

Gömbháromszögtan és szférikus csillagászat ortogonális vetületben

Péntek Kálmán

NyME SEK TTK Matematika és Fizikai Intézet,
Matematikai Intézeti Tanszék

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a gömbháromszögtan nevezetes tételeit tárgyaljuk. A tételek bizonyításának egységes alapötlete az lesz, hogy az egységnyi sugarú gömb felületét ortogonális vetítéssel leképezzük egy síkra. A gömbháromszög vetületét alkalmas gömbi forgatásokkal olyan helyzetbe hozzuk, hogy annak egyik oldala a vetület peremkörére kerüljön, s ebben a helyzeten végezzük el a bizonyítást Kramer (1927), Lietzmann (1949), Meyer (1937), Thomas (1939) nyomán.

A gömbháromszög további két oldalát szintén alkalmas forgatásokkal a képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozzuk. Hasonlóképp a peremkörre hozott oldalon fekvő két szöget is képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozva tudjuk számításainkat egészen elemi úton elvégezni.

Eredményeink sikeresen alkalmazhatók a szférikus csillagászati problémák tárgyalása során is.

2. A gömbháromszögtan sinus tétele

Az ABC Δ általános gömbháromszögben érvényes az alábbi összefüggés:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

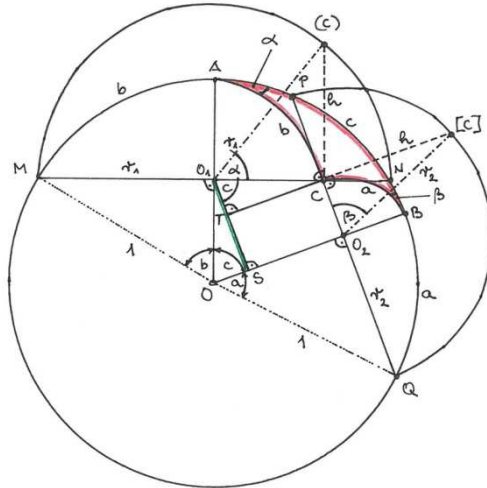
BIZONYÍTÁS. Az 1. ábra jelöléseit felhasználva első lépésben alkalmas forgatásokkal hozzuk a gömbháromszöget olyan helyzetbe, hogy annak $c = AB$ oldala a vetület peremkörére kerüljön, a C csúcs pedig a felénk eső félgömbre essék. Forgassuk ezután a háromszög $b = AC$ oldalát az AO tengely körül a képsíkkal párhuzamos $b = AM$ vég helyzetbe, s teljesen hasonlóan a háromszög $a = BC$ oldalát pedig a BO tengely körül szintén a képsíkkal párhuzamos $a = BQ$ vég helyzetbe. Vetítősík esetén a háromszög $\alpha = BAC$ szögét merőlegesen az O_1 középpontú, az ábra síkjára merőleges gömbi kiskörre, majd a vetületi, szintén α nagyságú szöget forgassuk a kiskör MN átmérője körül a képsíkkal párhuzamos helyzetbe. Ekkor nyerjük az $\alpha = CO_1(C)$ szöget. Teljesen hasonlóan vetítsük a háromszög $\beta = ABC$ szögét merőlegesen az O_2 középpontú, az ábra síkjára merőleges gömbi kiskörre, majd a vetületi, szintén β nagyságú szöget forgassuk a kiskör PQ átmérője körül a képsíkkal párhuzamos helyzetbe. Ekkor nyerjük a $\beta = CO_2[C]$ szöget.

4. A gömbháromszögtan sinus-cosinus tétele

Az $ABC \Delta$ általános gömbháromszögben érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin a \cdot \cos \beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha$$

BIZONYÍTÁS. A 3. ábra jelöléseit felhasználva a két előző tételnél látott módszerrel hozzuk a $c = AB$ oldalt a vetület peremkörére, forgassuk a képsíkkal párhuzamos helyzetbe a $b = AC$, illetve $a = BC$ oldalakat, valamint az $\alpha = BAC \sphericalangle$ és $\beta = ABC \sphericalangle$ szögeket.



