Nincs királyi út! [1]

A textilkirály és a matematikus

Az alább közölt levélváltás kezdeményezője a maga szakterületén elismert és népszerű, Goldberger Leó, aki a fővárosi úri társaság életének is meghatározó alakja volt. Ismerte és tisztelte az ekkor már világhírű matematikus Fejér Lipótot, és nagy tisztelettel fordult hozzá egy matematikai kuriózum rejtélyének feloldásáért. A tisztelet kölcsönösnek bizonyult. A kiváló matematikus – aki a rejtélyes feladványt nem ismerte – nem átallott azonnal tollat ragadni, és válaszában alaposan kifejtette a megoldást.

Bevezetés

Ezt a címet adta egyik könyvének Sain Márton matematikus, matematikatörténész. Miért nincs „királyi út"? Mert a „legtökéletesebb tudomány", a matematika világában sem minden olyan tökéletes és fenséges, az eredményekért, a feladatok megoldásáért pedig meg kell küzdeni. Kemény munka nélkül a tehetség sem boldogul. A világhírű matematikus, Fejér Lipót számára sem jelentett röviden megválaszolható kérdést egy különleges szám rejtélyének feltárása és bebizonyítása.

Fejér Lipót (Pécs, 1880. február 9. **-** Budapest, 1959. október 15.) a 20. század egyik legjelentősebb matematikusa, a trigonometrikus sorok modern elméletének kidolgozója, az MTA tagja volt, 1948-ban Kossuth-díjjal tüntették ki. A világhírt már egyetemi hallgatóként kiérdemelte. 1906-ban adjunktus, 1911-ben nyilvános rendes tanár lett Kolozsvárott, ugyanezen évben Budapestre hívták meg a tudományegyetem egyik matematikai tanszékére, amelyet haláláig vezetett. Ő lett a budapesti tudományegyetem első, valóban világhírű matematikatanára, és csaknem fél évszázados munkássága alatt kiválóbbnál kiválóbb tanítványok tucatjait nevelte fel. *Interpolatióról* című munkájával elnyerte az MTA nagyjutalmát (1911-1917). Tagja volt a Göttingeni Tudományos Társulat matematikai-fizikai osztályának, a Bajor és a Lengyel Tudományos Akadémiának, illetve a Calcuttai Matematikai Társulatnak. 1933-ban a chicagói világkiállításra meghívott négy legkiválóbb európai tudós közé került. Haladó gondolkodású, nagy műveltségű ember volt, baráti viszonyt ápolt Ady Endrével. Ő és Riesz Frigyes lett a világhírű magyar matematikai iskola megalapítója.

Fejér a Tanácsköztársaság utáni antiszemita légkörben sem ment külföldre, pedig csábító ajánlatok várták, itthon pedig 1944-ben katedrájától is megfosztották, és élete is veszélyben forgott. A csoportot, amelyet a nyilasok kivégzésre szántak, és amelynek ő is tagja volt, egy honvédtiszt mentette meg a haláltól. A legenda szerint a Bólyai János-díj átvételekor - amihez Jules Henri Poincaré (1854-1912), a századforduló híres francia matematikusa is gratulációját küldte - az egyetem egyik antiszemita beállítottságú tanára, tudván, hogy a professzor 1900 körül változtatta nevét Weiszről Fejérre, gúnyosan megkérdezte, vajon rokona-e ez a Fejér Lipót kiváló katolikus teológusunknak, Fejér Ignácnak? Erre Eötvös Loránd rezzenéstelen arccal megjegyezte: „igen, a törvénytelen fia".

