) = \frac{1}{\lambda}\,. \tag{14}$$

Belátható, hogy ez megegyezik a $j=r$ esetben számított elméleti várható jelenértékkel, azaz ilyenkor nincs eltérés a kettő között.

A konzisztens eredmények érdekében vizsgálandó a pontos pénzáram-profil alapján számított várható jelenérték alakulása a $j=0$ esetre is:

$$\mathrm{E}(\hat{P}_{profil,j=0}) = \frac{1-e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}\,. \tag{15}$$

A „valószínűségi" megközelítés

A valószínűségekkel súlyozott periódusvégi konvenció a „tankönyvi" megközelítés azon gyengeségét próbálja kijavítani, hogy az nem veszi figyelembe az eszköz élettartamának bizonytalanságát. Bizonytalanság alatt itt egészen pontosan az élettartam valószínűség-eloszlásának másodrendű és afeletti momentumait értjük, az első rendű momentumot – azaz az élettartam várható értékét – a „tankönyvi" megközelítés is figyelembe veszi. A megközelítés szerint az exponenciális eloszlású eszközélettartamból következő csökkenő súlyokkal vesszük figyelembe a periódus végére tolt pénzáramokat, ezzel mintegy figyelembe véve a bizonytalanságot:

$$F_{valószínűségi}(t) = \frac{Ce^{j(-1+t)}(-1+e^{j})e^{-\lambda t}}{j}. \quad (16)$$

Ily módon mesterségesen előállított profil várható jelenértékének számítása a következőképpen történik:

$$\mathrm{E}(\hat{P}_{valószínűségi}) = \sum_{t=1}^{E(T)} F_{valószínűségi}(t)e^{-rt} = \frac{e^{-\frac{\lambda+r}{\lambda}}(-1+e^{j})(e^{\frac{j}{\lambda}}-e^{1+\frac{r}{\lambda}})}{(e^{j}-e^{\lambda+r})j}. \quad (17)$$

Látható a végeredményen, hogy a j=0 esetet ebben a formában nem lehet értelmezni. Ha a növekedési ütem nulla, a fenti számítás így alakul:

$$\mathrm{E}(\hat{P}_{valószínűségi,j=0}) = -\frac{1-e^{-\frac{\lambda+r}{\lambda}}}{1-e^{\lambda+r}}. \quad (18)$$

A konzisztencia kedvéért itt is nézzük meg a várható jelenérték alakulását $j=r$ esetben:

$$E(\hat{P}_{valószínűségi,j=r}) = \frac{(-1+e)e^{-1-r}(-1+e^{r})}{(-1+e^{\lambda})r}. \quad (19)$$

Valószínűségi változóra csak a szimulált jelenérték meghatározása során van szükség, hiszen a vizsgált három megközelítés („tankönyvi”, „profil”, „valószínűségi”) jelenértékeinek mindegyike egyszerűen a várható élettartamig számítódik. A következő táblázatokban az egyes megközelítések 10 éves várható élettartamhoz tartozó értékeit mutatom be.

3. táblázat: A „tankönyvi” megközelítés közelítő jelenértékei 10 éves várható élettartam esetén

E(*T*)	λ							
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	10,0000	7,6743	6,0104	4,8004	3,9054	3,2318	2,7160
	5%	12,9744	9,7541	7,4856	5,8626	4,6824	3,8094	3,1523
	10%	KK	12,6580	9,5163	7,3031	5,7197	4,5682	3,7165
	15%	KK	KK	12,3519	9,2861	7,1265	5,5813	4,4577
	20%	KK	KK	KK	12,0558	9,0635	6,9556	5,4475

Forrás: Saját szerkesztés

4. táblázat: A „profil” megközelítés közelítő jelenértékei 10 éves várható élettartam esetén

E(T)	λ	r						
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	10,0000	7,8694	6,3212	5,1791	4,3233	3,6717	3,1674
	5%	12,9744	10,0000	7,8694	6,3212	5,1791	4,3233	3,6717
	10%	KK	12,9744	10,0000	7,8694	6,3212	5,1791	4,3233
	15%	KK	KK	12,9744	10,0000	7,8694	6,3212	5,1791
	20%	KK	KK	KK	12,9744	10,0000	7,8694	6,3212

Forrás: Saját szerkesztés

5. táblázat: A „valószínűségi” megközelítés közelítő jelenértékei 10 éves várható élettartam esetén

E(T)	λ	r						
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	6,0104	4,8004	3,9054	3,2318	2,7160	2,3142	1,9960
	5%	7,4856	5,8626	4,6824	3,8094	3,1523	2,6492	2,2573
	10%	KK	7,3031	5,7197	4,5682	3,7165	3,0755	2,5846
	15%	KK	KK	7,1265	5,5813	4,4577	3,6266	3,0011
	20%	KK	KK	KK	6,9556	5,4475	4,3508	3,5396

