A Busche-Ramanujan azonosságok

Tóth László
Pécsi Tudományegyetem, Pécs
és
Universität für Bodenkultur, Wien

Egy $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ számelméleti függvényt teljesen multiplikatívnak nevezünk, ha $g(mn) = g(m)g(n)$ teljesül minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen g és h két teljesen multiplikatív számelméleti függvény és jelölje $f = g * h$ ezek Dirichlet-konvolúcióját. A Busche-Ramanujan azonosságok szerint minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(mn) = \sum_{d|(m,n)} f\left(\frac{m}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) g(d) h(d),$$

ahol μ a Möbius-függvény és

$$f(m)f(n) = \sum_{d|(m,n)} f\left(\frac{mn}{d^2}\right) g(d) h(d).$$

Például ezek az azonosságok fennállnak a következő speciális f függvényekre:

(i) a $\sigma_k = id_k * 1$ függvényre, ahol $id_k(n) = n^k, 1(n) = 1$ $(k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$, speciálisan a $d = 1 * 1$ osztófüggvényre és az osztók számát jelentő $\sigma = id * 1$ függvényre, ahol $id(n) = n$ $(n \in \mathbb{N})$;

(ii) a $\beta = \lambda * id$ függvényre, ahol λ a Liouville-függvény, itt β az alternáló szigma-függvény, lásd [7];

(iii) az $R_1 = 1 * \chi$ függvényre, ahol χ a főkaraktertől különböző (mod 4) karakter, itt $R(n) = 4R_1(n)$ az $n = x^2 + y^2$ egyenlet $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldásainak a száma;

(iv) a Ramanujan-féle τ függvényre, amely így definiált:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24}, \qquad |x| < 1,$$

ahol $\tau = g_1 * g_2$ bizonyos teljesen mulktiplikatív g_1 és g_2 függvényekre úgy, hogy $g_1(n) g_2(n) = n^{11}$ minden $n \in \mathbb{N}$, esetén, lásd például [1] és [4].

Az Busche-Ramanujan formulák történetére és általánosításaira vonatkozóan lásd például a [2], [3], [5], [6] és [9] cikkeket.

A következő új eredményt a [8] dolgozatban bizonyítottam:

Tétel. Legyenek $f_1,\dots,f_k$ teljesen multiplikatív függvények ($k\in\mathbb{N}$) és legyen $F=f_1*\cdots*f_k$. Legyen ϑ_F az a kétváltozós multiplikatív függvény, amely minden p prím és minden $\nu_1,\nu_2\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ esetén az

$$\vartheta_F(p^{\nu_1},p^{\nu_2})=\begin{cases}1, & \nu_1=\nu_2=0,\\ (-1)^{\nu_1+\nu_2-1}e_{\nu_1+\nu_2}(f_1(p),\dots,f_k(p)), & \nu_1,\nu_2\geq 1,\nu_1+\nu_2\leq k,\\ 0, & különben\end{cases}$$

értékeket veszi fel, ahol $e_d(x_1,\dots,x_k)$ az $x_1,\dots,x_k$ határozatlanú, d-fokú elemi szimmetrikus polinomokat jelöli. Továbbá jelölje ϑ_F^{-1*} az ϑ_F függvény inverzét a kétváltozós konvolúcióra nézve. Akkor minden $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ esetén

$$F(n_1n_2)=\sum_{a_1|n_1,\,a_2|n_2}F\left(\frac{n_1}{a_1}\right)F\left(\frac{n_2}{a_2}\right)\vartheta_F(a_1,a_2),$$

és

$$F(n_1)F(n_2)=\sum_{a_1|n_1,\,a_2|n_2}F\left(\frac{n_1n_2}{a_1a_2}\right)\vartheta_F^{-1*}(a_1,a_2).$$

Ha $k=2$, akkor visszakapjuk az eredeti Busche-Ramanujan képleteket. Az érdeklődő Olvasó a [8] dolgozatban egy másik általánosítást is talál.

Irodalomjegyzék

[1] T.M. Apostol, Modular functions and Dirichlet series in number theory, Second ed., Springer, 1990.

[2] N. Balasubramanian, On the Busche-Ramanujan identities, Nieuw Arch. Wiskd., IV. Ser., 15, (1997), 133--140.

[3] P. Haukkanen, Classical arithmetical identities involving a generalization of Ramanujan's sum, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, Diss., 68 (1988), 69 pp.

[4] F. Luca and I. E. Shparlinski, Arithmetic properties of the Ramanujan function, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 116 (2003), No. 1, 1--8.

[5] P. J. McCarthy, Busche-Ramanujan identities, Amer. Math. Monthly, 67 (1960), 966--970.

[6] A. Mercier, Une représentation pour la série de Dirichlet engendrée par $f(n^rM)$, où f est multiplicative, Colloq. Math., 57 (1989), 353--359.

[7] L. Tóth, A survey of the alternating sum-of-divisors function, Acta Univ. Sapientiae, Math., közlésre elfogadva, http://de.arxiv.org/abs/1111.4842.

[8] L. Tóth, Two generalizations of the Busche-Ramanujan identities, Int. J. Number Theory, közlésre elfogadva.

[9] R. Vaidyanathaswamy, The theory of multiplicative arithmetic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 33 (1931), 579-662.