Az alább közölt levélváltás kezdeményezője a maga szakterületén Fejérnél nem kisebb egyéniség, Goldberger Leó (Budapest, 1878. május 2. **-** Mauthausen, 1945. május 5.), a Goldberger-gyár elnök-vezérigazgatója, a magyar textilipar korszerűsítője, a Magyar Gyáriparosok Országos Szövetségének igazgatója volt. 1900-ban, jogi tanulmányainak befejezése után a Goldberger-cég szolgálatába lépett. 1905-ben, amikor a vállalatot családi részvénytársasággá alakították át, igazgatósági tag és ügyvezető igazgató, 1908-ban vezérigazgató, 1910-ben elnök-vezérigazgató lett. Megszervezte a textilkivitelt és nemzetközi hírnevet szerzett a vállalatnak. Az 1920-as években kapcsolatba került a Pesti Magyar Kereskedelmi Bankkal, és a Horthy-korszakban a gazdasági intézmények és egyesületek egész sorában töltött be vezető tisztséget. A Magyar Textilgyárosok Országos Egyesületének elnöke, a Gyáriparosok Országos Szövetsége (GYOSZ) és a Magyar Külkereskedelmi Intézet igazgatósági tagja, a Magyar Nemzeti Bank főtanácsosa és 1935-től felsőházi tag volt. 1944-ben nem követte kiváltott és Portugáliába menekített rokonságát, hanem önként csatlakozott a többi deportálthoz. Néhány nappal mauthauseni szabadulása után éhen halt.

A textilipar koronázatlan királya nem csupán saját szakmájában volt elismert és népszerű, hanem a fővárosi úri társaság életének is meghatározó alakjává vált. Mindenkit ismert, aki „számított", beleértve a politikai, a tudományos, az irodalmi és a kulturális élet személyiségeit. Ismerte és tisztelte az ekkor már világhírű matematikus Fejér Lipótot is, és nagy tisztelettel fordult hozzá egy matematikai kuriózum rejtélyének feloldásáért. A tisztelet kölcsönösnek bizonyult. A kiváló matematikus - aki a rejtélyes feladványt nem ismerte - nem átallott azonnal tollat ragadni, és válaszában alaposan kifejtette a megoldást. A levélváltásból megtudhatjuk, hogy régi jó barátot tiszteltek egymásban, valamikor együtt nyaraltak a Semmeringen (Ausztria), illetve, hogy Goldberger Leó nevelt lánya, Popper Edit Fejér Lipót hallgatója volt.

A levelek jelzete: Z 675 Goldberger Leó iratai, 15. csomó, 66. tétel

Források

Goldberger Leó levele Fejér Lipóthoz

Budapest, 1943. január 18.
Mélyen Tisztelt Professzor Úr!
Kedves Barátom!

Ne vedd zokon, hogy nagy elfoglaltságod közepette a következő - bizonyára általad naivnak tartott kérdéssel fordulok hozzád.

Valamikor régen egy furcsa számról olvastam. Állítólag a számsorhoz hasonlót nem találtak. Ez a szám 142857; bizonyára igen jól ismered, és csak így a rend kedvéért említem meg, hogy ha ezt a számot 2-től 6-ig bármely számmal megszorozzuk, úgy az eredményben bizonyos törvényszerű sorrendiségben ugyanazon számjegyek fordulnak elő; ha azonban 7-tel szorozzuk meg, úgy az eredmény: 999 999.

Baráti körben megemlítettem ezt a számot, amire tudálékosan azt jegyezték meg, hogy ennek valódiságát bizonyára valamely matematikai törvénnyel igazolni lehet.

Régi emlékek elevenednek fel, midőn Téged arra kérlek, mélyen tisztelt Professzor Uram - ismételten exkuzálva magam szerénytelenségemért, hogy ez ügyben légy oly kegyes felvilágosítani.

Előre is hálás köszönettel vagyok
megkülönböztetett tisztelettel mindig igaz híved

Méltóságos
Fejér Lipót egyetemi tanár úrnak
Budapest
Krisztina krt. 165.

Fejér Lipót kézzel írott válaszlevele Goldberger Leónak

Budapest, 1943. január 22.

Mélyen Tisztelt Kedves Barátom!