Forrás: Saját szerkesztés

Relatív hibák numerikusan

A megközelítések összevetéséhez Andor (2013) tanulmányához hasonlóan a relatív hibát (ε) használom, mely az alábbi módon adódik:

$$\varepsilon = \left|\frac{\hat{P}}{P_{szimulált}} - 1\right| . \qquad (20)$$

A szemléltető példa esetén tehát a szimulációból kivonatolt adott r és j kombinációhoz tartozó várható jelenértékkel (lásd 2. táblázat) osztjuk le a megközelítések adott *r* és *j* kombinációhoz tartozó várható jelenértékeit (lásd 3-5. táblázat). Az így kapott relatív hibákat mutatják a következő táblázatok, természetesen figyelembe véve azokat az eseteket, amikor a konvergencia kritérium nem teljesül.

6. táblázat: A „tankönyvi” megközelítés relatív hibái numerikus módszerrel, 10 éves várható élettartam esetén

E(*T*)	λ	r						
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	0,0044	0,1567	0,2073	0,2048	0,1757	0,1348	0,0897
	5%	0,3576	0,0203	0,1282	0,1776	0,1751	0,1468	0,1069
	10%	KK	0,3732	0,0442	0,1007	0,1489	0,1465	0,1189
	15%	KK	KK	0,3884	0,0673	0,0741	0,1211	0,1188
	20%	KK	KK	KK	0,4031	0,0897	0,0483	0,0942

Forrás: Saját szerkesztés

7. táblázat: A „profil” megközelítés relatív hibái numerikus módszerrel, 10 éves várható élettartam esetén

E(*T*)	λ	r						
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	0,0044	0,1861	0,2697	0,2998	0,3016	0,2892	0,2708
	5%	0,3576	0,0044	0,1861	0,2697	0,2998	0,3016	0,2892
	10%	KK	0,3576	0,0044	0,1861	0,2697	0,2998	0,3016
	15%	KK	KK	0,3576	0,0044	0,1861	0,2697	0,2998
	20%	KK	KK	KK	0,3576	0,0044	0,1861	0,2697

Forrás: Saját szerkesztés

8. táblázat: A „valószínűségi" megközelítés relatív hibái numerikus módszerrel, 10 éves várható élettartam esetén

E(*T*)	*λ*	r						
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	0,3963	0,2765	0,2155	0,1889	0,1823	0,1874	0,1992
	5%	0,6294	0,4112	0,2943	0,2348	0,2089	0,2024	0,2074
	10%	KK	0,6384	0,4255	0,3115	0,2535	0,2281	0,2219
	15%	KK	KK	0,6471	0,4394	0,3281	0,2715	0,2468
	20%	KK	KK	KK	0,6556	0,4529	0,3442	0,2890

Forrás: Saját szerkesztés

A megközelítések numerikus összehasonlítása

A 9. táblázatban a megközelítésekhez tartozó relatív hibák közül a legkisebb értéket képviselő megközelítés nevének kezdőbetűje (Tankönyvi – T, Profil – P, Valószínűségi – V) jelenik meg adott *r* és *j* kombináció mellett a példához használt 10 éves várható élettartam esetén. A *j*=0% és *r*=15% metszetében látható, hogy megjelenik a valószínűségi megközelítés, mint legjobb választás, sőt a vizsgálat során tovább növelt várható élettartamok esetén még inkább teret nyer.

9. táblázat: A megközelítésekre vonatkozó preferenciavizsgálat numerikus módszerrel, 10 éves várható élettartam esetén

E(*T*)	*λ*	r						
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	P/T	T	T	V	T	T	T
	5%	P/T	P	T	T	T	T	T
	10%	KK	P	P	T	T	T	T
	15%	KK	KK	P	P	T	T	T
	20%	KK	KK	KK	P	P	T	T

Forrás: Saját szerkesztés

A kutatás célja eldönteni, hogy mikor elégedhetünk meg a „tankönyvi" megközelítés pontosságával, annak egyszerűségét kamatoztatva. Ehhez szükséges összevetetni egymással a „profil" és a „tankönyvi" megközelítés relatív hibájának különbségét. Ha ez nem haladja meg a számottevőség határát jelentő 5%-ot, akkor igazolható, hogy a „tankönyvi" megközelítés kellően pontos egyszerűségét mérlegelve. A szürke hátterű cellákban látható kiemelve, hogy hol kisebb, mint 5% a két megközelítés közötti különbség. A paraméterek ezen tartományában nem érdemes törekedni a pontos pénzáramprofil figyelembevételére.