3. ábra. A gömbháromszögtan sinus-cosinus tétele

Az $OO_2Q\Delta$ derékszögű háromszögből $\sin a = \frac{r_2}{1}$, ahonnan $\sin a = r_2$ adódik. Az $O_2C[C]\Delta$ derékszögű háromszögből $\cos \beta = \frac{O_2C}{O_2[C]}$, ebből $\cos \beta = \frac{O_2C}{r_2}$, ahonnan $O_2C = r_2 \cdot \cos \beta$ következik. E két fenti megállapításból pedig $O_2C = \sin a \cdot \cos \beta$, s mivel $TSO_2C \square$ téglalap, ezért érvényes a

$$TS = O_2C = \sin a \cdot \cos \beta \quad (9)$$

összefüggés.

Az $OO_1M\Delta$ derékszögű háromszögből $\sin b = \frac{r_1}{1}$, ebből $\sin b = r_1$ következik. Az $O_1C(C)\Delta$ derékszögű háromszögből $\cos \alpha = \frac{O_1C}{O_1(C)}$, s ebből $O_1C = r_1 \cdot \cos \alpha$ következik. A fenti két megállapításból $O_1C = \sin b \cdot \cos \alpha$ adódik.

Az $O_1TC\Delta$ derékszögű háromszög felhasználásával $\cos c = \frac{O_1T}{O_1C}$, amiből $O_1T = O_1C \cdot \cos c$ adódik, s az előző bekezdés megállapítása alapján

$$O_1T = \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha \quad (10)$$

összefüggés lesz érvényes.

Az $OO_1M\Delta$ derékszögű háromszögből $\cos b = \frac{OO_1}{1}$, s ebből $\cos b = OO_1$, az $OSO_1\Delta$ derékszögű háromszögből $\sin c = \frac{O_1S}{OO_1}$, amiből $O_1S = OO_1 \cdot \sin c$ adódik, e két észrevételünkből együttesen következik az

$$O_1S = \cos b \cdot \sin c \quad (11)$$

összefüggés.

Mivel azonban $O_1S = O_1T + TS$, így a (9), (10) és (11) alapján

$$\cos b \cdot \sin c = \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \cos \beta, \quad (12)$$

amelynek egyszerű átrendezésével

$$\sin a \cdot \cos \beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha \quad (13)$$

következik, amely tételünk állítása. \square

A fentiek alapján a tétel a következő formákban is még megfogalmazható:

$$\begin{aligned} \sin b \cdot \cos \gamma &= \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos \beta \\ \sin c \cdot \cos \alpha &= \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin a \cdot \cos \gamma &= \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos \alpha \\ \sin b \cdot \cos \alpha &= \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos \beta \\ \sin c \cdot \cos \beta &= \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

5. További nevezetes összefüggések

A fentiekben tárgyalt három nevezetes gömbháromszögtani alaptételből már levezethetők a szokásos módon az alábbi nevezetes tételek:

A gömbháromszögtan cotangens tétele:

$$\sin \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} a \cdot \sin c - \cos c \cdot \cos \beta. \quad (14)$$

A gömbháromszögtan poláris sinus-cosinus tétele:

$$\cos a \cdot \sin \gamma = \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos c. \quad (15)$$

A gömbháromszögtan poláris cotangens tétele:

$$\sin c \cdot \operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \beta + \cos \beta \cdot \cos c. \quad (16)$$

A gömbháromszögtan szögekre vonatkozó cosinus tétele:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a. \quad (17)$$

A dolgozatban bemutatott bizonyítási eljárással elegánsan tárgyalhatók a szférikus csillagászat klasszikus alapformulái, s ezek felhasználásával levezethetők még az alkalmazott képletek is.

Irodalom

- [1] Kramer, W. (1927): Zeichnerische Lösung der Grandaufgaben der mathematischen Erd- und Himmelskunde – Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht 40, p. 60-71.
- [2] Lietzmann, W. (1949): Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und konstruktiven Methoden – Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen, 292 p.
- [3] Meyer, H. (1937): Zeichnerische Lösungen von Aufgaben aus der mathematischen Erdkunde – Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 43, p. 202-207.
- [4] Thomas, W. (1939): Ein Beitrag zur zeichnerischen Behandlung von Aufgaben aus der mathematischen Himmelskunde – Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 70, p. 15-23.