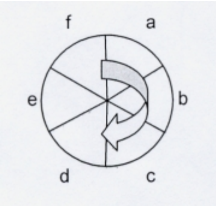
Köszönöm szíves soraidat és az érdekes tétel közlését. Én nem is hallottam ezt soha. Meggyőződtem róla, hogy 142857 valóban az *egyetlen* hatjegyű szám, amely a szóban forgó tulajdonsággal bír.

Feladat. Keressünk egy tízes-rendszerbeli hatjegyű egész számot x = abcdef, amely a következő három tulajdonsággal bír:
1.) az a, b, c, d, e, f jegyek egyike sem egyenlő zérussal,
2.) az a, b, c, d, e, f jegyek egymástól különbözők
3.) az x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x mind hatjegyű számok, amelyek mind ugyanazon a, b, c, d, e, f jegyekkel írhatók fel, és pedig így:

x = a b c d e f	I.
b c d e f a	II.
c d e f a b	III.
d e f a b c	IV.
e f a b c d	V.
f a b c d e	VI.

(A kívánalom [követelés] nem úgy értendő, hogy itt a második sor adja a 2x-et, a harmadik a 3x-et stb., hanem csak úgy, hogy a fenti hat szám az x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x-et adja valamely egymásutánban.)

Megjegyzés (pusztán egy matematikai műszó felemlítése). A második, harmadik, ..., hatodik sorban fölírt betűk az első sorban lévő a, b, c, d, e, f hat betű ú. n. *permutációit* adják, és pedig mely permutációit? - az ú. n. *cyclikus permutációit.* (Honnan ez az elnevezés: cyclikus? Ha egy kört rajzolsz, és megjelölsz ezen, a nyíl által jellemzett természetes sorrendben hat pontot, a, b, c, d, e, f-et



akkor : ha a-nál kezded és körüljárod a kört, kapod: a b c d e f, ha b-nél kezded és körüljárod a kört, kapod: b c d e f a stb. - rendre a fenti hat „cyclikus permutációt".)

Már most kérdésünk legpregnánsabban úgy fogalmazhatjuk meg, hogy *keresendő egy, az* 1.), 2.) *föltételeknek megfelelő* x = a b c d e f *hatjegyű szám úgy, hogy* 3.) *az* x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x *számok számjegyei megadják az* a b c d e f *cyclikus permutációinak teljes 6-tagú rendszerét* (valamely sorrendben). (A 7-tel való szorzásról egyelőre hallgatunk.)

Azt állítottam, csak ismétlem, hogy x = 142 857 az *egyetlen* hatjegyű szám, amely az 1.), 2.), 3.) föltételeknek megfelel.

Bizonyítás. Világos, hogy az a = 1. Ha ugyanis a = 2, 3, ..., 9 volna, akkor 6x egymilliónál nagyobb volna, tehát nem volna hatjegyű szám.

Tehát
x = 1 b c d e f.
Az első jegy tehát meg van határozva.

Most a hatodik jegyet, az f-et fogom meghatározni. Azt állítom, hogy f nem lehet páros jegy (vagyis 2 vagy 4 vagy 6 vagy 8). Mert akkor 2x, 3x, 4x, 5x, 6x is vagy 0-sal vagy 2-vel vagy 4-gyel vagy 6-tal vagy 8-cal végződnék, *tehát egyszer sem* 1-gyel. Mivel pedig 1, mint láttuk, az x egyik jegye (az első), kell, hogy (a cyclikusság folytán) *a többszörösök egyike* az 1 *jeggyel végződjék.* Eszerint csak
f = 1 vagy 3 vagy 5 vagy 7 vagy 9
lehetséges.

Ámde f = 1 nem lehet, mert akkor az 1 jegy kétszer fordulna elő a keresett x-ben, amit kizártunk. Maradnak az
f = 3, 5, 7, 9
lehetőségek.