10. táblázat: A „profil" és a „tankönyvi" megközelítés relatív hibájának különbsége numerikus módszerrel, 10 éves várható élettartam esetén

1.E(*T*)	λ	r						
10	0,1	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
j	0%	**0,0000**	**0,0294**	0,0624	0,0950	0,1258	0,1544	0,1811
	5%	**0,0000**	**0,0159**	0,0578	0,0921	0,1247	0,1547	0,1823
	10%	KK	**0,0157**	**0,0398**	0,0854	0,1208	0,1533	0,1827
	15%	KK	KK	**0,0308**	0,0629	0,1120	0,1486	0,1811
	20%	KK	KK	KK	**0,0455**	0,0853	0,1377	0,1755

Forrás: Saját szerkesztés

Összefoglalás

Arra a kérdésre kerestük a választ, hogy érdemes-e törekedni a jelenérték számítás „tankönyvi" megközelítése esetén tett egyszerűsítő feltételek (periódusvégi konvenció, pusztán a várható élettartamig történő számítás) feloldására. Három megközelítés került numerikus összehasonlításra: a „tankönyvi", a „profil" (periódusvégi konvenció feloldása céljából), és a „valószínűségi" (az élettartammal kapcsolatos bizonytalanság figyelembe vétele céljából).

Az elemzés során a folytonos, exponenciális pénzáramprofil, exponenciális eloszlású élettartammal kombinálva vizsgáltuk. A paraméterek tartománya a gyakorlatban előforduló releváns eseteket szem előtt tartva került meghatározára, így a növekedési ütem, $j \in [0\%;20\%]$ és a diszkontráta, $r \in$

[*0%;30%*]. A várható élettartam (E(T)) a feltételezésnek megfelelően csak pozitív egész értékeket vesz fel és maximális értéke 40 év.

A matematikai korrektség és az eredmények jól kezelhetősége végett külön kellett megvizsgálni a $j<r$, $j=0$, $j>r$ és $j=r$ eseteket, mind a számítások, mind az összehasonlítás során. Így értelemszerűen az eredményeink is ilyen formában álltak elő. Az összehasonlításhoz a relatív hibát használtuk, mely a közelítő és szimulált várható jelenérték hányadosaként adódik.

A növekedési ütemet meghaladó diszkontráta ($j<r$) esetén, 13 évnél nem nagyobb várható élettartamig a „tankönyvi" eljárás javasolt, mert a vizsgált megközelítések közül ez a legpontosabb, illetve pontosságban nem marad el számottevően a közülük legpontosabbtól (azaz a hibák közti különbség kisebb, mint 5%). A 13 évet meghaladó várható élettartamra a „valószínűségi" megközelítés kezd egyre preferáltabb lenni. A vizsgálat szempontjából a nemnegatív diszkontráta feltételezéséből adódóan a $j<r$ esetbe tartozik a nulla növekedési ütem ($j=0$) esete, melyre a következtetések ugyanazok.

A diszkontrátával megegyező vagy azt meghaladó növekedési ütem ($j=r$ és $j>r$, tehát $j \geq r$) esetén, a „profil" megközelítés a legpontosabb, pontosságban őt követi a „tankönyvi" megközelítés, majd a „valószínűségi" megközelítés. Viszont 10%-ot meg nem haladó növekedési ütemig a „tankönyvi" megközelítés és a „profil" megközelítés hibája közti különbség nem számottevő (kisebb, mint 5%), tehát egyszerűsége miatt a „tankönyvi" megközelítés javasolt.

Összességében az általam tett feltételezések fényében a három megközelítés pontosságát összevetve megállapítható, hogy a gyakorlatban jellemzően előforduló paramétertartomány egy jelentős részében a „tankönyvi" eljáráshoz képest nem érdemes törekedni sem a pontos pénzáramprofil, sem az élettartammal kapcsolatos bizonytalanság figyelembevételére.

Irodalomjegyzék

Andor, Gy., Dülk, M. (2013): Present value under uncertain asset life: an evaluation of relative error, *Periodica Polytechnica Social and Management Sciences,* 21(2), 71-82. DOI: https://doi.org/10.3311/PPso.7086

Damodaran, A. (2006): *Befektetések értékelése*, Panem Kiadó, Budapest

Sereg, N. (2021): Shortcomings of NPV Calculation: Does One Error Annul the Other?, *Periodica Polytechnica Social and Management Sciences,* 29(2), 136-144. DOI: https://doi.org/10.3311/PPso.14313

Székely, C., Keresztes, G., & Szalay, L. (2020). Becslés a döntéshozatalban. *Gazdaság & Társadalom,* 30(3.), 60-79. DOI: https://doi.org/10.21637/GT.2019.3.04

Zinn C. D., Lesso W. G., & Motazed B. (1977): A probabilistic approach to risk analysis in capital investment projects, *The Engineering Economist,* 22(4), 239-260. DOI: https://doi.org/10.1080/00137917708965183