Most képezzük a 2x, 3x, 4x, 5x, 6x-et. Elhagyhatjuk a 2x, 4x, 6x páros többszörösöket, mert azok csak páros jeggyel, tehát 1-gyel nem végződhetnek. Marad a két többszörös:
3x, 5x

Minthogy
x = · · · · · f,
(ahol, mint mondottuk, f = 3 vagy 5 vagy 7 vagy 9), tehát 3x vagy 9-cel vagy 5-tel vagy 1-gyel vagy 7-tel végződik (tehát csak az f = 7 esetben 1-gyel). Viszont 5x mind a négy esetben 5-tel végződik.
Látjuk tehát, hogy az x = 1 b c d e f számra nézve a 2x, 3x 4x, 5x, 6x számok valamelyike akkor és csak akkor végződhetik 1-gyel, ha f = 7 (Ekkor 3x = · · · · · 1).

Tehát most már mondhatjuk, hogy szükségképpen
x = 1 b c d e 7,
vagyis a keresett szám első és hatodik jegyét meghatároztuk.

Most, drámai gyorsasággal, meg tudom határozni a még ismeretlen négy jegy lehetséges *értékét* (ha nem is mindjárt a *helyöket* is). Ugyanis az x imént nyert alakjából nyilván következik:
x = · · · · · 7
2x = · · · · · 4
3x = · · · · · 1
4x = · · · · · 8
5x = · · · · · 5
6x = · · · · · 2
Minthogy követeljük, hogy mind a hat jegy egyszer és csak egyszer utolsó jegye legyen a hat darab hatjegyű x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x számok valamelyikének, tehát a mi keresett számunk szükségképpen az imént talált
1, 2, 4, 5, 7, 8
jegyekből áll. Csak az a kérdés, hogy melyik *helyen* áll ez a talált hat jegy? Az 1-ről már tudjuk, hogy (balról) az első helyen áll, és a 7-ről már tudjuk, hogy (balról) a hatodik helyen áll. De mi van a 2, 4, 5, 8 jegyek helyével?

Azt állítom először is, hogy az 5 jegy az ötödik helyen áll. Vagyis, hogy
x = 1 · · · 57
Ha ugyanis nem az 5 állna az ötödik helyen, akkor a három most posszibilis jegy közül a 2 vagy a 4 vagy a 8 állana ezen az ötödik helyen.

Ez azonban nem felel meg, amit a következőképpen bizonyítok be.

α) Ha ugyanis
x = · · · · 27
volna, akkor
2x = · · · · 54
3x = · · · · 87
4x = · · · · <u>0</u>8
Íme 4x-ben föllépett a szerepléstől eltiltott 0 jegy. Tehát x = · · · · 27 nem felel meg.
Ha meg x = · · · · 47
volna, akkor

β)
2x = · · · · 94

Minthogy a 9 jegy szintén nem szerepelhet egyik többszörösben sem, tehát x = · · · · 47 sem válik be.
Végre, ha
γ)
x = · · · · 87
volna, akkor
2x = · · · · 74
3x = · · · · 67
Minthogy a 6 jegy szintén nem szerepelhet, tehát az x = · · · · 87 sem válik be.

Tehát tényleg az 5-ik helyen csak az 5 jegy állhat, vagyis addig jutottunk el, hogy
x = 1 b c d 5 7

Most egy pár sor, és a végén vagyunk.
Ezután a 8 jegy helyét keresem a még rendelkezésre álló három hely közül.
x = 18 · · 57
nem válik be, mert most 6x több, mint egymillió, és így több, mint 6 jegyből állana.

Megpróbáljuk tehát, hogy
x = 1 · 8 · 57
megfelel-e? csak két lehetőség van:
vagy: x = 1 2 8 4 5 7
vagy: x = 1 4 8 2 5 7

Egyik sem válik be. Ugyanis az első esetben
2x = · · · 914
a második esetben pedig
2x = · · 6514.
De 9, illetőleg 6 nem szerepelhet mint jegy. Tehát 8 nem lehet a harmadik helyen sem.

Marad, mint utolsó lehetőség:
x = 1 · · 857.
Ezután már csak két szám közül kell választanunk; az egyik
x = 1 2 4 8 5 7,
a másik
x = 1 4 2 8 5 7.
Az első nem válik be; ugyanis
2x = · · 9714
-ben a meg nem engedett 9-es jegy lép föl.
Végre marad
x = 1 4 2 8 5 7
mint egyetlen hatjegyű szám, amely a mi 1), 2), 3) *követelésünknek eleget tehet.*

Mondom, ezzel az van bebizonyítva, hogy az összes 6-jegyű, egymástól különböző jegyű, zérus jeggyel nem bíró számok között az x = 1 4 2 8 5 7 az ***egyetlen,*** amelyre nézve a 2x, 3x, 4x, 5x, 6x többszörösök jegyhatosai az eredeti 1, 4, 2, 8, 5, 7 számhatos többi 5 cyclikus permutációját ad*hat*ják. Hogy *tényleg* szolgáltatják, azt a szorzás mutatja:

x = 1 4 2 8 5 7	I.
2x = 2 8 5 7 1 4	III.
3x = 4 2 8 5 7 1	II.
4x = 5 7 1 4 2 8	V.
5x = 7 1 4 2 8 5	VI.
6x = 8 5 7 1 4 2	IV.

(A jobb oldalon álló római számok jelzik, hogy az 1. oldal értelmében hányadik cyclikus permutáció áll elő, ha x-et rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6-tal megszorozzuk.)

Ezzel a feladatot megoldottuk.
Megjegyzem, próbáltam 3-jegyű számot találni, amely a mi x számunkkal analóg tulajdonságot mutat. hamarosan *kiderült, hogy ilyen 3-jegyű* szám nincs.

Adjuk össze a fenti hat számot; kapjuk, minthogy minden oszlop is az 1 4 2 8 5 7 jegyekből áll,
$21x = (1+4+2+8+5+7) * (10^5+10^4+10^3+10^2+10+1) = 27*111\ 111$,
vagyis, osztva mindkét oldalt 3-mal
7x = 9*111 111 = 999 999.

Látható ebből, hogy a 7-tel való szorzásra vonatkozó állítás már csak *következménye* az x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x-re vonatkozólag követelt „cyclikus" tulajdonságnak.

Én remélem, hogy amit írtam, meg lehet érteni. Ha valamely pont nehézséget okoz, akkor fordulj kedves tanítványomhoz, Popper Edit kisasszonyhoz, akit egy kis, esetleg szükséges magyarázat adására ezennel ünnepélyesen megkérek. A Méltóságos asszonynak tisztelettel kézcsókomat küldöm, Téged pedig, mint egyéniséged és nagy műved - annyi sok között - egyik igaz tisztelője, a semmeringi együttlétre is gondolva, szeretettel köszönt
Fejér Lipót

Amit még Fejér Lipót sem tudhatott ekkor

A levélváltás tárgya, a 142 857-es szám további - Fejér Lipót válaszlevele által nem érintett - titkokat is rejt:
1.) Ha megvizsgáljuk az 1/7-et tizedes tört formában, akkor is visszaköszön a 142 857 végtelen tizedes törtként:
1/7 = 0,142857142857142857...

2.) Ha elosztjuk kettővel, akkor - ugyan csak tizedes törtes formában, de - ismét az eredeti szám anagrammáját kapjuk hányadosként:
142 857:2 = 71 428,5

3.) Ha elosztjuk öttel, akkor is - ugyan csak tizedes törtes formában, de - ismét a szám anagrammáját kapjuk hányadosként:
142 857:5 = 28 571,4

4.) Ha megszorozzuk nyolccal, szintén a szám anagrammáját kapjuk, igaz csak akkor, ha a legelső számjegyet letakarjuk és értékét hozzáadjuk a legutolsóéhoz.

*142 857*8 =* 1142856

5.) Ha megszorozzuk negyvenkettővel, hasonló alakú szorzatot kapunk, mint amikor héttel szorozzuk meg. Ha a legelső számjegyet letakarjuk, és értékét hozzáadjuk a legutolsóéhoz, akkor pontosan 999 999 lesz az eredmény.

*142 857*42 =* 5999994

6.) A matematika tudományának fejlődése miatt erről a számról a következőkre még Fejér Lipót sem hívhatta fel Goldberger Leó figyelmét, lévén, hogy a számelmélet ekkor még nem ismerte a Kaprekar-szám és a Harshad (Niven)-szám fogalmát. Shri Dattathreya Ramachandra Kaprekar (1905-1986) indiai matematikus, akinek a neve összekapcsolódott a számelmélet több felfedezésével. D. R. Kaprekar Dahanuban született, az indiai Bombay közelében. 1929-ben szerzett egyetemi diplomát a bombayi egyetemen. 1962-ig, nyugdíjazásáig matematikatanárként működött Devlaliban.

A róla elnevezett ún. Kaprekar-számok fogalmát az indiai matematikus 1949-ben írta le. Kaprekar-számoknak azokat a számokat nevezzük, amelyeket, ha négyzetre emelünk és az így keletkező hatványt félbevágva kapott két új számot összeadjuk. akkor e két szám összege az eredeti számmal fog megegyezni. Kaprekar-számok pl.: 1, 9, 45, 55, 99, 297, 703 stb.
A 142 857 Kaprekar-szám, ugyanis ha négyzetre emeljük, akkor a hatvány olyan szám lesz, amelyet középen két új számra bontva az így kapott számok összege megegyezik az eredeti számmal:
$142\,857^2 = 20\,408\,122\,449$
20 408+122 449 = 142 857
Harshad-szám vagy más néven Niven-szám minden szám, amely az adott számrendszerben osztható saját számjegyei összegével. A Harshad-számokat is D. R. Kaprekar definiálta. A „harshad" szó a szanszkrit nyelvből származik, és „nagy vidámság", „nagy öröm" a jelentése. A Niven-szám elnevezés Ivan Morton Niven nevéből ered, aki 1997-ben egy számelméleti konferencián felolvasta az e témában írt értekezését. 1-től 9-ig minden szám Harshad-szám, a 10 fölöttiek közül pedig többek között az alábbiak: 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30 stb.
A 142 857 Harshad-szám, ugyanis számjegyeinek összeadásával olyan összeget kapunk, amellyel az eredeti szám osztható. Vagyis 1+4+2+8+5+7 = 27; 142 857:27 = 5291.

Goldberger köszönőlevele

Budapest, 1943. január 26.
Mélyen tisztelt Professzor Úr!
Drága Barátom!

Amidőn tegnap megkaptam kedves leveledet, két érzés fogott el: a szégyenkezés és a büszkeség érzése. Szégyelltem magam, hogy ezzel a kérdéssel Néked, drága Professzor Uram, ilyen nagy munkát okoztam, hiszen sajátkezűleg közel 7 oldalt írtál, és egyéb elfoglaltságod mellett valóban csak bámulni kell, hogy szerény vagy naiv kérdésemre ily precizitással méltóztattál válaszolni. Ne vedd zokon, hogy ezt a nagy munkát okoztam Néked.

De ugyanakkor büszke is voltam, mégpedig két szempontból. Először azért, hogy hazánkban ennek a legtökéletesebb tudománynak tanszékén Téged láthatunk, akinek európai híre lehetővé tette, hogy dacára a sok kellemetlenkedésnek tanítanod lehetséges. De büszke voltam azért is, mert leveleddel nagyon kitüntettél, és annak egyes - reám nézve oly kedves szavait sohasem fogom elfelejteni.

Ami most a meritumot illeti, úgy Edit húgom nevében is sokszor köszönöm leveledet. Ő természetesen azonnal megértette a nagy bölcsességgel elő ...

[A levélmásolat folytatása nem maradt meg Goldberger Leó iratai között.]
Címkék:
MTA [2]
Goldberger [3]
GYOSZ [4]
Fejér Lipót [5]
Kiadás: 6. évfolyam (2006) 1. szám